Premio di indifferenza e premio esponenziale

Fabio Bellini

Università di Milano-Bicocca

fabio.bellini@unimib.it

20 novembre 2021

La teoria della utilità attesa

Storicamente, la teoria della utilità attesa nasce nel 1738, con la soluzione ad opera del matematico svizzero Daniel Bernoulli del cosiddetto *paradosso di San Pietroburgo*.

Il gioco del casinò di San Pietroburgo

Viene lanciata una moneta; se esce testa, il giocatore vince 1; se esce croce, la moneta viene lanciata nuovamente. Se esce testa al secondo lancio, il giocatore vince 2, altrimenti la moneta viene lanciata nuovamente. Se esce testa al terzo lancio, il giocatore vince 4, altrimenti la moneta viene lanciata nuovamente, e così via.

Il giocatore quindi vince sempre, e vince un importo tanto più elevato quanto maggiore è il tempo di attesa della prima testa.

Quanto sareste disposti a pagare per partecipare a questo gioco?

Il gioco di San Pietroburgo

Indichiamo con T il tempo di attesa della prima testa. Dato che la probabilità di fare testa al primo lancio è pari a $\frac{1}{2}$, si ha che

$$P(T = 1) = \frac{1}{2}.$$

L'evento $(T = 2)$ corrisponde ad aver fatto croce al primo lancio e testa al secondo; dato che lanci distinti sono indipendenti, abbiamo che

$$P(T = 2) = \frac{1}{4}.$$

Più in generale, la prima testa compare al lancio k-esimo se escono $k - 1$ croci seguite da una testa, quindi

$$P(T = k) = \frac{1}{2^k}.$$

Il gioco di San Pietroburgo

L'esperienza ci insegna che prima o poi lanciando una moneta esce testa. La matematica conferma questa intuizione:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(T=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1,$$

dove abbiamo usato la fondamentale formula per la somma della serie geometrica. Non a caso, si dice che T ha una *distribuzione geometrica*.

Vincita	**Probabilità**
1	1/2
2	1/4
4	1/8
8	1/16
...	...

Quanto siamo disposti a pagare per questa vincita aleatoria? La risposta più semplice è la media.

Quanto vale la vincita media?

Il gioco di San Pietroburgo

La vincita media è data da

$$1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = +\infty$$

Il "paradosso" consiste nel fatto che la vincita media è infinita, quindi l'idea intuitiva di "prezzare" questa lotteria con la sua vincita media non è applicabile. La soluzione proposta da Daniel Bernoulli consiste nel calcolare la media non della vincita, ma della *funzione di utilità* della vincita, con $u(x) = \log x$. Se indichiamo la utilità media con U, si ha

$$U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log(2^{k-1})}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)\log 2}{2^k} =$$

$$= \log 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} < +\infty.$$

La teoria della utilità attesa

La soluzione proposta da Daniel Bernoulli al paradosso di San Pietroburgo segna la nascita della *teoria della utilità attesa*, che prescrive che le alternative incerte X debbano essere valutate secondo la loro *utilità attesa*

$$U(X) = \mathbb{E}[u(X)],$$

dove la funzione $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prende il nome di *utilità monetaria* oppure *utilità di cose certe*. La funzione u è nondecrescente (un importo maggiore è preferibile a un importo inferiore) e concava (la concavità di u è equivalente alla avversione al rischio dell'agente economico).
Von Neumann e Morgenstern (1947) hanno dimostrato che un agente economico dotato di una relazione di preferenza tra le alternative incerte soddisfacente ad alcuni assiomi di "razionalità" sceglie in base al criterio della utilità attesa.

Esempio

Se consideriamo le variabili casuali

$$X_1 = \begin{cases} 100 \text{ con prob. } \frac{1}{3} \\ 150 \text{ con prob. } \frac{1}{3} \\ 200 \text{ con prob. } \frac{1}{3} \end{cases} \quad e \quad X_2 = \begin{cases} 100 \text{ con prob. } \frac{1}{2} \\ 200 \text{ con prob. } \frac{1}{2} \end{cases}$$

un agente economico dotato della funzione di utilità $u(x) = \log x$ calcola le due utilità attese

$$U(X_1) = \sum_{k=1}^{3} p_k u(x_k) = \frac{1}{3}\log(100) + \frac{1}{3}\log(150) + \frac{1}{3}\log(200) \simeq 4,97$$

$$U(X_2) = \sum_{k=1}^{2} p_k u(x_k) = \frac{1}{2}\log(100) + \frac{1}{2}\log(200) \simeq 4,95$$

e di consequenza preferisce la lotteria X_1.

Veniamo alla applicazione della teoria della utilità attesa al problema del calcolo del premio. Analizziamo la situazione dal punto di vista dell'assicuratore, dotato di funzione di utilità $u(x)$.
Introduciamo le seguenti notazioni:

- D è la variabile casuale *positiva* che rappresenta il *danno* che dovrà essere risarcito
- P è il *premio* che viene pagato dal contraente all'assicuratore, il cui importo deve essere determinato
- c rappresenta il patrimonio iniziale dell'assicuratore
- i rappresenta il tasso di interesse annuo privo di rischio, al quale l'assicuratore può investire in regime di capitalizzazione composta

Immaginiamo per semplicità che il contratto abbia una validità di un anno.

