Valori attuariali

Fabio Bellini

Università di Milano-Bicocca

fabio.bellini@unimib.it

4 novembre 2021

Valore attuali e valori attuariali

Nei corsi di matematica finanziaria impariamo a calcolare il *valore attuale* di un flusso finanziario futuro in condizioni di certezza, che per definizione è dato dalla somma dei valori attuali dei singoli flussi.
Nella matematica attuariale i flussi finanziari di interesse sono tipicamente sottoposti a incertezza (ad esempio, sono pagati solo se l'assicurato è ancora in vita a una certa data, oppure se l'assicurato muore entro una certa data, o ancora in modo regolare fino a quando l'assicurato rimane in vita, come nel caso delle pensioni o delle rendite vitalizie).
In condizioni di incertezza, il valore attuale diventa una *variabile casuale* e il *valore attuariale* è definito come la *media* del valore attuale.
Per calcolare il valore attuariale di una prestazione assicurativa, occorre unire la modellizzazione probabilistica della durata della vita umana vista nelle lezioni precedenti alla modellizzazione finanziaria del valore temporale del denaro vista nei corsi di matematica finanziaria.

Basi tecniche

Gli "input" necessari per il calcolo del valore attuariale sono tradizionalmente chiamati *basi tecniche*, che sono:

- un modello per la struttura per scadenza dei tassi di interesse, che consente di attualizzare gli importi futuri; spesso si utilizza un tasso di interesse i costante per tutte le scadenze
- un modello di mortalità o una tavola di mortalità, che consente di attribuire una probabilità a tutti gli eventi di rilievo che determinano i flussi finanziari di cui si vuole calcolare il valore attuariale.

Si usa distinguere tra basi tecniche *del secondo ordine*, se le ipotesi fatte sono obiettive e realistiche, e basi tecniche *del primo ordine*, se invece le ipotesi fatte sono modificate in senso favorevole alla compagnia assicuratrice, determinando una sopravvalutazione del flusso finanziario che corrisponde a un cosiddetto *caricamento di sicurezza* del premio.

Le prestazioni assicurative più comuni

Vediamo ora le prestazioni assicurative più comuni, che corrispondono ai tipi concettualmente più semplici di polizze assicurative nel ramo vita. Per ciascuna di esse impareremo a calcolare il valore attuariale e vedremo le corrispondenti notazioni attuariali internazionali standard.

- Capitale differito ("pure endowment")
- Temporanea caso morte ("term insurance")
- Mista ("endowment insurance")
- Temporanea caso morte con capitale assicurato variabile
- Copertura a vita intera ("wholelife insurance")
- Rendita vitalizia ("whole life annuity")
- Rendita vitalizia temporanea ("term annuity").

Negli esempi numerici useremo come base tecnica un tasso di interesse annuo $i = 5\%$ e la tavola ISTAT 2013.

Capitale differito

La prestazione di *capitale differito* prevede il pagamento di un capitale C dopo n anni, a condizione che l'assicurato sia ancora in vita.
Il valore attuale di questa prestazione è la variabile casuale

$$Y_n = \begin{cases} Cv^n & \text{se } T_x > n \\ 0 & \text{se } T_x \leq n \end{cases},$$

dove $v = 1/(1+i)$ rappresenta il fattore di attualizzazione relativo a un anno, x l'età dell'assicurato, e T_x la sua vita residua. Si tratta di una variabile casuale di tipo bernoulliano, in quanto può assumere solo due valori, in funzione del verificarsi o meno della morte dell'assicurato nell'intervallo di tempo considerato. Possiamo anche scrivere

$$Y_n = \begin{cases} Cv^n & \text{con prob. } {}_{\mathbf{n}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} \\ 0 & \text{con prob. } {}_{\mathbf{n}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} \end{cases},$$

dove come abbiamo visto ${}_{\mathbf{n}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}}$ e ${}_{\mathbf{n}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}}$ rappresentano rispettivamente le probabilità di vita e di morte dell'assicurato di età x nei prossimi n anni.

