Riserva matematica

Fabio Bellini

Università di Milano-Bicocca

fabio.bellini@unimib.it

18 novembre 2021

La riserva matematica

Abbiamo visto che se l'assicuratore utilizza il principio del premio equo, la condizione di equilibrio attuariale richiede che al momento della stipula il valore attuariale dei premi sia pari al valore attuariale delle prestazioni. Durante la vita della polizza l'equilibrio attuariale viene meno, in quanto i premi ancora da ricevere hanno un valore attuariale inferiore rispetto alle prestazioni ancora da pagare. Questo non succede soltanto se l'assicuratore utilizza lo schema di pagamento dei premi naturali, poco diffuso in pratica. Indichiamo con U_t il valore attuariale dei premi ancora da ricevere e con V_t il valore attuariale delle prestazioni ancora da pagare dopo t anni. La quantità

$$_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} = V_t - U_t$$

prende il nome di *riserva matematica*, e rappresenta l'importo che l'assicuratore deve accantonare per far fronte in media ai pagamenti delle prestazioni. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1

Riconsideriamo la polizza di capitale differito che prevede un pagamento di 100000 Euro tra 10 anni a un maschio 45enne, a fronte del pagamento di 10 premi annui anticipati pari a 7438 Euro ciascuno. Alla stipula della polizza le due prestazioni sono in equilibrio attuariale. Dopo un anno, nella ipotesi in cui l'assicurato sia in vita, la prestazione della compagnia assicuratrice è un capitale differito di 100000 Euro da pagare dopo 9 anni a un individuo di 46 anni, pertanto il suo valore attuariale è

$$V_1 = 100000 \times {}_{\mathbf{9}}\mathbf{E}_{\mathbf{46}} = 62873 \text{ Euro.}$$

L'assicurato deve ancora pagare 9 premi anticipati di importo 7438 Euro, quindi il valore attuale dei premi ancora da pagare è

$$U_1 = 7438 \times {}_{\mathbf{9}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{46}} = 7438 \times 7,400 = 55045 \text{ Euro.}$$

Esempio 1

La riserva matematica dopo un anno dalla stipula è quindi data da

$$ {}_{1}\mathbf{V}_{45} = 62873 - 55045 = 7828 \text{ Euro.} $$

Analogamente, dopo due anni si ha

$$ \begin{aligned} V_2 &= 100000 \times {}_{8}\mathbf{E}_{47} = 66137 \text{ Euro} \\ U_2 &= 7438 \times {}_{8}\ddot{\mathbf{a}}_{47} = 7438 \times 6,7329 = 50079 \text{ Euro} \\ {}_{2}\mathbf{V}_{45} &= 66137 - 50079 = 16058 \text{ Euro.} \end{aligned} $$

Per questo tipo di polizza la riserva matematica è crescente. Al tempo $n = 10$, se l'assicurato è ancora in vita la prestazione è $V_{10} = 100000$ Euro, mentre i premi da pagare sono esauriti, quindi si ha

$$ {}_{10}\mathbf{V}_{45} = V_{10} - U_{10} = 100000 \text{ Euro.} $$

Formule ricorsive

La riserva matematica per questo tipo di polizza può essere calcolata in modo ricorsivo. Osserviamo innanzitutto che

$$ {}_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} = v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{E}_{\mathbf{x+1}}. $$

Ricordiamo che ${}_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}}$ rappresenta il valore attuariale di un importo unitario in caso vita tra n anni. L'individuo di età x ha due possibilità: o muore (e questa eventualità non dà alcun contributo al valore attuariale della prestazione caso vita) oppure sopravvive (con probabilità $\mathbf{p}_{\mathbf{x}}$) e diventa un individuo di età $x+1$, per il quale il valore attuariale della prestazione di capitale differito è ${}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{E}_{\mathbf{x+1}}$. Da un punto di vista matematico,

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} &= v^n \cdot {}_{\mathbf{n}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} = v^n \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{p}_{\mathbf{x+1}} = \\ &= v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot v^{n-1} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{p}_{\mathbf{x+1}} = v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{E}_{\mathbf{x+1}}. \end{aligned} $$

Formule ricorsive

Osserviamo inoltre che vale anche la seguente relazione ricorsiva:

$$_{\mathbf{n}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} = 1 + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x+1}}$$

