

# Esercizi di Automatica

Pasquale Palumbo

November 5, 2021

## 1 Diagrammi di Bode

### 1.1 Esercizio 1

Disegnare i diagrammi di Bode delle seguenti funzioni di trasferimento:

$$W_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+25)}, \quad W_2(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2-25)}.$$

La prima funzione di trasferimento  $W_1(s)$  contiene al denominatore un termine binomio ed un termine trinomio:  $s-1$  e  $s^2+25$ , rispettivamente. Quest'ultimo, in particolare, ha uno smorzamento nullo, infatti le sue radici  $s_{1/2} = \pm j5$  sono puramente immaginarie. Al contrario, tutti i fattori al denominatore della seconda funzione di trasferimento  $W_2(s)$  sono scomponibili nel prodotto di termini binomi, infatti il termine  $s^2-25$  ammette una coppia di radici reali  $s_{1/2} = \pm 5$ . Riscrivendo le due funzioni di trasferimento in forma canonica:

$$W_1(s) = \frac{K_1}{(1-\tau_1 s) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}, \quad \begin{matrix} \tau_1 = 1 & \implies & \omega_{t_1} = 1, \\ \omega_n = 5, \end{matrix}$$

con  $K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} W_1(s) = -1/25$  e:

$$W_2(s) = \frac{K_2}{(1-\tau_1 s)(1-\tau_2 s)(1+\tau_2 s)}, \quad \begin{matrix} \tau_2 = 0.2 & \implies & \omega_{t_2} = 5, \end{matrix}$$

con  $K_2 = \lim_{s \rightarrow 0} W_2(s) = 1/25$ .

**Descrizione dei diagrammi asintotici.** La presenza del termine trinomio non smorzato al denominatore di  $W_1(s)$  determina un picco di risonanza nelle ampiezze in corrispondenza della pulsazione di risonanza (che, in questo caso, coincide con quella naturale  $\omega_n = 5$ ), per cui il diagramma asintotico perde di validità nell'intorno di  $\omega_n$ ; per le fasi, invece, il termine trinomio non smorzato determina uno sfasamento istantaneo di  $\pi$  in corrispondenza di  $\omega_n$ .

Al contrario, non ci sono termini trinomi in  $W_2(s)$ , infatti, i poli della funzione di trasferimento sono tutti reali, per cui i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle

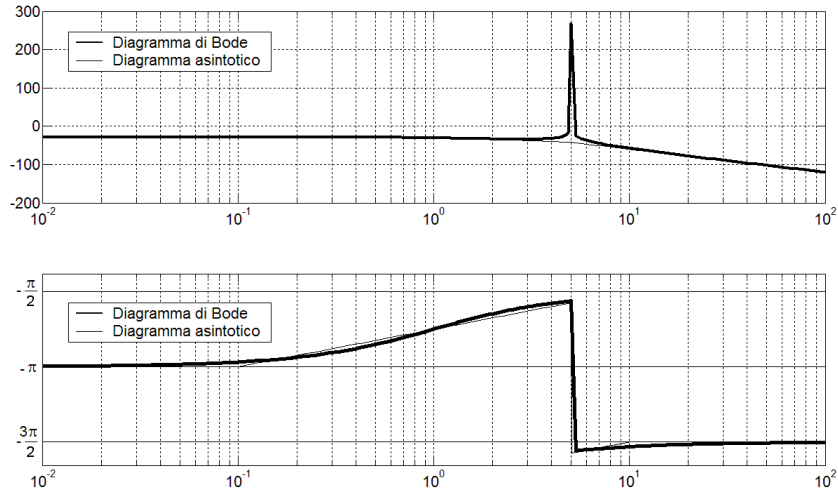


Figure 1: Diagrammi di Bode di  $W_1(s)$

fasi possono confondersi con quelli asintotici; inoltre, i contributi in fase di due dei tre termini al denominatore si elidono a vicenda, semplificando notevolmente il relativo diagramma delle fasi.

