

**Aste con banditore che vende
1 oggetto a N bidders avversi al rischio
con valutazioni IPV. Assumo che v segua
Esponenziale Negativa su $[0, \infty)$ con $\lambda =$
 1 . Siano $N = 5$ bidders e $\gamma = 1/2$ il coefficiente CRRA.
A lezione è stato fatto il caso $v \sim U[0, 1]$.**

"Surplus" del bidder :

$$U = (v_i - b(v_i))^{1-\gamma}$$

L' ottimo bid FP è

$$\text{In}[58]:= b = v_i - \frac{\int_0^{v_i} (v_i)^8 dv_i}{(v_i)^8}$$

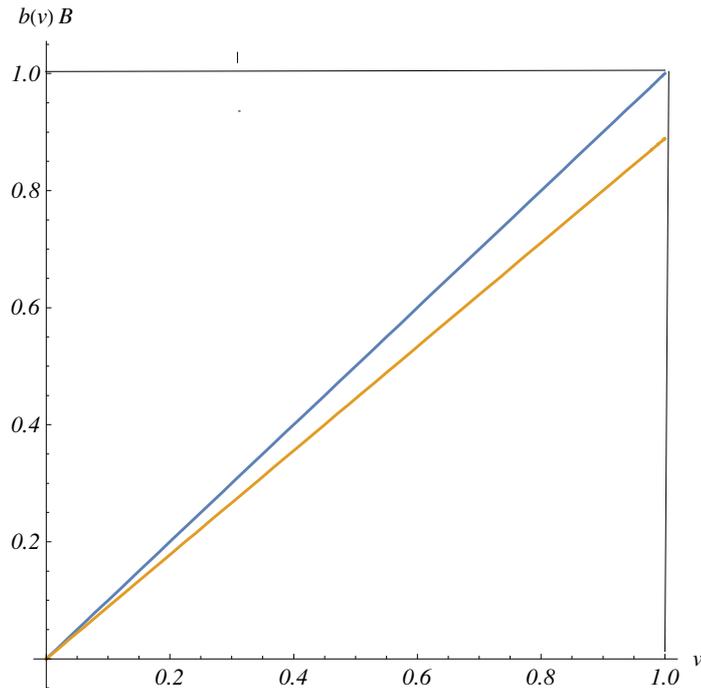
$$\frac{8 v_i}{9}$$

Se invece fosse un' asta al SP avremmo

$$B = v_i$$

Le due funzioni sono rappresentate nel grafico seguente. Notare che con $v = 1$ l'avversione al rischio implica bid FP = 0.889 circa mentre con neutralità al rischio avremmo (sempre con $v = 1$) bid Fp = 0.8 (non rappresentata). L'avversione al rischio spinge il bidder ad aumentare il bid per ogni valore di v.

$$\text{In}[81]:= \text{Plot}[\{B, b\}, \{v_i, 0, 1\}]$$



La MGF che useremo per media e varianza (e che chiameremo con lettere diverse) non è quella relativa alla $F(v)$ genitrice (che nel nostro caso sarebbe $\lambda / (\lambda - t)$ per tutti i t minori di λ) ma quella delle S.O. di v derivata da $F(v)$. La più alta S.O. nel caso FP. La seconda più alta nel caso SP.

In[61]:=
$$M = \int_0^{\infty} \text{Exp}\left[t * \frac{8 v_i}{9}\right] * 5 * e^{-v_i} (1 - e^{-v_i})^4 dv_i$$

Out[61]=
$$-\frac{885735}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)} \text{ if } \text{Re}[t] < \frac{9}{8}$$

In[62]:= $s = \partial_t M$

Out[62]=
$$\frac{7085880}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)^2} + \frac{7085880}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)^2(-9+8t)} + \frac{7085880}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)^2(-27+8t)(-9+8t)} + \frac{3542940}{(-9+2t)(-9+4t)^2(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)} + \frac{1771470}{(-9+2t)^2(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)} \text{ if } \text{Re}[t] < \frac{9}{8}$$

