POTENZIALE ELETTROSTATICO

- F_e è una forza CONSERVATIVA

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = -\Delta U$$

dipende solo dalle posizioni iniziale e finale, non dal percorso.

- Teorema LAVORO – ENERGIA

$$L = \Delta K \quad \text{con} \quad K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta K = -\Delta U \quad \text{o} \quad \Delta \underbrace{(K + U)}_{\text{energia meccanica}} = 0$$

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$ Nel caso del campo elettrico:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

$$\Delta U_e = -L = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Possiamo pensare di definire una quantità indipendente dalla carica di prova:

$$\Delta V_e = \frac{\Delta U_e}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow [J/C] \equiv V$$

Casi notevoli:

* $\vec{E}$ uniforme

$$\Delta V_{AB} = -E\int_A^B ds = -Ed$$

* $\vec{E}$ da carica puntiforme

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$ $\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,dr$ (si proietta la componente $\parallel$)

$$\Delta V_{AB} = -\int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Anche per il potenziale vale il principio di sovrapposizione

$$V(P) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_i/r_i \longrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

Infine ricordiamo che:

$$\vec{E}(P) = -\vec{\nabla} V(P)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

- ES n 8 pag. 769

* Calcolare la d.d.p. richiesta per fermare un elettrone che si muove ad una velocità di $2,85 \cdot 10^7$ m/s.

* Calcolare la stessa quantità per un protone.

$$\Delta(K+U)=0$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = 0 <= v_f = 0$$

$$k_i + U_i = K_f + U_f$$

* $$\frac{1}{2} m_e v_i^2 + (-e)V_i = 0 + (-e)V_f$$

$$e(\underbrace{V_f - V_i}_{\equiv \Delta V}) = -\frac{1}{2} m_e v_i^2$$

$$\Delta V = -\frac{m_e v_i^2}{2e} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (2,85 \cdot 10^7)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} =$$

$$= \frac{9,11 \cdot 2,85^2}{2 \cdot 1,6} \cdot \frac{10^{-31} \cdot 10^{14}}{10^{-19}} = -2,31 \cdot 10^3 \ V$$

* per un protone:

$$\Delta V_p = \frac{m_p v_i^2}{2e} = -\frac{m_p}{m_e} \Delta V_e$$

• ES 3 pag. 769

Calcolare la velocità finale di un protone e di un elettrone accelerati da riposo da una d.d.p. $\Delta V = 120\ V$.

* Caso protone

Il protone ha una carica positiva, andrà verso potenziali decrescenti. Per comodità assumiamo che $V_i = 120\ V$ e $V_f = 0\ V$

$$0 + eV_i = \frac{1}{2} m_p v_f^2 + 0$$

$$v_f = \left(\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 120}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}\right)^{1/2} = \left(2{,}29 \cdot 10^{10}\right)^{1/2} = 1{,}52 \cdot 10^5\ m/s$$

* Caso elettrone

L'elettrone ha una carica negativa, andrà verso potenziali crescenti:

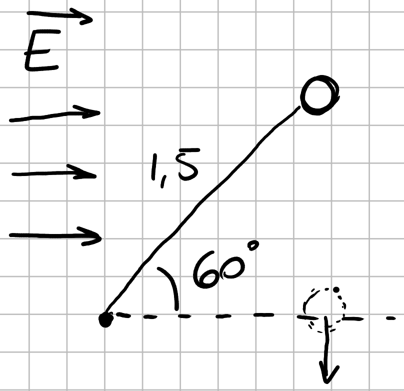
$$V_i = 0 \,, \quad V_f = 120\ V$$

$$k_i + U_i = k_f + U_f$$

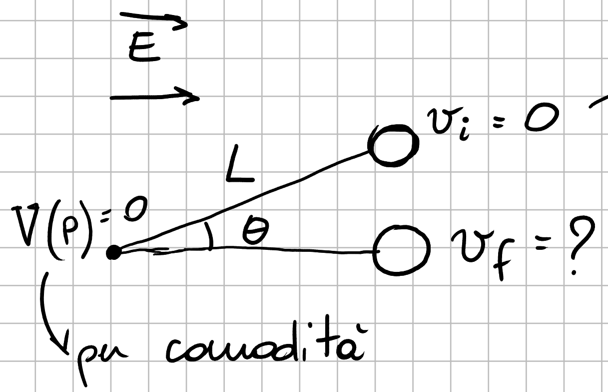
$$0 + 0 = \frac{1}{2} m_e v_f^2 + (-e) V_f$$

$$v_f = \left(\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 120}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} \right)^{1/2} = \left(0{,}421 \cdot 10^{14} \right)^{1/2} = 6{,}49 \cdot 10^{6}\ m/s$$

• ES n. 9 pag. 769



Una particella con massa $m = 0{,}01\ kg$ con una carica $q = 2\ \mu C$ è legata a una stringa di lunghezza $L = 1{,}5\ m$. La particella è rilasciata quando forma un angolo di 60° con un campo elettrico uniforme $\vec{E} = 300\ V/m$.
Determinare la velocità della particella quando la stringa è // al campo $\vec{E}$.