*Ampiezze, caso  $W_1(s)$ .* Poiché non ci sono termini monomi, l'amplificazione alle basse frequenze determina il riferimento delle ascisse ed è pari al guadagno di Bode  $|K_1|_{dB} \simeq -28dB$ . Il diagramma asintotico non si discosta dal guadagno di Bode per pulsazioni inferiori a  $\omega_{t_1} = 1rad/sec$ , pulsazione di taglio del termine binomio. Quindi, per valori della pulsazione  $\omega > \omega_{t_1}$ , il termine binomio al denominatore produce una pendenza di  $-20dB/dec$  fino a  $\omega_n = 5$ , pulsazione naturale del termine trinomio, oltre la quale il diagramma delle ampiezze assume la definitiva pendenza di  $-60dB/dec$ . Riassumendo quanto scritto riguardo alle pendenze del diagramma asintotico dei moduli:

$$\begin{array}{ll} \omega < 1, & 0dB/dec; \\ 1 \leq \omega < 5, & -20dB/dec; \\ \omega \geq 5, & -60dB/dec. \end{array}$$

*Fasi, caso  $W_1(s)$ .* Non ci sono termini monomi, ma il guadagno di Bode è negativo, per cui c'è uno sfasamento uniforme di  $-\pi$  radianti, valore a cui il diagramma asintotico rimane costante per pulsazioni inferiori a  $0.1\omega_{t_1} = 0.1$ , una decade prima della pulsazione di taglio del termine binomio al denominatore. Quindi, la curva assume la pendenza di  $(\pi/4)rad/dec$  (positiva perché, pur essendo il binomio al denominatore, c'è il segno meno davanti a  $\tau_1$ ), che viene mantenuta fino a una decade dopo la pulsazione di taglio, ossia fino a  $10\omega_{t_1} = 10rad/sec$ . A causa della presenza del termine trinomio non smorzato, la cui pulsazione naturale  $\omega_n = 5rad/sec$  cade all'interno dell'intervallo  $[0.1, 10]$ , le fasi relative a pulsazioni maggiori di quella naturale sono tutte sfasate di

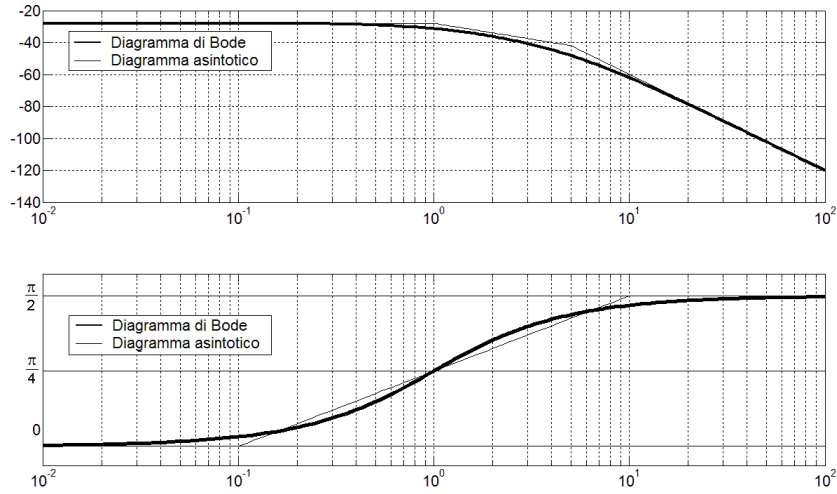


Figure 2: Diagrammi di Bode di  $W_2(s)$

$-\pi$ , producendo in corrispondenza della pulsazione naturale una discontinuità a gradino. Infine, per pulsazioni maggiori di  $10\omega_{t_1}$  le fasi si assestano al valore costante di  $-\frac{3}{2}\pi$ . Riassumendo l'andamento delle pendenze:

$$\begin{array}{ll} \omega < 0.1, & \text{rad/dec;} \\ 0.1 \leq \omega < 10, & (\pi/4)\text{rad/dec;} \\ \omega \geq 10, & 0 \quad \text{rad/dec.} \end{array}$$

*Ampiezze, caso  $W_2(s)$ .* Poiché non ci sono termini monomi, l'amplificazione alle basse frequenze determina il reiferimento delle ascisse ed è pari al guadagno di Bode  $|K_2|_{\text{dB}} \simeq -28\text{dB}$ . Il diagramma asintotico coincide con tale riferimento per pulsazioni inferiori alla più piccola delle pulsazioni di taglio dei tre termini binomi al denominatore, ossia  $\omega_{t_1} = 1\text{rad/sec}$ . Quindi, per valori della pulsazione superiori, il termine binomio produce una pendenza di  $-20\text{dB/dec}$  che persiste fino alla successiva pulsazione di taglio,  $\omega_{t_2} = 5$ , in corrispondenza della quale la pendenza si porta a  $-60\text{dB/dec}$ , in virtù del contributo simultaneo dei restanti due termini binomi. Riassumendo: il diagramma asintotico della  $W_2(s)$  coincide con quello della  $W_1(s)$  (questo aspetto non si coglie a pieno nelle figure 1 e 2, a causa della differente scala delle ordinate, necessaria per meglio apprezzare il contributo del termine trinomio in  $W_1(s)$ ). Ben diversi sono, al contrario, i diagrammi di Bode.