Il valore attuariale di una rendita vitalizia anticipata temporanea è infatti dato da due componenti: un importo unitario ricevuto immediatamente, a cui si somma in caso di sopravvivenza il valore attuariale di una rendita anticipata di $n-1$ rate. Da un punto di vista matematico,

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbf{n}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_{\mathbf{k}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} = 1 + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} + v^2 \cdot {}_{\mathbf{2}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} + \cdots + v^{n-1} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{p}_{\mathbf{x}} = \\
&= 1 + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot \left\{ 1 + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+1}} + \cdots + v^{n-2} \cdot {}_{\mathbf{n-2}}\mathbf{p}_{\mathbf{x+1}} \right\} = \\
&= 1 + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x+1}}.
\end{aligned}$$

Formule ricorsive

Utilizzando le formule ricorsive per $_{\mathbf{n}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}}$ e per $_{\mathbf{n}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}$, possiamo derivare una formula ricorsiva per la riserva matematica di una polizza di capitale differito con capitale assicurato C e premio annuo P.
La riserva matematica dopo t anni dalla stipula è

$$\begin{aligned} {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} &= C \cdot {}_{\mathbf{n-t}}\mathbf{E}_{\mathbf{x+t}} - P \cdot {}_{\mathbf{n-t}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x+t}} = \\ &= C \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}} \cdot {}_{\mathbf{n-t-1}}\mathbf{E}_{\mathbf{x+t+1}} - P \cdot (1 + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}} \cdot {}_{\mathbf{n-t-1}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x+t+1}}) = \\ &= {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}} - P, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$ {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + P = {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}}.$$

un caso particolare della *equazione di Fouret* che vedremo più avanti.
Attraverso questa equazione ricorsiva e la condizione $_{\mathbf{0}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} = 0$ ricostruiamo la evoluzione della riserva durante la vita della polizza dell'Esempio 1, verificando che si ottiene $_{\mathbf{10}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} = 100000$ Euro.

Esempio 1

t	p_{x+t}	${}_{10-t}E_{x+t}$	${}_{10-t}\ddot{a}_{x+t}$	${}_tV_x$
0	0.9984	0.5978	8.0366	0
1	0.9982	0.6287	7.4020	7817
2	0.9980	0.6614	6.7355	16038
3	0.9978	0.6958	6.0355	24691
4	0.9976	0.7322	5.3000	33801
5	0.9973	0.7707	4.5272	43396
6	0.9970	0.8114	3.7145	53511
7	0.9967	0.8545	2.8596	64181
8	0.9964	0.9002	1.9597	75442
9	0.9960	0.9486	1.0117	87336
10	-	1	0	100000

Esempio 1

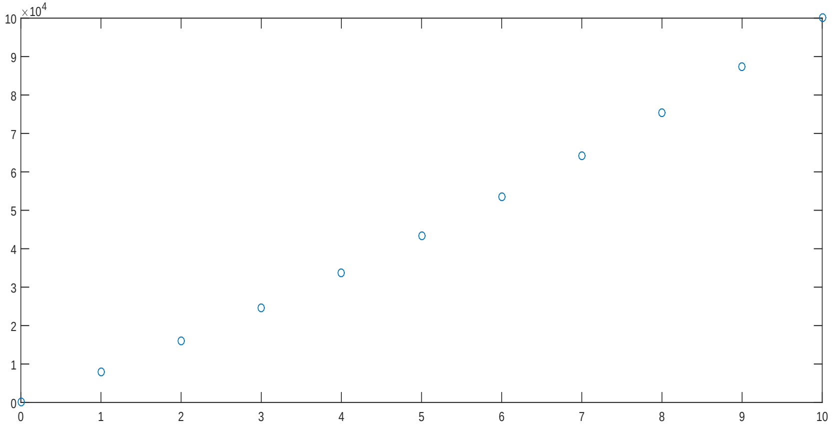

Figura 1: Andamento temporale della riserva matematica per una polizza di capitale differito con premi annui costanti.

Esempio 2

Riconsideriamo ora il caso di una polizza temporanea caso morte, che preveda un pagamento di 100000 Euro a un maschio 45enne in caso di morte nei prossimi 10 anni. Abbiamo già visto che $P = 243$ Euro. Per calcolare la riserva matematica al tempo 1, osserviamo che a quel punto il valore attuale attuariale delle prestazioni residue è pari a

$$V_1 = 100000 \times {}_{\mathbf{9}}\mathbf{A}_{\mathbf{46}} = 1890 \text{ Euro}$$

mentre il valore attuale attuariale dei premi residui è

$$U_1 = 243 \times {}_{\mathbf{9}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{46}} = 1798 \text{ Euro}$$

da cui otteniamo

$${}_{\mathbf{1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} = V_1 - U_1 = 92 \text{ Euro.}$$

Anche in questo caso la riserva può essere calcolata in modo ricorsivo.

