Premi equi

Fabio Bellini

Università di Milano-Bicocca

fabio.bellini@unimib.it

11 novembre 2021

Premi equi

Nelle scorse lezioni abbiamo visto le prestazioni assicurative più comuni: capitale differito, temporanea caso morte, copertura a vita intera, rendita vitalizia, rendita vitalizia temporanea. A fronte dell'impegno a pagare queste prestazioni, la compagnia di assicurazione richiede il pagamento di un premio, che può essere in termini generali di due tipi:

- un premio unico, versato alla stipula della polizza
- una sequenza di premi periodici, che sono pagati tipicamente a scadenze regolari, ad esempio ogni anno.

Iniziamo a considerare il caso di un premio unico, e analizziamo qualitativamente il rischio che si assume una compagnia assicurativa accettando la sottoscrizione di una polizza.
La perdita (loss) della compagnia assicurativa è data dalla variabile casuale

$$L = B - P,$$

dove B rappresenta il valore attuale aleatorio della prestazione da pagare (benefit) e P il premio richiesto.

Premi equi

Il premio equo è definito come quel valore di P per cui si ha

$$\mathbb{E}[L] = 0, \text{ cioè } P = \mathbb{E}[B],$$

il valore attuariale della prestazione da pagare. Il premio equo è un concetto fondamentale dal punti di vista teorico, anche se è troppo basso dal punto di vista della compagnia assicuratrice, in quanto:

- non tiene conto della rischiosità di B e della avversione al rischio della compagnia
- non tiene conto delle spese della compagnia
- non tiene conto della necessità della compagnia di realizzare un utile.

Vedremo più avanti come *principi di calcolo del premio* più generali rispetto al premio equo possano risolvere questi problemi.

Premi periodici

Nella rimanente parte di questa lezione ci concentriamo sul calcolo del premio equo nel caso di premi periodici. Dato che in questo caso i premi sono pagati solo in caso di vita dell'assicurato, l'equazione che definisce il premio equo diventa

$$\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}[B],$$

in quanto anche P è una variabile casuale. In parole, diciamo che *il valore attuariale dei premi deve coincidere con il valore attuariale delle prestazioni*, una uguaglianza nota come *condizione di equilibrio attuariale*. La condizione di equilibrio attuariale non determina in modo univoco la successione dei premi; gli schemi di pagamento più comuni sono:

- premi naturali
- premi costanti

Premi periodici

Come esempio (tratto da Olivieri e Pitacco, pag. 226), consideriamo una polizza temporanea caso morte con durata 5 anni che paga una prestazione unitaria, che ha quindi valore attuariale $\mathbb{E}[B] = {}_{\mathbf{5}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$, a fronte della quale paghiamo 5 premi annui anticipati P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. La condizione di equilibrio attuariale richiede che il valore attuariale della prestazione sia uguale al valore attuariale del flusso dei premi, cioè

$$ {}_{\mathbf{5}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = P_0 + P_1 \cdot {}_{\mathbf{1}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} + P_2 \cdot {}_{\mathbf{2}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} + P_3 \cdot {}_{\mathbf{3}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} + P_4 \cdot {}_{\mathbf{4}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}}. $$

Questa equazione non determina in modo univoco i premi $P_0, \dots, P_4$. Continuiamo l'esempio ipotizzando che $P_2, P_3, P_4 = 0$, cioè che vengano pagati premi solo alle date 0 e 1. I premi P_0 e P_1 devono soddisfare la relazione

$$ {}_{\mathbf{5}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = P_0 + P_1 \cdot {}_{\mathbf{1}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} $$

e due soluzioni possibili sono

$$\begin{cases} P_0 = {}_5\mathbf{A_x} \\ P_1 = 0, \end{cases}$$

che corrisponde a un premio unico iniziale, oppure

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_1 = \frac{{}_5\mathbf{A_x}}{{}_1\mathbf{E_x}}, \end{cases}$$

che corrisponde a un premio unico pagato al tempo 1. La seconda soluzione però non è accettabile in quanto se l'assicurato morisse prima di $t = 1$, avrebbe una prestazione senza avere ancora pagato nulla.

Premi periodici

Deve quindi valere $P_0 \geq {}_1\mathbf{A_x}$, che corrisponde alla richiesta che il premio P_0 sia almeno pari al valore attuariale della copertura del rischio di morte tra 0 e 1. Una soluzione possibile è quindi

$$\begin{cases} P_0 = {}_1\mathbf{A_x} \\ P_1 = \frac{{}_5\mathbf{A_x} - {}_1\mathbf{A_x}}{{}_1\mathbf{E_x}}, \end{cases}$$

dove possiamo osservare che

$$\begin{aligned} \frac{{}_5\mathbf{A_x} - {}_1\mathbf{A_x}}{{}_1\mathbf{E_x}} &= \frac{\sum_{k=1}^{5} {}_{\mathbf{k-1}|\mathbf{1}}\mathbf{q_x}\, v^k - {}_1\mathbf{A_x}}{{}_1\mathbf{E_x}} = \\ &= \frac{{}_{1|1}\mathbf{q_x}\, v^2 + {}_{2|1}\mathbf{q_x}\, v^3 + {}_{3|1}\mathbf{q_x}\, v^4 + {}_{4|1}\mathbf{q_x}\, v^5}{\mathbf{p_x}\, v} = \\ &= \mathbf{q_{x+1}}\, v + {}_{1|1}\mathbf{q_{x+1}}\, v^2 + {}_{2|1}\mathbf{q_{x+1}}\, v^3 + {}_{3|1}\mathbf{q_{x+1}}\, v^4 = \\ &= {}_4\mathbf{A_{x+1}}, \end{aligned}$$