*Fasi, caso  $W_2(s)$ .* Non ci sono termini monomi e il guadagno di Bode è positivo, per cui non ci sono sfasamenti uniformi nelle pulsazioni e il diagramma asintotico assume un valore costante e nullo alle basse frequenze, da cui si scosta in corrispondenza della pulsazione 0.1 (una decade prima della più piccola tra le pulsazioni di taglio). Quindi mantiene la pendenza di  $(\pi/4)$  fino alla pulsazione di  $10\omega_{t_1} = 10$ . Come precedentemente scritto, i contributi in fase degli altri due

termini binomi al denominatore si elidono a vicenda. Infatti, le pulsazioni di taglio sono le stesse ( $\omega_{t_2} = 5$ ) ma uno dei due binomi ha il parametro  $\tau_2$  positivo, l'altro negativo. Si noti come questa reciproca elisione ha luogo in corrispondenza del solo diagramma di Bode delle fasi, e non in quello delle ampiezze. Oltre 10, le fasi si assestano al valore di  $\pi/2$ . Riassumendo: l'andamento delle pendenze nel diagramma asintotico delle fasi è lo stesso per entrambe le funzioni di trasferimento; questo non vuol dire che sono uguali anche i diagrammi asintotici: infatti, i due guadagni di Bode  $K_1$  e  $K_2$  hanno segno opposto, il che sfasa reciprocamente i due diagrammi uniformemente di  $\pi$  radianti per pulsazioni minori di quella naturale; per pulsazioni maggiori tale sfasamento è compensato da uno sfasamento uniforme di ulteriori  $\pi$  radianti.

## 1.2 Esercizio 2

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{10^6}{s(s+10)^2(s-400)^2}.$$

- i) Calcolare per quale pulsazione si ha un'attenuazione di 100dB;
- ii) calcolare per quali pulsazioni si ha uno sfasamento di  $-\pi$  radianti.

Riscrivendo in forma canonica i termini binomi:

$$(s+10)^2 = 100(1+\tau_1 s)^2, \quad (s-400)^2 = 16 \cdot 10^4(1-\tau_2 s)^2,$$

con

$$\tau_1 = 0.1, \quad \omega_{t_1} = 10 \quad \tau_2 = 2.5 \cdot 10^{-3} \quad \omega_{t_2} = 400,$$

la funzione di trasferimento diventa:

$$W(s) = \frac{K}{s(1+\tau_1 s)^2(1-\tau_2 s)^2},$$

con il guadagno di Bode  $K = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) = \frac{1}{16}$ .

**Descrizione dei diagrammi asintotici.** Non essendoci termini trinomi, i diagrammi di Bode possono confondersi, con buona approssimazione, con quelli asintotici.

*Ampiezze.* La presenza del termine monomio al denominatore determina la pendenza del diagramma delle ampiezze alle basse frequenze, che si confonde con l'andamento di una retta inclinata di -20dB/dec e passante per il punto di ascissa  $\omega = 1$  e ordinata  $|K|_{dB} \simeq -24.08dB$ . Tale pendenza resta tale fino alla più piccola pulsazione di taglio:  $\omega_{t_1} = 10$ . Per valori di  $\omega$  maggiori di  $\omega_{t_1}$ , si fa sentire il primo dei due termini binomi al denominatore, per cui la pendenza diminuisce di altri 40dB/dec, portandosi a -60dB/dec. Tale rimane fino alla maggiore delle pulsazioni di taglio,  $\omega_{t_2} = 400$ , oltre la quale la pendenza