Formule ricorsive

Vale infatti la relazione

$$ {}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x}} + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{A}_{\mathbf{x+1}}. $$

Ricordiamo che ${}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ rappresenta il valore attuariale di una polizza temporanea caso morte di durata n anni, per un individuo di età x. Pertanto nel primo anno ci sono due possibilità: o l'individuo muore, con probabilità $\mathbf{q}_{\mathbf{x}}$, il che produce il termine $v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x}}$, oppure l'individuo sopravvive e diventa di età $x+1$, con probabilità $\mathbf{p}_{\mathbf{x}}$, e ha quindi a disposizione al tempo 1 un contratto di valore attuariale ${}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{A}_{\mathbf{x+1}}$, il che produce il secondo termine. Dal punto di vista matematico,

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbf{n}}\mathbf{A}_{\mathbf{x}} &= \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_{\mathbf{k-1|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} = v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x}} + v^2 \cdot {}_{\mathbf{1|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} + \cdots + v^n \cdot {}_{\mathbf{n-1|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{x}} = \\ &= v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x}} + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot \left\{ v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x+1}} + \cdots + v^{n-1} \cdot {}_{\mathbf{n-2|1}}\mathbf{q}_{\mathbf{x+1}} \right\} = \\ &= v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x}} + v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} \cdot {}_{\mathbf{n-1}}\mathbf{A}_{\mathbf{x+1}}. \end{aligned} $$

Utilizzando le formule ricorsive per $_{\mathbf{n}}\mathbf{A_x}$ e per $_{\mathbf{n}}\mathbf{\ddot{a}_x}$, possiamo derivare una formula ricorsiva per la riserva matematica di una polizza temporanea caso morte con capitale assicurato C e premio annuo P.
La riserva matematica dopo t anni dalla stipula è

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{t}}\mathbf{V_x} &= C \cdot {}_{\mathbf{n-t}}\mathbf{A_{x+t}} - P \cdot {}_{\mathbf{n-t}}\mathbf{\ddot{a}_{x+t}} = \\
&= C \cdot (v \cdot \mathbf{q_{x+t}} + v \cdot \mathbf{p_{x+t}} \cdot {}_{\mathbf{n-t-1}}\mathbf{A_{x+t+1}}) + \\
&- P \cdot (1 + v \cdot \mathbf{p_{x+t}} \cdot {}_{\mathbf{n-t-1}}\mathbf{\ddot{a}_{x+t+1}}) = \\
&= C \cdot v \cdot \mathbf{q_{x+t}} + v \cdot \mathbf{p_{x+t}} \cdot {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x} - P,
\end{aligned}
$$

da cui si ottiene

$$
{}_{\mathbf{t}}\mathbf{V_x} + P = {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x} \cdot v \cdot \mathbf{p_{x+t}} + C \cdot v \cdot \mathbf{q_{x+t}},
$$

un altro caso particolare della *equazione di Fouret*. Dalla condizione $_{\mathbf{0}}\mathbf{V_x} = 0$ ricostruiamo la evoluzione della riserva durante la vita della polizza dell'Esempio 2, verificando che si ottiene $_{\mathbf{10}}\mathbf{V_x} = 0$.

Esempio 2

t	p_{x+t}	q_{x+t}	$_{10-t}A_{x+t}$	$_{10-t}\ddot{a}_{x+t}$	$_tV_x$
0	0.9984	0.0016	0.0195	8.0366	0
1	0.9982	0.0018	0.0189	7.4005	92
2	0.998	0.002	0.018	6.7328	165
3	0.9978	0.0022	0.017	6.0315	229
4	0.9976	0.0024	0.0156	5.2947	278
5	0.9973	0.0027	0.0141	4.5203	307
6	0.997	0.003	0.0121	3.7062	310
7	0.9967	0.0033	0.0098	2.85	285
8	0.9964	0.0036	0.007	1.9489	228
9	0.996	0.004	0.0038	0.9999	134
10	0	0	0	0	0