Capitale differito

Il valore attuariale della prestazione di capitale differito è

$$V = \mathbb{E}[Y_n] = C \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot v^n := C \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}},$$

dove abbiamo introdotto la notazione attuariale internazionale standard

$${}_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} := {}_{\mathbf{n}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot v^n,$$

che rappresenta il valore attuariale di 1 Euro disponibile tra n anni a un individuo di età x, se sarà ancora in vita. Due osservazioni:

- la formula per il valore attuariale è moltiplicativa rispetto al capitale C, quindi ad esempio raddoppiando C raddoppia anche il valore attuariale V
- poiché ${}_{\mathbf{n}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} < 1$, si ha

  $${}_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} < v^n,$$

  cioè il valore attuariale dell prestazione di capitale differito è inferiore al suo valore attuale, come ovvio dal punto di vista finanziario.

Esempio

Consideriamo ad esempio il pagamento di un capitale di 100000 Euro tra dieci anni a un uomo di età 45 anni in caso vita.
Dalla tavola ISTAT 2013 maschi, otteniamo

$$
\begin{aligned}
{}_{10}\mathbf{q}_{45} &= \frac{\ell(45) - \ell(55)}{\ell(45)} = \frac{97521 - 94963}{97521} \simeq 2,62\% \\
{}_{10}\mathbf{p}_{45} &= 1 - {}_{10}\mathbf{q}_{45} = 97,38\%.
\end{aligned}
$$

Dato che $i = 5\%$, otteniamo $v = 1/(1+i) = 0,9524$, $v^{10} = 0,6139$,

$$
{}_{10}\mathbf{E}_{45} = 0,9738 \times 0,6139 = 0,5978.
$$

Pertanto il valore attuale attuariale della prestazione è dato da

$$
V = C \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} = 100000 \times 0,5978 = 59780 \text{ Euro}.
$$

Temporanea caso morte

Una polizza *temporanea caso morte* (TCM) di durata n anni prevede il pagamento di un capitale C alla data del decesso, se questo si verifica entro n anni. E' necessario fare una distinzione: il capitale C può essere pagato *immediatamente dopo il decesso* (trascurando i tempi tecnici della liquidazione), oppure può essere pagato *alla fine dell'anno in cui è avvenuto il decesso*. La differenza può essere finanziariamente significativa se i tassi di interesse sono elevati; il valore attuariale nel primo caso è comunque sempre maggiore, se i tassi di interesse sono positivi.
Nel primo caso, il valore attuale è dato dalla variabile casuale continua

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } T_x > n \\ C v^{T_x} & \text{se } T_x \leq n \end{cases},$$

dove T_x indica la vita residua completa in un individuo di età x.

Temporanea caso morte

Il valore attuariale è dato da

$$V = \mathbb{E}[Y_n] = C \int_0^n v^t \cdot f_x(t)\, dt = C \cdot {}_{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}},$$

dove $f_x(t)$ rappresenta la funzione di densità della variabile casuale T_x e dove abbiamo introdotto la notazione attuale internazionale standard

$${}_{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}} := \int_0^n v^t \cdot f_x(t)\, dt = \int_0^n v^t \cdot S_x(t) \cdot \mu_{x+t}\, dt,$$

dove come al solito S_x rappresenta la funzione di sopravvivenza condizionata e μ la forza di mortalità.
La quantità ${}_{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ rappresenta quindi il valore attuariale di 1 Euro pagato all'individuo di età x al momento del decesso, se avviene entro n anni.

Temporanea caso morte

Nel secondo caso, il valore attuale è dato dalla variabile casuale discreta

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } T_x > n \\ Cv^{K_x+1} & \text{se } T_x \leq n \end{cases}$$

dove K_x rappresenta la durata di vita incompleta.
Per capire perché, immaginiamo un individuo di età x che al 1 gennaio 2020 stipula una polizza temporanea caso morte che prevede pagamenti al 1 gennaio dell'anno immediatamente successivo a quello del decesso.
Il pagamento avviene al 1 gennaio 2021 se e solo se il decesso avviene nel 2020, cioè se e solo se $K_x = 0$; il pagamento avviene quindi dopo $K_x + 1$ anni, e il corrispondente fattore di attualizzazione è v^{K_x+1}.