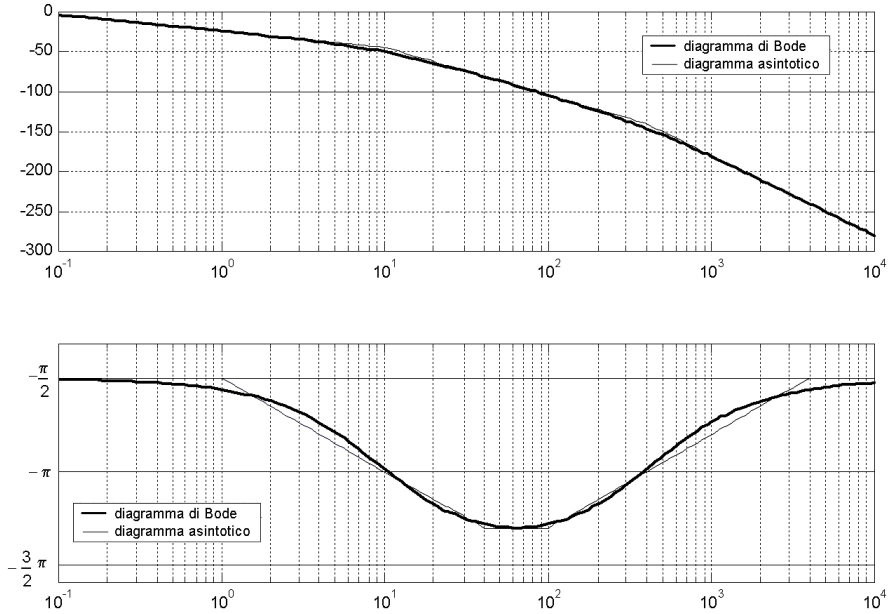


Figure 3: Diagrammi di Bode

diminuisce di altri 40dB/dec, portandosi a  $-100\text{dB/dec}$ . Riassumendo quanto scritto sulle pendenze del diagramma asintotico:

$$\begin{array}{ll}
 \omega < 10, & -20\text{dB/dec;} \\
 10 \leq \omega < 400, & -60\text{dB/dec;} \\
 \omega \geq 400, & -100\text{dB/dec.}
 \end{array}$$

*Fasi.* La presenza del termine monomio al denominatore trasla tutto il diagramma delle fasi di  $-\frac{\pi}{2}$  radianti, valore a cui rimane costante per frequenze inferiori a 1rad/sec, una decade prima di  $\omega_{t_1}$ , la minore delle pulsazioni di taglio. Quindi le fasi decrescono con una pendenza di  $-\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$  fino a pulsazioni inferiori a 40rad/sec, una decade prima di  $\omega_{t_2}$ , la maggiore delle pulsazioni di taglio, oltre la quale i contributi dei due termini binomi si bilanciano e le fasi si assestano a pendenza nulla nell'intervallo  $[40, 100]$ . Per pulsazioni maggiori di 100 (una decade dopo  $\omega_{t_1}$ ) il primo termine binomio cessa di influenzare la pendenza, per cui il diagramma sale di  $\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$  fino a  $\omega = 4000$  (una decade dopo  $\omega_{t_2}$ ), oltre cui le fasi tornano costanti al valore di  $-\frac{\pi}{2}$  radianti. Riassumendo quanto scritto sulle pendenze del diagramma asintotico:

$$\begin{array}{ll}
 \omega < 1, & 0\text{rad/dec;} \\
 1 \leq \omega < 40, & -(\pi/2); \\
 40 \leq \omega < 100, & 0; \\
 100 \leq \omega < 4000, & +(\pi/2); \\
 \omega \geq 4000, & 0
 \end{array}$$

i) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle ampiezze si nota che un'attenuazione di 100dB si ottiene per pulsazioni superiori a  $\omega_{t_1} = 10$  e inferiori a  $\omega_{t_2} = 400$ , per cui sono plausibili le seguenti semplificazioni:

$$|1 + j\tau_1\omega| \simeq |j\tau_1\omega| = \tau_1\omega, \quad |1 - j\tau_2\omega| \simeq 1.$$

**Analisi quantitativa:** attenuazione di 100dB significa:

$$|W(j\omega)|_{dB} = -100 \Rightarrow 20 \log |W(j\omega)| = -100 \Rightarrow |W(j\omega)| = 10^{-5},$$

da cui

$$|W(j\omega)| \simeq \frac{1}{16|j\omega| \cdot |j\tau_1\omega|^2} = 10^{-5} \implies \omega^3 = \frac{1}{16 \cdot 10^{-7}},$$

e quindi  $\omega = \bar{\omega} \simeq 85.50$ . Come verifica della validità delle approssimazioni assunte, si calcolano in  $\bar{\omega}$  gli errori commessi nell'approssimazione dei due termini binomi:

$$\left| (1 + j\tau_1\bar{\omega})^2 \right|_{dB} - \left| (j\tau_1\bar{\omega})^2 \right|_{dB} \simeq 20 \log(74.10) - 20 \log(73.10) \simeq 0.12dB,$$

$$\left| (1 + j\tau_2\bar{\omega})^2 \right|_{dB} \simeq 20 \log(1.05) \simeq 0.39dB,$$

per cui:

$$|W(j\bar{\omega})|_{dB} \simeq -100 + 0.12 - 0.39 \simeq -100.27dB,$$

ossia un errore inferiore allo 0.3%.