Esempio 2

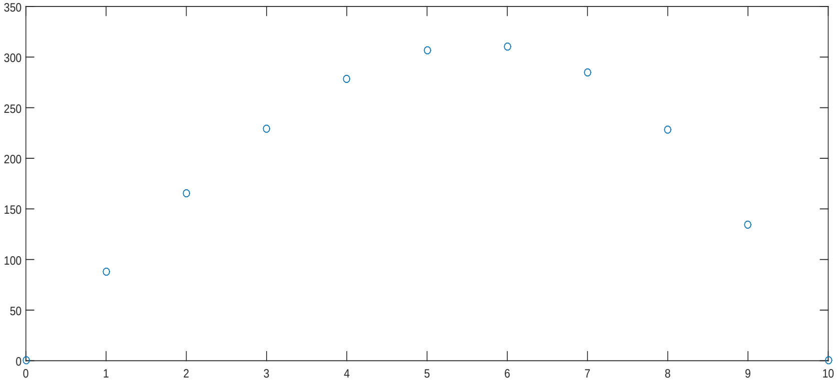

Figura 2: Andamento temporale della riserva matematica per una polizza temporanea caso morte con premi annui costanti.

L'equazione di Fouret

Ragionando in modo analogo, è possibile ricavare una equazione ricorsiva per la riserva matematica nel caso di una polizza completamente generale che presenti premi non costanti che indichiamo con P_t e prestazioni in caso vita durante la polizza, che indichiamo rispettivamente con C_t^{va} e C_{t+1}^{vp} nei casi anticipato e posticipato; C_{t+1}^{m} è la prestazione caso morte. Questa equazione prende il nome di *equazione di Fouret*:

$$ {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + P_t - C_t^{va} = {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}} + C_{t+1}^{m} \cdot v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}} + C_{t+1}^{vp} \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}}. $$

Il caso particolare della prestazione di capitale differito corrisponde a $P_t = P$, $C_t^{va} = C_t^{m} = 0$ per $t = 0, \ldots, n-1$ e $C_t^{vp} = C$, se $t = n$.
Il caso particolare della polizza temporanea caso morte corrisponde a $P_t = P$, $C_t^{va} = C_t^{vp} = 0$ e $C_t^{m} = C$.

La gestione della polizza

Se l'assicuratore partendo al tempo t dalla riserva matematica ${}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}$

- incassa i premi P_t
- paga le prestazioni caso vita anticipate C_t^{va}
- investe al tasso tecnico i
- paga a fine anno le eventuali prestazioni caso vita posticipate C_t^{vp},
- paga a fine anno le eventuali prestazioni caso morte posticipate C_t^m

si ritrova automaticamente al tempo $t+1$ con la riserva matematica ${}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}$ ed è quindi coperto, in media, rispetto alle ipotesi sulla mortalità date dalla base tecnica del I ordine.

Premio di rischio e premio di risparmio

Partendo dalla equazione di Fouret

$$ {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + P_t - C_t^{va} = {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}} + C_{t+1}^{m} \cdot v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}} + C_{t+1}^{vp} \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}}. $$

e ricavando il premio P_t, si ottiene

$$ \begin{aligned} P_t &= -{}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + C_t^{va} + {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}} + C_{t+1}^{m} \cdot v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}} + C_{t+1}^{vp} \cdot v \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}} = \\ &= -{}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + C_t^{va} + {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot v \cdot (1 - \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}}) + C_{t+1}^{m} \cdot v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}} + C_{t+1}^{vp} \cdot v \cdot (1 - \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}}) = \\ &= (C_{t+1}^{m} - C_{t+1}^{vp} - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}) \cdot v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}} + ({}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot v - {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + C_{t+1}^{vp} \cdot v + C_t^{va}). \end{aligned} $$

Analizziamo nel dettaglio questa decomposizione. La quantità

$$ C_{t+1}^{m} - C_{t+1}^{vp} - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} $$

prende tradizionalmente il nome di *capitale sotto rischio*, dove con "rischio" si intende qui il rischio di morte dell'assicurato.