Temporanea caso morte

Possiamo scrivere esplicitamente

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } {}_{\mathbf{n}}\mathbf{p_x} \\ Cv & \text{con prob. } {}_{\mathbf{0|1}}\mathbf{q_x} \text{ (che è pari a } \mathbf{q_x}) \\ Cv^2 & \text{con prob. } {}_{\mathbf{1|1}}\mathbf{q_x} \\ \dots & \\ Cv^n & \text{con prob.} {}_{\mathbf{n-1|1}}\mathbf{q_x} \end{cases}$$

Il valore attuariale è quindi pari a

$$V = \mathbb{E}[Y_n] = C \sum_{k=1}^{n} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q_x} \cdot v^k = C \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{A_x},$$

dove introduciamo la notazione attuariale standard

$${}_{\mathbf{n}}\mathbf{A_x} := \sum_{k=1}^{n} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q_x} \cdot v^k.$$

Esempio

Come esempio, determiniamo il valore attuariale del pagamento di 100000 Euro al termine dell'anno in cui si verifica il decesso di un maschio 45enne, purché questo avvenga entro dieci anni. Calcoliamo innanzitutto le probabilità di morte differite ${}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q_{45}}$, $k = 1, \dots, n$. Utilizzando la tavola ISTAT maschi 2013, abbiamo

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0|1}}\mathbf{q_{45}} &= \frac{\ell(45) - \ell(46)}{\ell(45)} = \frac{97521 - 97362}{97521} = 0,163\% \\
{}_{\mathbf{1|1}}\mathbf{q_{45}} &= \frac{\ell(46) - \ell(47)}{\ell(45)} = \frac{97362 - 97184}{97521} = 0,182\% \\
{}_{\mathbf{2|1}}\mathbf{q_{45}} &= \frac{\ell(47) - \ell(48)}{\ell(45)} = \frac{97184 - 96990}{97521} = 0,199\% \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Riportiamo i risultati nella tabella della pagina successiva, insieme ai corrispondenti fattori di attualizzazione.

Esempio

anno	p. morte diff.	fatt. att.	prodotto
1	0.0016304	0.95238	0.0015528
2	0.0018252	0.90703	0.0016556
3	0.0019893	0.86384	0.0017184
4	0.0021739	0.8227	0.0017885
5	0.0023892	0.78353	0.001872
6	0.0026558	0.74622	0.0019818
7	0.0029327	0.71068	0.0020842
8	0.0032198	0.67684	0.0021793
9	0.0035377	0.64461	0.0022804
10	0.0038761	0.61391	0.0023796
			0.01949

Esempio

Otteniamo quindi

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} &= \sum_{k=1}^{n} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} \cdot v^k = 0,01949, \\
V &= C \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = 100000 \times 0,01949 = 1949 \text{ Euro.}
\end{aligned}
$$

Osserviamo che quando $i = 0$ si ha $v = 1$, quindi se $i = 0$ si ha

$$
{}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{n} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} \cdot v^k = \sum_{k=1}^{n} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} = {}_{\mathbf{n}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}}.
$$

Nel caso $i > 0$ per effetto della attualizzazione si ha sempre

$$
{}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} < {}_{\mathbf{n}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}}.
$$

Polizze miste

In una polizza mista sono previste due prestazioni: una prestazione caso morte C^m se il decesso avviene nei primi n anni, pagata alla fine dell'anno del decesso, e una prestazione caso vita C^v se il decesso non avviene, pagata alla fine dell'anno n. In pratica molto spesso $C^v = C^m$.
Il valore attuariale gode della stessa proprietà di additività che ha il valore attuale della matematica finanziaria tradizionale: il valore attuariale della somma di due prestazioni è la somma dei loro valori attuariali.
Ne segue che per una polizza mista si ha semplicemente

$$V = C^m \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} + C^v \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}}.$$