ii) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle fasi si nota che vi sono due attraversamenti a  $-\pi$  radianti. Anche in questo caso è possibile introdurre delle approssimazioni per semplificare i conti. Dai diagrammi in figura 3 segue che la minore delle pulsazioni a  $-\pi$  radianti cade ben prima che il binomio caratterizzato dalla pulsazione di taglio  $\omega_{t_2} = 400$  possa influenzare le fasi, per cui, in prossimità della pulsazione di primo attraversamento a  $-\pi$  radianti:

$$\angle(1 - j\tau_2\omega)^2 \simeq 0,$$

da cui

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) \simeq -\frac{\pi}{2} - 2\angle(1 + j\tau_1\omega) = -\pi &\Rightarrow \angle(1 + j\tau_1\omega) = \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \tau_1\omega = 1 &\Rightarrow \omega = \omega_1^* \simeq \omega_{t_1} = 10. \end{aligned}$$

Viceversa, la maggiore delle pulsazioni di attraversamento a  $-\pi$  si incontra per pulsazioni maggiori di una decade di  $\omega_{t_1}$ , per cui il termine binomio ad essa associato può immaginarsi stabilizzato a  $\pi$  radianti:

$$\angle(1 + j\tau_1\omega)^2 \simeq \pi,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) \simeq -\frac{\pi}{2} - \pi - 2\angle(1 - j\tau_2\omega) = -\pi &\Rightarrow \angle(1 - j\tau_2\omega) = -\frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \tau_2\omega = 1 &\Rightarrow \omega = \omega_2^* \simeq \omega_{t_2} = 400. \end{aligned}$$

**Analisi quantitativa:** per valutare la bontà delle approssimazioni assunte, si calcolano gli errori di approssimazione in corrispondenza delle pulsazioni di attraversamento a  $-\pi$  radianti:

$$\begin{aligned}\angle(1 - j\tau_2\omega_1^*)^2 &= 2\angle\left(1 - \frac{j}{40}\right) \simeq -5.00 \cdot 10^{-2}rad, \\ \angle(1 + j\tau_1\omega_2^*)^2 &= 2\angle(1 + j40) \simeq 3.09rad,\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\angle W(j\omega_1^*) &\simeq -\pi + 5.00 \cdot 10^{-2} \simeq -3.09rad, \\ \angle W(j\omega_2^*) &\simeq -\pi + (\pi - 3.09) \simeq -3.09rad.\end{aligned}$$

In entrambi i casi si commette un errore di valutazione di circa 0.05, inferiore ai 3 gradi.

## 2 Criterio di Nyquist

### 2.1 Esercizio 3

*Disegnare il diagramma polare della funzione di trasferimento definita nell'esercizio 2 e calcolare le intersezioni del diagramma con il semiasse reale negativo.*

La funzione di trasferimento ha un polo nell'origine, per cui il diagramma polare non è una curva chiusa. Per valori di  $\omega \mapsto 0^+$ , l'ampiezza è infinita e la fase è  $-\frac{\pi}{2}$ : il diagramma polare parte tangendo all'infinito il semiasse immaginario negativo. Quindi, con un decrescente andamento dei moduli, si sposta dal terzo al secondo quadrante del piano complesso, tagliando il semiasse reale negativo in  $\omega_1^* \simeq \omega_{t_1} = 10$ , come precedentemente calcolato nell'esercizio 2. Nel secondo quadrante la fase continua a decrescere fino a un valore minimo, maggiore comunque di  $-\frac{3}{2}\pi$ . Quindi inverte il proprio andamento, aumentando fino a tagliare nuovamente il semiasse reale negativo per  $\omega_2^* \simeq \omega_{t_2} = 400$ , proseguendo, di nuovo nel terzo quadrante, verso l'origine degli assi, tangendo asintoticamente il semiasse immaginario negativo per  $\omega \mapsto +\infty$ , figura 4.

Il diagramma si completa aggiungendo il percorso parametrizzato dalle pulsazioni negative (figura 5). La presenza di un polo nell'origine determina un diagramma polare non chiuso. Per ottenere un diagramma chiuso, si effettua la chiusura all'infinito della curva in senso orario, raccordando il punto a pulsazione  $\omega = 0^-$  con quello a pulsazione  $\omega = 0^+$  utilizzando un arco con raggio di curvatura grande a piacere, figura 6.

