Valore Atteso del ricavo e sua varianza in aste a primo e secondo prezzo

Attenzione: corregge errore di trascrizione dei risultati ottenuti con la funzione generatrice dei momenti presente nella lez. 4. Mi scuso per la distrazione.

Asta per la vendita di un oggetto con valutazioni IPV. Bidders neutrali al rischio. Supponendo che *v* segua una distribuzione uniforme tra 0 e 1 e ponendo N = 5 il bid ottimo è

$$b(v_i) = \frac{4}{5} v_i$$

$$b(v_i) = v_i$$

rispettivamente nell'asta al primo e al secondo prezzo.

Mostrare che a) il ricavo atteso dal banditore è identico nelle due forme d'asta (c.d. Equivalenza del Ricavo Atteso); b) che la varianza del ricavo è maggiore nel caso di asta al secondo prezzo. Usare la funzione generatrice dei momenti e le sue proprietà.

<u>Asta al primo prezzo</u>

Funzione generatrice dei momenti

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 \mathrm{e}^{tb(v_i)}\, 5v_i^4 dv_i$$

Dove $5v_i^4$è la pdf dell'*highest* Order Statistics di *v* dati N = 5 bidders. Allora, per l'asta al primo prezzo

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 \mathrm{e}^{t(\frac{4v_i}{5})}\, 5v_i^4 dv_i$$

$$= \mathrm{e}^{(\frac{4t}{5})}\left[\frac{46875}{128t^5} - \frac{9375}{32t^4} + \frac{1875}{16t^3} + \frac{25}{4t}\right] - \frac{46875}{128t^5}$$

La sua derivata prima, con *t* = 0, dà il primo momento semplice (media); ovvero il valore atteso del ricavo del banditore. Quindi

$$g' = \frac{\partial G(b(v_i))}{\partial t} = \frac{234375}{128t^6} - \frac{234375e^{4t/5}}{128t^6} + \frac{46875e^{4t/5}}{32t^5} - \frac{9375e^{4t/5}}{16t^4} + \frac{625e^{4t/5}}{4t^3} - \frac{125e^{4t/5}}{4t^2} + \frac{5e^{4t/5}}{t}$$

Per cui

$$\lim_{t \to 0} g' = \frac{2}{3} = 0.66667$$

Al contempo la derivata seconda, valutata con *t* = 0, dà il momento secondo semplice del ricavo del banditore nell'asta al primo prezzo. Quindi

$$g'' = \frac{\partial^2 G(b(v_i))}{\partial t^2} = \frac{703125}{64t^7} + \frac{703125e^{4t/5}}{64t^7} - \frac{140625e^{4t/5}}{16t^6} + \frac{28125e^{4t/5}}{8t^5} - \frac{1875e^{4t/5}}{2t^4} + \frac{375e^{4t/5}}{2t^3} - \frac{30e^{4t/5}}{t^2} + \frac{4e^{4t/5}}{t}$$

Per cui

$$\lim_{t \to 0} g'' = \frac{16}{15} = 0.457142$$

Usando la formula della varianza ovvero

$$VAR[R] = E[R^2] - (E]R])^2$$

Otteniamo

$$VAR[R^{FP}] = 0.457142 - (0.66667)^2 = 0.0127$$

<u>Asta al secondo prezzo</u>

Funzione generatrice dei momenti

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 \mathrm{e}^{tv_i} \, 20 * v_i^3 (1 - v_i) dv_i$$

Dove $20 * v_i^3(1 - v_i)$ è la pdf del *second highest* Order Statitics (la penultima in ordine crescente) di v con 5 bidders. Allora

$$G(b(v_i)) = \frac{20(6(4+t) + e^t(-24 + 18t - 6t^2 + t^3))}{t^5}$$

La sua derivata prima, con $t = 0$, dà il primo momento semplice (media); ovvero il valore atteso del ricavo del banditore. Quindi

$$g' = \frac{\partial G(b(v_i))}{\partial t} = -\frac{100(6(4+t) + e^t(-24 + 18t - 6t^2 + t^3))}{t^6} + \frac{20(6 + e^t(18 - 12t + 3t^2) + e^t(-24 + 18t - 6t^2 + t^3))}{t^5}$$

Per cui

$$\lim_{t \to 0} g' = \frac{2}{3} = 0.66667$$

Al contempo la derivata seconda, valutata con $t = 0$, dà il momento secondo semplice (varianza) del ricavo del banditore nell'asta al secondo prezzo. Quindi

$$g'' = \frac{\partial^2 G(b(v_i))}{\partial t^2}$$
$$= \frac{600(6(4+t) + e^t(-24 + 18t - 6t^2 + t^3))}{t^7}$$
$$- \frac{200(6 + e^t(18 - 12t + 3t^2) + e^t(-24 + 18t - 6t^2 + t^3))}{t^6}$$
$$+ \frac{20(e^t(-12 + 6t) + 2e^t(18 - 12t + 3t^2) + e^t(-24 + 18t - 6t^2 + t^3))}{t^5}$$

Per cui

$$\lim_{t \to 0} g'' = \frac{10}{21} = 0.47619$$

Usando il risultato di g'' troviamo la varianza come segue

$$VAR[R^{SP}] = 0.47619 - (0.66667)^2 = 0.0317$$

In sintesi, date le ipotesi:

$$\mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}] = \mathbb{E}[R^{Secondo\ \ Prezzo}] = \ 0.66667$$

mentre

$$VAR[R^{Primo\ Prezzo}] = 0.0127 < VAR[R^{Secondo\ \ Prezzo}] = 0.0317$$

Il valor atteso dell'introito è uguale nelle due forme d'asta ma un banditore avverso al rischio dovrebbe preferire l'asta al primo prezzo in cui la varianza del suo introito è minore rispetto a quella generata dall'asta a secondo prezzo.