Esempio

Consideriamo una donna di 25 anni che voglia garantirsi un capitale di 100000 Euro a 60 anni, oppure una prestazione di 100000 Euro in caso di morte. Usando le tavole di mortalità, otteniamo innanzitutto che la probabilità di sopravvivenza è data da

$$\mathbf{{}_{35}p_{25}} = \frac{\ell(60)}{\ell(25)} \simeq 96,15\%$$

Pertanto

$$\mathbf{{}_{n}E_{x}} = 0,9615 \cdot (1,05)^{-35} = 0,1743$$

da cui il valore attuale attuariale della prestazione caso vita

$$V = 100000 \times 0,1743 = 17430 \text{ Euro.}$$

Esempio

Per quanto riguarda la prestazione caso morte, con calcoliamo

$$ {}_{35}\mathbf{A}_{25} = 0,01178 $$

da cui il valore attuale attuariale

$$ V = 100000 \times 0,01178 = 1178 \text{ Euro} $$

Il valore attuale attuariale complessivo è pertanto dato da

$$ V = 17430 + 1178 = 18608 \text{ Euro.} $$

E' interessante osservare come nonostante la lunghezza della copertura (35 anni), la componente nettamente predominante nel valore attuariale complessivo sia quella legata alla prestazione caso vita.

Esempio

Ripetiamo il calcolo nel caso di un maschio 45enne che voglia stipulare una polizza mista con $n = 25$, $C^m = C^v = 100000$ Euro. Se $i = 5\%$, si ha

$$
\begin{aligned}
{}_{25}\mathbf{p}_{45} &= 0,8436 \\
{}_{25}\mathbf{q}_{45} &= 0,1564 \\
{}_{25}\mathbf{E}_{45} &= 0,8436 \times (1,05)^{-25} = 0,2491 \\
{}_{25}\mathbf{A}_{45} &= 0,0706
\end{aligned}
$$

da cui otteniamo

$$V = 100000 \times 0,2491 + 100000 \times 0,0706 = 31970 \text{ Euro.}$$

In questo caso il peso del valore attuariale della componente caso morte è più consistente.

Temporanea caso morte con capitale assicurato variabile

Molto spesso a chi accende un mutuo viene richiesta una polizza vita che copra il rischio di morte prematura. In questo caso, la prestazione pagata caso morte corrisponde al debito residuo, che consente la estinzione del mutuo. Vediamo un esempio con debito iniziale $C = 100000$ Euro, rate costanti (ammortamento francese) e tasso passivo $j = 7\%$, in 10 rate annuali, contratto da un maschio di età $x = 45$ anni.
Come noto dalla matematica finanziaria, la rata nell'ammortamento francese è data da

$$R = \frac{C}{a_{n,j}} = \frac{100000}{\frac{1-v^n}{j}} = \frac{100000}{7,023} \simeq 14238 \text{ Euro.}$$

Riportiamo il piano di ammortamento nella slide successiva.

Piano di ammortamento

anno	R	C_k	I_k	D_k
0	-	-	-	100000
1	14238	7238	7000	92762
2	14238	7745	6493	85017
3	14238	8287	5951	76731
4	14238	8867	5371	67864
5	14238	9488	4750	58376
6	14238	10152	4086	48224
7	14238	10862	3376	37362
8	14238	11623	2615	25740
9	14238	12436	1802	13303
10	14238	13307	931	-3

Temporanea caso morte con capitale assicurato variabile

La prestazione corrisponde quindi al pagamento del debito residuo D_{k-1} al termine dell'anno k, se il decesso avviene nel periodo $(k-1, k]$.
Il valore attuariale è dato da

$$V = \sum_{k=1}^{n} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q_x} \cdot v^k \cdot D_{k-1},$$

quindi non possiamo più utilizzare ${}_{\mathbf{n}}\mathbf{A_x}$ in quanto D_{k-1} non è più costante.
Utilizzando Excel, come vedremo a lezione si ottiene

$$V \simeq 1107 \text{ Euro.}$$

Copertura a vita intera

La cosiddetta copertura *a vita intera* è una prestazione che prevede un pagamento di un capitale C al beneficiario della polizza in caso di morte dell'assicurato, in qualsiasi momento questa si verifichi. Da un punto di vista matematico, possiamo vederla semplicemente come il limite di una polizza temporanea caso morte quando $n \to +\infty$. Anche in questo caso, è utile distinguere tra pagamento della prestazione nel momento del decesso (caso continuo) e pagamento della prestazione alla fine dell'anno del decesso (caso discreto). I corrispondenti valori attuariali relativi a un importo unitario sono indicati con le notazioni attuariali standard:

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}} = \lim_{n \to +\infty} {}_{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}} = \int_0^{+\infty} v^t \cdot S_x(t) \cdot \mu_{x+t}\, dt,$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = \lim_{n \to +\infty} {}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{\omega} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} \cdot v^k.$$

Verifichiamo che se $i = 0$ si ha $\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\mathbf{x}} = 1$.