$$V = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -EL\cos\theta$$

$$V = -EL$$

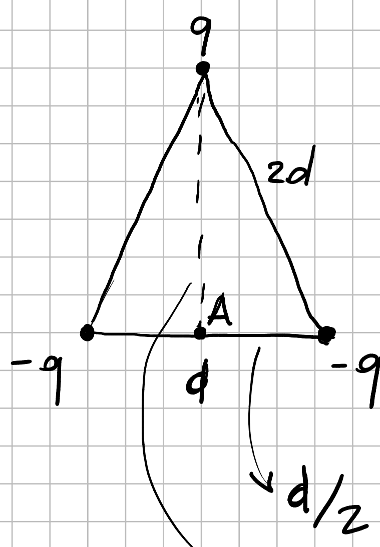
$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 + 0 = -\left(-qEL - (qEL\cos\theta)\right)$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = qEL(1-\cos\theta) \Rightarrow v_f = \left(\frac{2qEL(1-\cos\theta)}{m}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 300 \cdot 1{,}5 \cdot (1-\underbrace{\cos 60°}_{1/2})}{0{,}01}\right)^{1/2} =$$

$$= 0{,}3 \ m/s$$

- ES n. 22 pag. 771



Tre particelle cariche sono poste ai vertici di un triangolo isoscele come in figura, dove $d = 2$ cm e $q = 7\,\mu C$.
Calcolare il potenziale elettrico in A.

Vale il principio di sovrapposizione:

$$V = \sum_{i=1}^{3} \frac{k_e q_i}{r_i}$$

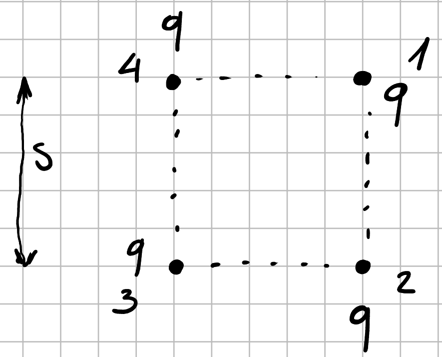
$$\left((2d)^2 - \left(\tfrac{1}{2}d\right)^2\right)^{1/2} = \left(4d^2 - \tfrac{1}{4}d^2\right)^{1/2} = \left(\frac{16d^2 - d^2}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{15}}{2}d$$

$$V = k_e\left(-\frac{q}{d/2} + \left(-\frac{q}{d/2}\right) + \frac{q}{\frac{\sqrt{15}}{2}d}\right) =$$

$$= k_e\frac{q}{d}\left(-4 + \frac{2}{\sqrt{15}}\right) = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 7\cdot 10^{-6}}{0{,}02}\cdot\left(-4 + \frac{2}{\sqrt{15}}\right) = -1{,}1\cdot 10^7\ V$$

- ES n. 24 pag. 771

Determinare il lavoro richiesto per portare le varie cariche in figura dall'infinito alla loro configurazione finale una dopo l'altra.



* Carica 1 :

$$L = -\Delta U = 0$$

* Carica 2 : stimare il potenziale prodotto dalla carica 1 :

$$V = \frac{k_e q}{r} \Rightarrow \Delta U = \frac{k_e q^2}{s}$$

* Carica 3 :

$$d^2 = s^2 + s^2 \longrightarrow d = \sqrt{2}\, s$$

$$\Delta U = \frac{k_e q^2}{s} + \frac{k_e q^2}{\sqrt{2}\, s} = \frac{k_e q^2}{s}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

* Carica 4 :

$$\Delta U = \frac{k_e q^2}{s} + \frac{k_e q^2}{s} + \frac{k_e q^2}{\sqrt{2}\, s} = \frac{k_e q^2}{s}\left(1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Delta U_{TOT} = \frac{k_e q^2}{s}\left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

• ES n. 36 pag. 772

Calcolare $E(x)$

in 1D: $E(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$

* $0 < x < 1$

$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{-20-0}{0{,}01} = -2000\ V/m$$

* $3 < x < 4$

$$E_x = -\frac{0-20}{0{,}01} = 2000\ V/m$$

* $1 \le x \le 3$

$$E_x = \frac{0}{\Delta x} = 0\ V/m$$

- ES n. 33 pag. 712

Dato $V = 5x - 3x^2 y + 2yz^2$, calcolare $\vec{E}$ e calcolare il modulo di $\vec{E}$ nel punto $(1, 0, -2)$ m

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} V = -(+5 - 6xy) = -5 + 6xy$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y} V = -(-3x^2 + 2z^2) = 3x^2 - 2z^2$$

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z} V = -4yz$$

$$\vec{E} = (-5+6xy)\hat{i} + (3x^2 - 2z^2)\hat{j} - 4yz\hat{k}$$

$$|\vec{E}|\,(1,0,-2) :$$

$$E_x = -5+6xy = -5 + 6\cdot 1\cdot 0 = -5\ V/m$$

$$E_y = 3x^2 - 2z^2 = 3\cdot 1^2 - 2\cdot(-2)^2 = 3-8 = -5\ V/m$$

$$E_z = -4yz = 0\ V/m$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{Ex^2 + Ey^2 + Ez^2} = \sqrt{25+25+0} \sim 7{,}07\ V/m$$

CONDUTTORI IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO

Sulla superficie di un conduttore in equilibrio elettrostatico, il potenziale è costante:

$$L = 0 \quad \text{perché} \quad \vec{E} \perp d\vec{s} \rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow \Delta V = 0$$

Anche l'interno di un conduttore ha lo stesso potenziale della superficie:

$$L = 0 \quad \text{perché} \quad E = 0$$

Rivediamo il problema delle due sfere conduttrici connesse da un filo conduttore:

$$V_1 = \frac{k_e Q_1}{R} \qquad V_2 = \frac{k_e Q_2}{R}$$

Ma $V_1 = V_2$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 = Q/2$$

Vedere da sdi esercizio 25.8 pag. 763