Le intersezioni con il semiasse reale negativo (i punti  $P_1$  e  $P_2$ ), si ottengono con buona approssimazione in corrispondenza delle due pulsazioni di taglio  $\omega_{t_1}$  e  $\omega_{t_2}$ , come calcolato nell'esercizio 2:

$$|W(j\omega_{t_i})| = \frac{1}{16|j\omega_{t_i}| \cdot |1 + j\tau_1\omega_{t_i}|^2 \cdot |1 - j\tau_2\omega_{t_i}|^2},$$

da cui:

$$|W(j\omega_{t_1})| \simeq 3.12 \cdot 10^{-3}, \quad |W(j\omega_{t_2})| \simeq 4.88 \cdot 10^{-8},$$

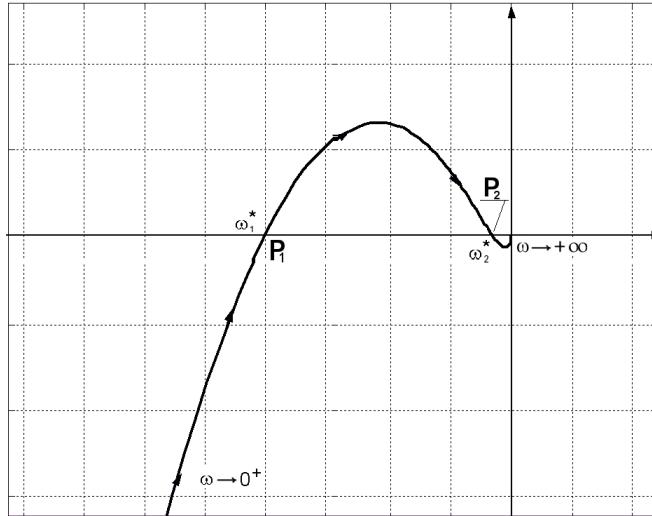


Figure 4: Diagramma polare: pulsazioni positive.

e le intersezioni risultano:

$$P_1 = (-3.12 \cdot 10^{-3}, 0), \quad P_2 = (-4.88 \cdot 10^{-8}, 0).$$

## 2.2 Esercizio 4

Si ponga il sistema descritto dalla funzione di trasferimento dell'esercizio 2 in controreazione unitaria, con un guadagno variabile  $K$  in catena aperta. Utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso e se ne calcoli il numero di poli a parte reale positiva al variare di  $K \in \mathbb{R}$ .

Sia  $K > 0$ . Dal diagramma polare di figura 6 di seguito riportato segue che, se il punto  $-1 + j0$  è esterno al diagramma (posizione 1), il sistema a ciclo chiuso è instabile, in quanto la funzione di trasferimento a catena aperta ha 2 poli a parte reale positiva:

$$P_{\text{CH}} = P_{\text{AP}} - N = 2 - 0 = 2.$$

Come visto negli esercizi 2 e 3, la pulsazione del primo attraversamento a  $-\pi$  si ottiene, con buona approssimazione, in corrispondenza della pulsazione di taglio  $\omega_1^* \simeq \omega_{t_1} = 10$  e la funzione di trasferimento calcolata in  $j\omega_{t_1}$  vale  $|W(j\omega_{t_1})| \simeq 3.12 \cdot 10^{-3}$ . Dunque, il punto  $-1 + j0$  è esterno se:

$$|KW(j\omega_{t_1})| < 1 \implies K < K_1 \simeq 3.20 \cdot 10^2.$$

Per valori di  $K > K_1$ , il punto  $-1 + j0$  è interno al diagramma. Se si trova in posizione 2, la curva polare compie 2 giri in senso orario ( $N = -2$ ), per cui:

$$P_{\text{CH}} = P_{\text{AP}} - N = 2 - (-2) = 4.$$



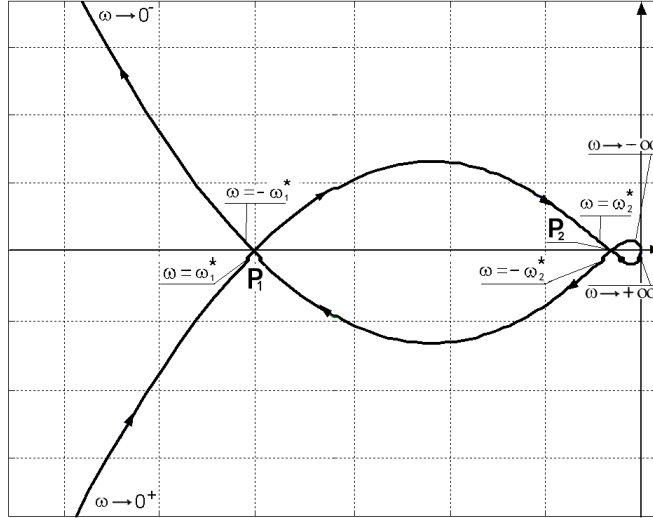


Figure 5: Diagramma polare completo.