Esempi

Vediamo ora come esempio il calcolo del valore attuariale di una copertura a vita intera per un maschio 20enne con $C = 100000$ Euro e pagamento alla fine dell'anno (caso discreto). Utilizzando la tavola di mortalità ISTAT 2013 che prevede massima età raggiungibile $\omega = 110$ anni e ponendo $i = 5\%$, con Excel troviamo

$$\mathbf{A_x} \simeq 0.06618,$$

da cui

$$V = 100000 \times 0.05058 = 6618 \text{ Euro}.$$

Formule ricorsive

Come vedremo in molti esempi, i valori attuariali possono essere spesso calcolati in modo ricorsivo. Come primo esempio, consideriamo il caso di $\mathbf{A_x}$. Partiamo dalla massima età raggiungibile ω. Dato che all'età $\omega - 1$ la morte entro l'anno è certa, si ha che $\mathbf{A_{\omega-1}} = v$. In generale, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_x} &= \sum_{k=1}^{\omega} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q_x} \cdot v^k = \sum_{k=1}^{\omega} {}_{\mathbf{k-1}}\mathbf{p_x} \cdot \mathbf{q_{x+k-1}} \cdot v^k = \\
&= v \cdot \mathbf{q_x} + v^2 \cdot \mathbf{p_x} \cdot \mathbf{q_{x+1}} + v^3 \cdot {}_{\mathbf{2}}\mathbf{p_x} \cdot \mathbf{q_{x+2}} + \dots,
\end{aligned}$$

e ricordando che ${}_{\mathbf{n}}\mathbf{p_x} = \mathbf{p_x} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{p_{x+1}}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_x} &= v \cdot \mathbf{q_x} + v^2 \cdot \mathbf{p_x} \cdot \mathbf{q_{x+1}} + v^3 \cdot {}_{\mathbf{2}}\mathbf{p_x} \cdot \mathbf{q_{x+2}} + \dots = \\
&= v \cdot \mathbf{q_x} + v \cdot \mathbf{p_x} \cdot \left\{ v \cdot \mathbf{q_{x+1}} + v^2 \cdot \mathbf{p_{x+1}} \cdot \mathbf{q_{x+2}} + \dots \right\} = \\
&= v \cdot \mathbf{q_x} + v \cdot \mathbf{p_x} \cdot \mathbf{A_{x+1}},
\end{aligned}$$

Formule ricorsive

da cui segue la relazione ricorsiva

$$\mathbf{A_x} = v \cdot \mathbf{q_x} + v \cdot \mathbf{p_x} \cdot \mathbf{A_{x+1}}$$

la cui interpretazione attuariale è in realtà molto semplice: l'individuo di età x ha due possibilità: o muore entro l'anno (con probabilità $\mathbf{q_x}$) oppure sopravvive (con probabilità $\mathbf{p_x}$). Nel primo caso, percepisce una prestazione unitaria il cui valore attuale è pari a v; nel secondo caso, diventa un individuo di età $x+1$ che ha diritto a una prestazione di copertura a vita intera il cui valore attuariale è pari a $\mathbf{A_{x+1}}$. Facendo la media sui due casi, si ottiene la formula scritta sopra per $\mathbf{A_x}$. Formule ricorsive di questo tipo possono essere facilmente implementate in Excel e consentono di calcolare i valori attuariali in modo molto rapido.