Premi naturali

quindi la soluzione precedente può essere anche scritta come

$$\begin{cases} P_0 = {}_1\mathbf{A}_{\mathbf{x}} \\ P_1 = {}_4\mathbf{A}_{\mathbf{x+1}}. \end{cases}$$

Il premio P_0 viene detto *premio naturale* in quanto (in analogia a quanto succede nelle assicurazioni non-vita) esso copre esattamente il rischio fino al pagamento del premio successivo. Il difetto dei premi naturali è che variano nel tempo; nell'esempio considerato i premi naturali sono pari a

$$P_k^N = {}_1\mathbf{A}_{\mathbf{x+k}}, \text{ per } k = 0, \ldots, 4,$$

e risultano essere crescenti nel tempo, un elemento di complessità per l'assicurato che li rende poco utilizzati nella pratica.

Premi costanti

Tipicamente, i premi pagati sono invece costanti durante la vita della polizza, pagati annualmente con rate anticipate. I premi sono pagati solo in caso di vita dell'assicurato, pertanto il flusso dei premi costituisce una rendita vitalizia temporanea pagata dall'assicurato alla compagnia di assicurazione. La condizione di equilibrio attuariale è data quindi da

$$P \cdot {}_{\mathbf{n}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} = V(B),$$

dove $V(B)$ indica in generale il valore attuariale dei benefici, che potremo calcolare con le formule viste in precedenza. Si ottiene quindi che il premio costante annuo è pari a

$$P = \frac{V(B)}{{}_{\mathbf{n}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}}.$$

Esempio 1

Consideriamo ad esempio la prestazione data dal pagamento di un capitale di 100000 Euro tra dieci anni a un uomo di età 45 anni. Abbiamo calcolato nella scorsa lezione che

$$ {}_{10}\mathbf{E}_{45} = 0,9738 \times 0,6139 = 0,5978, $$

e che il valore attuale attuariale della prestazione è dato da

$$ V(B) = C \cdot {}_{10}\mathbf{E}_{45} = 100000 \times 0,5978 = 59780 \text{ Euro}. $$

Se si trattasse di una polizza a premio unico, l'assicurato dovrebbe quindi pagare 59780 Euro alla stipula. Se invece si tratta di una polizza a premio annuo, dobbiamo determinare la rata di una rendita vitalizia anticipata temporanea di 10 rate che abbia valore attuariale pari a 59780 Euro.

Esempio 1

Utilizzando Excel, calcoliamo ${}_{10}\ddot{\mathbf{a}}_{45} = 8,0366$ da cui otteniamo

$$P = \frac{V(B)}{{}_{10}\ddot{\mathbf{a}}_{45}} = \frac{59780}{8,0366} = 7438 \text{ Euro.}$$

E' istruttivo osservare che se trascuriamo la probabilità di morte, la matematica finanziaria tradizionale ci dice che la rata necessaria per costituire un capitale di 100000 Euro attraverso 10 versamenti anticipati è

$$R = \frac{10000}{\ddot{s}_{10,5\%}} = \frac{100000}{13,207} = 7572 \text{ Euro,}$$

dove

$$\ddot{s}_{10,5\%} = 1,05 \times \frac{(1,05)^{10} - 1}{0,05} = 13,207.$$

Esempio 2

Cosideriamo ora il caso di una polizza temporanea caso morte, con la quale un maschio 45enne si assicura il pagamento di 100000 Euro in caso di morte nei prossimi 10 anni. Abbiamo già calcolato

$$
\begin{aligned}
{}_{10}\mathbf{A}_{45} &= \sum_{k=1}^{10} {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{45}} \cdot v^k = 0,01949, \\
V(B) &= C \cdot {}_{10}\mathbf{A}_{45} = 100000 \times 0,01949 = 1949 \text{ Euro.}
\end{aligned}
$$

Quindi se la polizza fosse a premio unico dovremmo pagare immediatamente 1949 Euro. Il premio annuo è invece dato da

$$
P = \frac{U}{{}_{10}\ddot{\mathbf{a}}_{45}} = \frac{1949}{8,0366} = 243 \text{ Euro.}
$$

Esempio 3

Consideriamo ora un maschio 45enne che voglia stipulare una polizza mista con $n = 25$, $C^m = C^v = 100000$ Euro. Abbiamo visto che

$$
\begin{aligned}
{}_{25}\mathbf{E}_{45} &= 0,8436 \times (1,05)^{-25} = 0,2491 \\
{}_{25}\mathbf{A}_{45} &= 0,0706
\end{aligned}
$$

da cui otteniamo

$$V(B) = 100000 \times 0,2491 + 100000 \times 0,0706 = 31970 \text{ Euro.}$$

Se i premi sono pagati annualmente, il premio annuo è dato da

$$P = \frac{V(B)}{{}_{25}\ddot{\mathbf{a}}_{45}} = \frac{31970}{14,284} = 2238 \text{ Euro.}$$