Premio di rischio e premio di risparmio

Nel caso in cui l'assicurato muoia tra t e $t+1$, l'assicuratore deve pagare la prestazione caso morte C^m_{t+1}, risparmia la prestazione caso vita posticipata C^{vp}_{t+1} e non deve più costituire la riserva ${}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x}$.
Il capitale sotto rischio rappresenta quindi la sua perdita in caso di morte dell'assicurato. Le quantità C^{vp}_{t+1} e ${}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x}$ compaiono con segno negativo nel capitale sotto rischio in quanto sono dei "risparmi" in caso di morte dell'assicurato. La quantità

$$P^R_t = (C^m_{t+1} - C^{vp}_{t+1} - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x}) \cdot v \cdot \mathbf{q_{x+t}}$$

prende il nome di *premio di rischio* ed è il valore attuariale in t del capitale sotto rischio. Il premio di rischio rappresenta la componente del premio P_t che copre la perdita dell'assicuratore in caso di morte tra t e $t+1$.

Premio di rischio e premio di risparmio

La rimanente parte del premio è data da

$$P_t^S = {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x} \cdot v - {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V_x} + C_{t+1}^{vp} \cdot v + C_t^{va}$$

e prende il nome di *premio di risparmio* e serve a finanziare le prestazioni caso vita anticipate e posticipate e l'incremento della riserva. Sottraendo da entrambi i membri della equazione di Fouret P_t^R, si ottiene

$$\begin{aligned} {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V_x} + P_t^S - C_t^{va} = {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x} \cdot v \cdot \mathbf{p_{x+t}} + C_{t+1}^m \cdot v \cdot \mathbf{q_{x+t}} + C_{t+1}^{vp} \cdot v \cdot \mathbf{p_{x+t}} + \\ -(C_{t+1}^m - C_{t+1}^{vp} - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x}) \cdot v \cdot \mathbf{q_{x+t}} = ({}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x} + C_{t+1}^{vp}) \cdot v, \end{aligned}$$

da cui segue

$${}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x} = \left({}_{\mathbf{t}}\mathbf{V_x} + P_t^S - C_t^{va}\right) \cdot (1+i) - C_{t+1}^{vp}.$$

Premio di rischio e premio di risparmio

Questa formula è puramente finanziaria, nel senso che non contiene in modo esplicito le probabilità di vita e di morte, e illustra la interpretazione di P_t^S come premio "di risparmio".
Il premio di risparmio P_t^S svolge infatti tre funzioni:

- contribuisce a pagare la prestazione caso vita anticipata C_t^{va}
- finanzia l'incremente della riserva al tasso i
- contribuisce a pagare la prestazione caso vita posticipata C_{t+1}^{vp}.

Consideriamo come esempio una polizza temporanea caso morte con premio annuo P, capitale assicurato C e scadenza tra n anni. Il premio di rischio è pari a

$$P_t^R = (C - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x}) \cdot v \cdot \mathbf{q_{x+t}}$$

Esempio

e ricordando che la riserva matematica dopo $t+1$ anni è data da

$$ {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} = C \cdot {}_{\mathbf{n-t-1}}\mathbf{A}_{\mathbf{x+t+1}} - P \cdot {}_{\mathbf{n-t-1}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x+t+1}} $$

si ottiene

$$ P_t^R = [C \cdot (1 - {}_{\mathbf{n-t-1}}\mathbf{A}_{\mathbf{x+t+1}}) + P \cdot {}_{\mathbf{n-t-1}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x+t+1}}] \cdot v \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}} $$

mentre il premio di risparmio è dato da

$$ \begin{aligned} P_t^S &= {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot v - {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} = \\ &= C \cdot \left({}_{\mathbf{n-t-1}}\mathbf{A}_{\mathbf{x+t-1}} \cdot v - {}_{\mathbf{n-t}}\mathbf{A}_{\mathbf{x+t}}\right) - P \cdot \left({}_{\mathbf{n-t-1}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x+t-1}} \cdot v - {}_{\mathbf{n-t}}\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{x+t}}\right). \end{aligned} $$

Dato che non ci sono prestazioni vita, si ha semplicemente

$$ {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} = \left({}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + P_t^S\right) \cdot (1+i). $$

La decomposizione dell'utile

La polizza è in equilibrio attuariale rispetto alla base tecnica costituita da un tasso i e da un modello della mortalità, di solito modificato in senso prudenziale. L'utile della compagnia assicuratrice è determinato dalla differenza tra il tasso reale di rendimento delle riserve e il tasso i (*utile finanziario*) e tra la differenza tra la mortalità realizzata e le probabilità di morte previste dalla base tecnica (*utile da mortalità*).
Introduciamo preliminarmente il concetto di riserva matematica *completa*

$$ {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{+} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + P_t - C_t^{va}. $$

che rappresenta il valore attuariale delle prestazioni ancora da pagare *escluse quelle caso vita anticipate* meno il valore attuariale dei premi ancora da prendere *escluso il premio appena riscosso al tempo* t.