Rendite vitalizie

Ricordiamo dalla matematica finanziaria le formule per il valore attuale di una rendita certa unitaria immediata di n rate, rispettivamente nei casi posticipato e anticipato, con le relative notazioni attuariali:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$
$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i) \cdot a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d},$$

dove i è il tasso di interesse annuo e $d = i/(1+i)$ è il corrispondente tasso di sconto annuo. Nel caso delle rendite certe perpetue, i valori attuali si ottengono come limite per $n \to +\infty$ delle formule precedenti:

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$
$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1+i}{i}.$$

Rendite vitalizie

Nella matematica attuariale, una rendita *vitalizia* è composta da rate che vengono pagate soltanto a condizione che l'assicurato sia ancora in vita. Si distingue tra rendite vitalizie *temporanee*, che sono pagate solo fino a una scadenza fissata, e rendite vitalizie *perpetue*, a volte dette semplicemente vitalizi, che sono pagate fino alla morte del beneficiario. Il valore attuariale di una rendita vitalizia può essere calcolato come valore atteso del valore attuale, o equivalentemente come somma dei valori attesi delle rate moltiplicate per la probabilità con la quale vengono percepite.

Esempio

Consideriamo una rendita vitalizia posticipata temporanea composta da 3 rate annue di importo pari a 1000 Euro pagata a un beneficiario di 45 anni, valutata al tasso annuo i. Il suo valore attuariale può essere calcolato come

$$V_p = \frac{1000}{1+i} \cdot {}_1\mathbf{p}_{45} + \frac{1000}{(1+i)^2} \cdot {}_2\mathbf{p}_{45} + \frac{1000}{(1+i)^3} \cdot {}_3\mathbf{p}_{45}.$$

Nel caso anticipato si ha

$$V_a = 1000 + \frac{1000}{1+i} \cdot {}_1\mathbf{p}_{45} + \frac{1000}{(1+i)^2} \cdot {}_2\mathbf{p}_{45}.$$

Notate che nel caso anticipato la prima rata è pagata con certezza, in quanto il beneficiario è sicuramente vivo al tempo iniziale. Il valore attuariale della rendita anticipata è sempre maggiore di quello della rendita posticipata e

$$V_a - V_p = 1000 - \frac{1000}{(1+i)^3} \cdot {}_3\mathbf{p}_{45}.$$

Più in generale, il valore attuariale di una rendita vitalizia temporanea composta al più da n rate annue di importo unitario pagate a un beneficiario di età x valutato al tasso annuo i è pari a

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{n}}\mathbf{a}_{\mathbf{x}} &:= \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_{\mathbf{k}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{n} {}_{\mathbf{k}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} \text{ (nel caso posticipato)} \\
{}_{\mathbf{n}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} &:= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_{\mathbf{k}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{\mathbf{k}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} \text{ (nel caso anticipato)}
\end{aligned}
$$

e la relazione tra queste quantità è

$$
{}_{\mathbf{n}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} - {}_{\mathbf{n}}\mathbf{a}_{\mathbf{x}} = 1 - v^n \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}},
$$

che è sempre una quantità positiva.

Rendite vitalizie

Nel caso di rendite vitalizie perpetue, ricordando che ω è la età massima raggiungibile, si ha che il beneficiario può vivere ancora $\omega - x$ anni, da cui ponendo $n = \omega - x$ nelle formule della slide precedente si ottiene

$$\mathbf{a_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \cdot {}_{\mathbf{k}}\mathbf{p_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_{\mathbf{k}}\mathbf{E_x} \text{ (nel caso posticipato)}$$

$$\mathbf{\ddot{a}_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \cdot {}_{\mathbf{k}}\mathbf{p_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{\mathbf{k}}\mathbf{E_x} \text{ (nel caso anticipato),}$$

e la relazione tra queste quantità è semplicemente

$$\mathbf{\ddot{a}_x} - \mathbf{a_x} = 1 - v^n \cdot {}_{\omega-\mathbf{x}}\mathbf{p_x} = 1,$$

in quanto

$${}_{\omega-\mathbf{x}}\mathbf{p_x} = 0.$$

Rendite vitalizie perpetue e coperture a vita intera

Una rendita vitalizia perpetua può anche essere vista come una rendita in cui il numero delle rate è aleatorio. Consideriamo il caso anticipato. Il numero di rate pagate è pari a $K_x + 1$, dove K_x rappresenta la vita residua incompleta. Il valore attuale è quindi dato dalla variabile casuale