ES2

Asta per la vendita di un oggetto con valutazioni IPV. Bidders neutrali al rischio. Supponendo che *v* segua una distribuzione esponenziale non negativa tra 0 e 1 avente per $s \geq 0$

$$f(v) = sv^{s-1}$$
$$F(v) = \int_0^v s\tilde{v}^{s-1} d\tilde{v} = v^s$$

Domande:

a) Ricavare il ricavo atteso del banditore con N = 5 ed *s* = 0.5.

Dato il risultato precedente non è necessario ricavare la funzione ottima di bid dell'asta al primo prezzo. Possiamo usare il Teorema dell'Equivalenza del Ricavo Atteso. La funzione generatrice dei momenti è

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 \mathrm{e}^{tv_i}[N(N-1)(v^s)^{N-2}(1 - v^s)sv^{s-1}]dv_i$$

dove $[N(N-1)(v^s)^{N-2}(1 - v^s)sv^{s-1}]$ è la pdf del second highest OS di *v*. Allora, usando i dati

$$G(b(v_i)) = 10 \int_0^1 \mathrm{e}^{tv_i} \left[v_i - v_i^{\frac{3}{2}}\right] dv_i$$

Ripetendo la procedura precedente otteniamo

$$\mathbb{E}[R^{Secondo\ Prezzo}] = 0.47619 = \mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}]$$

b) Ricavare la varianza del ricavo del banditore

$$VAR[R^{Secondo\ Prezzo}\} = 0.278 - 0.476^2 = 0.0514$$

Dove 0.278 è ricavato dalla derivata seconda di $G(b(v_i))$ valutata con t = 0. Per la varianza dell'asta al primo prezzo occorre definire la funzione generatrice dei momenti per il bid dell'asta al primo prezzo (bid primo prezzo pdf della più altra statistica ordinata). Farlo per esercizio (vedi punto c).

c) Utilizzando l'espressione generale del bid ottimo al primo prezzo,

$$b(v_i) = v_i - \frac{\int_0^{v_i}[F(w)]^{N-1}dw}{F(v_i)^{N-1}}$$

dimostrare che con le nostre ipotesi esso è

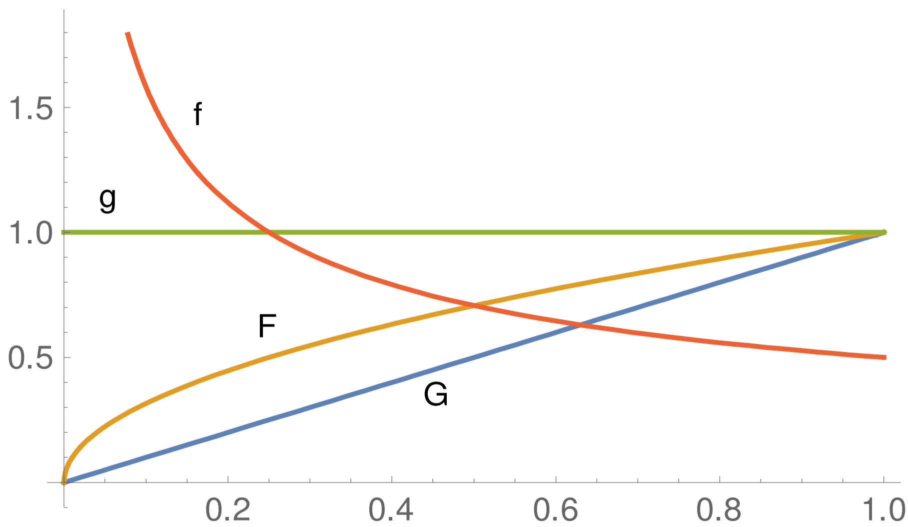
$$b(v_i) = \frac{2}{3}v_i$$

e che la sua varianza è minore di quella ricavata per l'asta al secondo prezzo (vedi punto b) mentre il suo valore atteso è uguale nelle due aste.

La differenza rispetto al bid con distribuzione uniforme tra 0 e 1 che è pari a

$$b(v_i) = \frac{N-1}{N}v_i$$

può essere interpretata attraverso la differenza delle CDF e pdf (g e G per la Uniforme tra 0 e 1; f ed F per l'esponenziale non negativa) di cui al grafico?



ES3

Mostrare che con distribuzione uniforme delle valutazioni il *bid* ottimo è sempre

$$b(v_i) = \frac{N-1}{N}v_i$$

indipendentemente dal supporto della distribuzione se questa parte da 0. Mostrare che con distribuzioni uniformi tra $a > 0$ e $b > a$, il *bid* è dato da $\frac{N-1}{N}v_i$ più una componente positiva che varia inversamente rispetto al numero dei partecipanti dato a.

Supponendo che la uniforme di cui sopra sia tra 0 e 10 ricavare che nell’asta al primo e al secondo prezzo

$$\mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}] = \mathbb{E}[R^{Secondo\ \ Prezzo}] = \ 8.18182$$

Calcolare il valore delle due varianze del ricavo e commentare.