Il sistema è ancora instabile, perché vi sono ben 4 poli a parte reale positiva in catena chiusa. Come precedentemente calcolato, la pulsazione del secondo attraversamento a  $-\pi$  radianti si ha, con buona approssimazione, in corrispondenza della seconda pulsazione di taglio  $\omega_2^* \simeq \omega_{t_2} = 400$  con  $|W(j\omega_{t_2})| \simeq 4.88 \cdot 10^{-8}$ , cosicché la posizione interna 2 è mantenuta per:

$$|KW(j\omega_{t_2})| < 1 < |KW(j\omega_{t_1})| \implies 3.20 \cdot 10^2 < K < 2.05 \cdot 10^7.$$

Per valori di  $K > 2.05 \cdot 10^7$ , il punto  $-1 + j0$  è in posizione 3, per cui il diagramma polare compie un giro in senso orario ed uno in senso antiorario:  $N = -1 + 1 = 0$ ; si ha ancora instabilità per la presenza di due poli a parte reale positiva in catena chiusa:

$$P_{CH} = P_{AP} - N = 2 - 0 = 2.$$

Nei due casi critici ( $K = K_1$  e  $K = K_2$ ), il sistema a ciclo chiuso ha 2 poli a parte reale positiva e due a parte reale nulla.

Nel caso in cui sia  $K < 0$ , il diagramma delle fasi subisce uno sfasamento uniforme di  $\pi$  radianti, figura 8. A causa della chiusura all'infinito, in questa situazione il punto  $-1 + j0$  è sempre interno al diagramma ( $N = -1$ ), per cui:

$$P_{CH} = P_{AP} - N = 2 - (-1) = 3.$$

Sono tre i poli a parte reale positiva in catena chiusa: ancora instabilità.

Riassumendo, non si ha mai stabilità al variare di  $K \in \mathbb{R}$ .

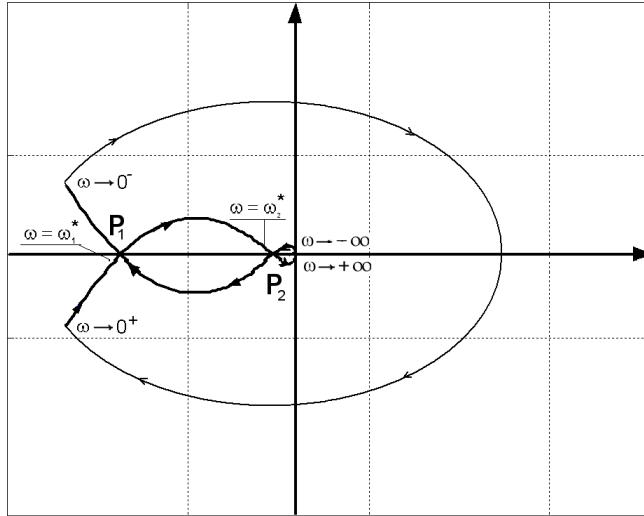


Figure 6: Diagramma polare: chiusura all'infinito.

### 3 Proprietà strutturali

#### 3.1 Esercizio 5

Discutere le proprietà di raggiungibilità del sistema lineare stazionario a dimensione finita descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0].$$

In particolar modo si dica se i seguenti vettori dello spazio di stato sono raggiungibili:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$P = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

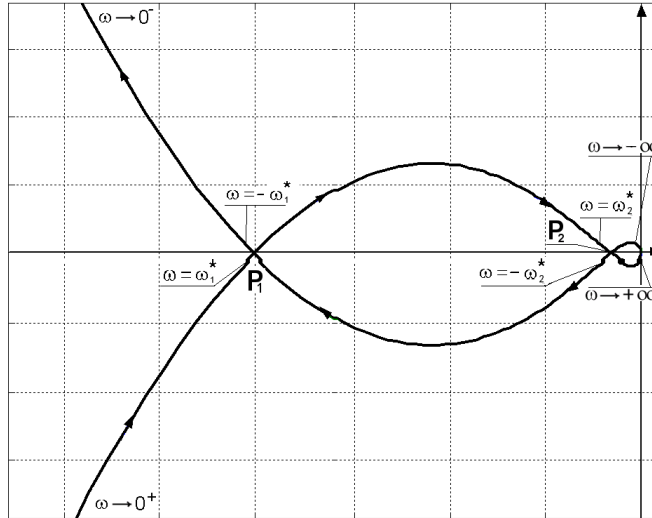


Figure 7: Diagramma polare dell'esercizio 2:  $K$  positivo.