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \frac{1 - v^{K_x+1}}{d},$$

e il suo valore attuariale è pari a

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{1 - v^{K_x+1}}{d}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[v^{K_x+1}\right]}{d}.$$

Dato che come abbiamo visto

$$\mathbb{E}\left[v^{K_x+1}\right] = \mathbf{A}_{\mathbf{x}},$$

otteniamo la formula

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} = \frac{1 - \mathbf{A}_{\mathbf{x}}}{d}.$$

Rendite vitalizie perpetue e coperture a vita intera

In modo analogo, consideriamo ora il caso posticipato. Il numero di rate pagate è pari a K_x, il valore attuale è dato dalla variabile casuale

$$Y = a_{\overline{K_x}|} = \frac{1 - v^{K_x}}{i},$$

il valore attuariale è pari a

$$\mathbf{a_x} = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\frac{1 - v^{K_x}}{i}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[v^{K_x}\right]}{i} = \frac{1 - (1+i)\mathbf{A_x}}{i},$$

e ricordando che $d = i/(1+i)$ possiamo verificare che

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}}_\mathbf{x} - \mathbf{a_x} &= \frac{1 - \mathbf{A_x}}{d} - \frac{1 - (1+i)\mathbf{A_x}}{i} = \\ &= \frac{1 + i - (1+i)\mathbf{A_x}}{i} - \frac{1 - (1+i)\mathbf{A_x}}{i} = 1. \end{aligned}$$

Esempio

Consideriamo una rendita vitalizia perpetua annua anticipata di importo $C = 1000$ Euro, percepita da un maschio 20enne, valutata al tasso $i = 5\%$. Se fosse una rendita perpetua certa anticipata, si avrebbe

$$V = \frac{1+i}{i} = 21000 \text{ Euro.}$$

Il tasso di sconto annuo è pari a

$$d = \frac{i}{1+i} \simeq 4,76\%$$

e il valore attuariale è dato da

$$V = C \cdot \ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} = C \cdot \frac{1 - \mathbf{A}_{\mathbf{x}}}{d} = 1000 \cdot \frac{1 - 0,06618}{0,0476} = 19618 \text{ Euro.}$$

Esempio

Calcoliamo ora il valore attuariale di un vitalizio di 5000 Euro mensili posticipati pagati a un uomo di 75 anni. La tavola di mortalità ci fornisce informazioni soltanto relative ad anni interi; per calcolare la probabilità di vita sulle scadenze mensili è necessario ricorrere ad ipotesi aggiuntive, la più semplice prende il nome di *distribuzione uniforme delle morti*:

$$ {}_{\mathbf{s}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} = s \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x}}, \text{ se } s \in (0, 1). $$

Utilizzando Excel per la interpolazione mensile della tavola di mortalità ed utilizzando il tasso mensile equivalente al 5% annuo

$$ i_{12} = (1 + 0,05)^{1/12} - 1, $$

si ottiene

$$ \mathbf{a}_{\mathbf{x}} \simeq 97,045 $$

da cui

$$ V = 5000 \times 97,045 \simeq 485225 \text{ Euro.} $$

Esempio

Il gioco "win-for-life" prometteva una rendita mensile temporanea posticipata di 3000 Euro al mese per 20 anni. Secondo il sito winforlife.it, la probabilità di questa vincita è pari a 1 su 3.695.120. Quanto sarebbe disposto a pagare un biglietto (che nella realtà costa 1 Euro) un uomo neutrale al rischio di età 45 anni? Utilizzando Excel, con un calcolo simile a quello dell'esempio precedente, otteniamo che

$$_{20}\mathbf{a}_{45} \simeq 148,57$$

Il valore attuale attuariale è dato da

$$3000 \times 148,57 = 445736 \text{ Euro}.$$

Il valore medio della vincita è semplicemente

$$445736 \text{ Euro} \times \frac{1}{3.695.120} \simeq 0,1206 \text{ Euro}.$$