In[63]:= $\text{MediaFP} = \text{Limit}[s, t \rightarrow 0]$

Out[63]=
$$\frac{274}{135}$$

In[64]:= $N[\text{MediaFP}]$

2.0296

In[65]:= $r = \partial_{t,t} M$

Out[65]=

$$\frac{113\,374\,080}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)^3} - \frac{113\,374\,080}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)^2(-9+8t)^2} - \frac{113\,374\,080}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)^2(-27+8t)(-9+8t)^2} - \frac{56\,687\,040}{(-9+2t)(-9+4t)^2(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)^2} - \frac{28\,343\,520}{(-9+2t)^2(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)^2} - \frac{113\,374\,080}{(-9+2t)^2(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)^2} - \frac{113\,374\,080}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)^3(-9+8t)} - \frac{56\,687\,040}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)^2(-27+8t)^2(-9+8t)} - \frac{28\,343\,520}{(-9+2t)(-9+4t)^2(-45+8t)(-27+8t)^2(-9+8t)} - \frac{28\,343\,520}{(-9+2t)^2(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)^2(-9+8t)} - \frac{113\,374\,080}{(-9+2t)(-9+4t)(-45+8t)^3(-27+8t)(-9+8t)} - \frac{56\,687\,040}{(-9+2t)(-9+4t)^2(-45+8t)^2(-27+8t)(-9+8t)} - \frac{28\,343\,520}{(-9+2t)^2(-9+4t)(-45+8t)^2(-27+8t)(-9+8t)} - \frac{28\,343\,520}{(-9+2t)^2(-9+4t)(-45+8t)^2(-27+8t)(-9+8t)} - \frac{14\,171\,760}{(-9+2t)(-9+4t)^3(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)} - \frac{7\,085\,880}{(-9+2t)^2(-9+4t)^2(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)} - \frac{7\,085\,880}{(-9+2t)^3(-9+4t)(-45+8t)(-27+8t)(-9+8t)} \quad \text{if } \operatorname{Re}[t] < \frac{9}{8}$$

In[66]:= $\text{SECFP} = \text{Limit}[r, t \rightarrow 0]$

Out[66]= $\frac{96152}{18225}$

In[67]:= $N[\text{SECFP}]$

Out[67]= 5.27583

In[69]:= $\text{VarFP} = 5.27583 - (2.0296^2)$

Out[69]= 1.15655

L' ottimo bid SP è $b = v$. Da cui

In[70]:=
$$Y = \int_0^{\infty} \text{Exp}[t * v_i] * 2\theta * (e^{-(5-1)*v_i} - e^{-5*v_i}) \, dv_i$$

Out[70]=
$$\frac{2\theta}{2\theta - 9t + t^2} \text{ if } \text{Re}[t] < 4$$

In[71]:=
$$y = \partial_t Y$$

Out[71]=
$$-\frac{2\theta(-9 + 2t)}{(2\theta - 9t + t^2)^2} \text{ if } \text{Re}[t] < 4$$

In[72]:=
$$\text{MediaSP} = \text{Limit}[y, t \rightarrow 0]$$

Out[72]=
$$\frac{9}{2\theta}$$

In[73]:=
$$N[\text{MediaSP}]$$

0.45

In[74]:=
$$z = \partial_{t,t} Y$$

Out[74]=
$$\frac{4\theta(-9 + 2t)^2}{(2\theta - 9t + t^2)^3} - \frac{4\theta}{(2\theta - 9t + t^2)^2} \text{ if } \text{Re}[t] < 4$$

In[75]:=
$$\text{Limit}[z, t \rightarrow 0]$$

Out[75]=
$$\frac{61}{20\theta}$$

In[77]:=
$$\text{Var} = \frac{61}{20\theta} - (0.45)^2$$

0.1025

■ *****

Commento :

Con avversione al rischio dei bidders/compratori il valore atteso del ricavo del venditore/banditore è maggiore nel caso FP (2.0296) rispetto al caso SP (0.45). La varianza del ricavo è minore con FP (1.1565) rispetto a SP (0.1025).

■ *****

Esercizio

Ripetere l' esercizio precedente supponendo neutralità al rischio ($\gamma = 0$).