Per verificare che i cinque vettori dell'esercizio siano raggiungibili, bisogna verificare che appartengano all'immagine della matrice di raggiungibilità, ossia che possano scriversi come combinazioni lineari delle colonne di  $P$ . Dunque, denotando  $u_i$  l' $i$ -esima colonna di  $P$ :

- i)  $x_1$  è raggiungibile, infatti corrisponde alla somma (cambiata di segno) tra la seconda e la quarta colonna di  $P$ :  $x_1 = -u_2 - u_4$ ;
- ii)  $x_2$  è raggiungibile, infatti coincide con la seconda colonna di  $P$ :  $x_2 = u_2$ ;
- iii)  $x_3$  è raggiungibile, infatti corrisponde alla differenza tra la prima e la seconda colonna di  $P$ :  $x_3 = u_1 - u_2$ ;
- iv)  $x_4$  non è raggiungibile: è facile verificare che qualunque combinazione lineare delle colonne di  $P$  restituisce sempre la terza e la quarta componente opposte, il che non accade in  $x_4$ .

Per verificare l'appartenenza o meno di  $x_5$  allo spazio degli stati raggiungibili, andiamo a costruire tale spazio. Per definizione:

$$\mathcal{P} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

L'insieme dei generatori di  $\mathcal{P}$  può essere facilmente semplificato:

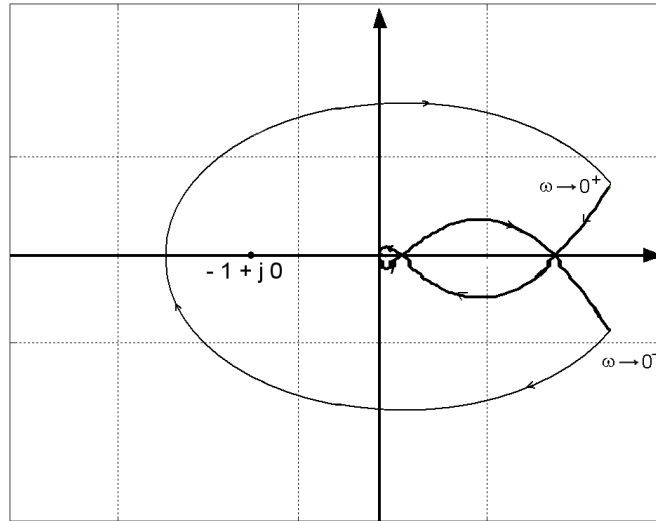


Figure 8: Diagramma polare dell'esercizio 2:  $K$  negativo.

- eliminando l'ultima colonna (uguale alla prima);

$$\mathcal{P} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\};$$

- ] sostituendo al terzo vettore la somma (cambiata di segno) tra la prima e la terza colonna:

$$\mathcal{P} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\};$$

- eliminando il secondo vettore, combinazione lineare del terzo e del quarto:

$$\mathcal{P} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Non sono possibili ulteriori semplificazioni, infatti il rango della matrice formata dai tre vettori è massimo (ossia pari a tre). A questo punto è facile verificare che

$x_5$  non può scriversi come combinazione lineare di questi tre vettori e, dunque, non è raggiungibile.

Come ulteriore verifica che  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  sono raggiungibili, verifichiamo la proprietà di  $A$ -invarianza:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{P} \quad \text{secondo vettore della base;}$$

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{P} \quad \text{combinazione lineare del primo e del secondo vettore della base;}$$

$$Ax_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P} \quad \text{differenza tra il primo e il terzo vettore della base.}$$

### 3.2 Esercizio 6

*Discutere le proprietà di osservabilità del sistema lineare stazionario a dimensione finita descritto dalle matrici dell'esercizio 5. In particolare modo si dica se i vettori  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , dello spazio di stato sono osservabili.*

La matrice di osservabilità del sistema è:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per verificare che i cinque vettori dell'esercizio siano osservabili, bisogna verificare che non appartengano al nullo della matrice di osservabilità  $Q$ . Dunque:

- i)  $Qx_1 = \mathbf{0}$ :  $x_1$  è inosservabile;
- ii)  $Qx_i \neq \mathbf{0}$ ,  $i = 2, \dots, 5$ :  $x_2, x_3, x_4, x_5$  sono osservabili.

Per costruire lo spazio degli stati inosservabili  $\mathcal{I}$ , è necessario risolvere il sistema di equazioni lineari omogeneo:

$$\begin{cases} x_4 = 0, \\ x_5 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0, \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0, \end{cases}$$

per cui:

$$\mathcal{I} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$