La determinazione dell'utile

Indichiamo con R_{t+1} il rendimento aleatorio realizzato dai titoli in cui è investita la riserva sull'intervallo di tempo $(t, t+1)$, che in generale sarà diverso dal tasso i. Al tempo $t+1$, l'assicuratore:

- ha un portafoglio di attivi di valore ${}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{+} \cdot (1 + R_{t+1})$
- deve pagare la eventuale prestazione caso morte C_{t+1}^{m}
- deve pagare la eventuale prestazione caso vita C_{t+1}^{vp}
- deve ricostituire la riserva matematica ${}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}$ se l'assicurato è ancora in vita.

L'utile realizzato nell'intervallo di tempo $(t, t+1)$ è quindi dato da

$$U_{t+1} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{+} \cdot (1 + R_{t+1}) - C_{t+1}^{m} \cdot \mathbf{1}_{t+1} - C_{t+1}^{vp} \cdot (1 - \mathbf{1}_{t+1}) - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot (1 - \mathbf{1}_{t+1}),$$

dove la variabile casuale $\mathbf{1}_{t+1}$ vale 1 se l'assicurato muore tra t e $t+1$ e 0 altrimenti.

La determinazione dell'utile

Per confronto, la equazione di Fouret può essere riscritta nella forma

$$0 = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{+} \cdot (1+i) - C_{t+1}^{m} \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}} - C_{t+1}^{vp} \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}} - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}}.$$

Nella equazione di Fouret compaiono i valori attesi rispetto alle basi tecniche del primo ordine:

$$\begin{aligned} E_t[R_{t+1}] &= i \\ E_t[\mathbf{1}_{t+1}] &= \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}} \\ E_t[1 - \mathbf{1}_{t+1}] &= \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$E_t[U_{t+1}] = 0.$$

Un modo equivalente di descrivere l'equilibrio attuariale al tempo t è che il valore atteso dell'utile calcolato usando la base tecnica è pari a 0.

Formula di Homans

Sottarendo dall'utile U_{t+1} la equazione di Fouret, otteniamo

$$\begin{aligned} U_{t+1} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{+} \cdot (R_{t+1} - i) - C_{t+1}^{m} \cdot (\mathbf{1}_{t+1} - \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}}) \\ - ({}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + C_{t+1}^{vp}) \cdot (1 - \mathbf{1}_{t+1} - \mathbf{p}_{\mathbf{x+t}}), \end{aligned}$$

da cui otteniamo la *formula di contribuzione di Homans*:

$$U_{t+1} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{+} \cdot (R_{t+1} - i) - (C_{t+1}^{m} - C_{t+1}^{vp} - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{1}_{t+1} - \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}}).$$

L'utile è quindi dato dalla somma dell'*utile finanziario*, dato da

$$U_{t+1}^{f} = {}_{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^{+} \cdot (R_{t+1} - i),$$

e dell'*utile da mortalità*, dato da

$$U_{t+1}^{m} = -(C_{t+1}^{m} - C_{t+1}^{vp} - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{1}_{t+1} - \mathbf{q}_{\mathbf{x+t}}).$$

Formula di Homans

Ricordando che la quantità

$$C_{t+1}^{m} - C_{t+1}^{vp} - {}_{\mathbf{t+1}}\mathbf{V_x}$$

rappresenta il capitale di rischio, si ha che U_{t+1}^{m} è positivo in due casi:

- se il capitale di rischio è positivo (come capita nelle polizze temporanee caso morte) e si ha sottomortalità
- se il capitale di rischio è negativo (come capita nelle polizze di capitale differito) e si ha sovramortalità.

Viceversa, l'utile è negativo

- se il capitale di rischio è positivo e si ha sovramortalità (rispetto alla base tecnica del primo ordine)
- se il capitale di rischio è negativo e si ha sottomortalità (rispetto alla base tecnica del primo ordine)

Per essere prudenziale, l'assicuratore *aumenta* le probabilità di morte con capitale di rischio positivo e le *riduce* in caso di capitale di rischio negativo.