Teoria della utilità e calcolo del premio

L'assicuratore confronta due possibilità: assicurare il danno D oppure no. Nel primo caso, la sua posizione complessiva sarà rappresentata dalla variabile casuale

$$X_1 = (c + P)(1 + i) - D$$

infatti l'assicuratore investe il premio ricevuto P insieme al suo capitale iniziale c, ed eventualmente rimborsa il danno aleatorio D.
Nel secondo caso, la posizione complessiva dell'assicuratore è certa ed è data da

$$X_2 = c(1 + i)$$

Il *premio di indifferenza* (noto anche come *premio puro* oppure *premio netto*) è quel valore di P per il quale le utilità attese di X_1 e di X_2 coincidono, cioè

$$\mathbb{E}[u(X_1)] = \mathbb{E}[u(X_2)].$$

Più esplicitamente, dato che X_2 è una quantità certa, il premio di indifferenza P è dato dalla soluzione della equazione

$$\mathbb{E}[u((c+P)(1+i)-D)] = u(c(1+i)).$$

Osserviamo che il premio di indifferenza P dipende dalla distribuzione di probabilità del danno D, dal tasso di interesse privo di rischio i e anche dal patrimonio iniziale dell'assicuratore c. Nel caso in cui $u(x) = x$, cioè l'assicuratore è neutrale al rischio, la equazione precedente diventa

$$\mathbb{E}[(c+P)(1+i)-D] = c(1+i)$$

da cui

$$P = \frac{\mathbb{E}[D]}{1+i},$$

quantità che rappresenta il valore medio del danno attualizzato al tasso i e viene tradizionalmente chiamata *premio equo*.

Teoria della utilità e calcolo del premio

Per effetto della avversione al rischio, il premio di indifferenza è maggiore del premio equo; infatti dalla disuguaglianza di Jensen si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[u\left((c+P)(1+i)-D\right)\right] \leq & u\left(\mathbb{E}\left[(c+P)(1+i)-D\right]\right) \\ = & u\left((c+P)(1+i)-\mathbb{E}[D]\right).\end{aligned}$$

D'altro canto dalla condizione di indifferenza sappiamo che

$$\mathbb{E}[u((c+P)(1+i)-D)] = u(c(1+i)),$$

quindi

$$u(c(1+i)) \leq u((c+P)(1+i)-\mathbb{E}[D]).$$

Dalla monotonia di u si ha

$$c(1+i) \leq (c+P)(1+i) - \mathbb{E}[D],$$

da cui otteniamo infine

$$\frac{\mathbb{E}[D]}{1+i} \leq P.$$

Se la funzione di utilità è concava (avversione al rischio), il premio di indifferenza è sempre maggiore del premio equo. Se invece la funzione di utilità è convessa, ripetendo il ragionamento precedente è possibile dimostrare che il premio di indifferenza è sempre minore del premio equo (fatelo per esercizio!).

Convessità e disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo innanzitutto che una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è convessa se $\forall x, y \in (a, b)$ e $\forall \lambda \in (0, 1)$, si ha che

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Graficamente, una funzione è convessa se prendendo due punti qualsiasi $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ sul suo grafico, il segmento che li unisce sta *al di sopra* del grafico di f. Esempi di funzioni convesse sono x^2, e^x, e^{-x}. Analogamente, una funzione è concava se $-f$ è una funzione convessa, cioè se $\forall x, y \in (a, b)$ e $\forall \lambda \in (0, 1)$, si ha la disuguaglianza opposta

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

In questo caso il segmento che unisce $(x, f(x)$ e $(y, f(y)$ sta sempre *al di sotto* del grafico di f. Esempi di funzioni concave sono $\sqrt{x}$, $\log x$, $-\exp(-x)$, e tutte le funzioni di utilità avverse al rischio di uso comune.

Convessità e disuguaglianza di Jensen

La convessità è un concetto importantissimo che può essere caratterizzato in molti modi diversi. Risultati analoghi valgono per le funzioni concave, a meno di un cambio di segno. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

- se f è due volte derivabile, allora $f'' \geq 0$.
- sia $x < y$. Il rapporto incrementale di f, dato da

  $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

  è una funzione crescente sia rispetto a x che rispetto a y.
- se f è derivabile e se $x < y$, si ha

  $$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Fate un disegno che illustri queste proprietà.

Convessità e disuguaglianza di Jensen

La definizione di convessità

$$f(\lambda x + (1-\lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

ci dice che la immagine della media di x e y con pesi λ e $1-\lambda$ è più piccola della media delle immagini. La disuguaglianza di Jensen ci dice che questa proprietà vale *per ogni variabile casuale* X: se f è convessa,

$$f\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

Se invece f è concava, vale la disuguaglianza opposta

$$f\left(\mathbb{E}[X]\right) \geq \mathbb{E}[f(X)].$$

Il caso della utilità esponenziale

La utilità esponenziale è data da

$$u(x) = -\exp(-\lambda x),$$

dove il parametro $\lambda > 0$ prende il nome di coefficiente di avversione al rischio assoluta dell'investitore e misura appunto la sua avversione al rischio. Per questa funzione di utilità, la equazione di indifferenza

$$\mathbb{E}\left[u\left((c+P)(1+i)-D\right)\right] = u\left(c(1+i)\right)$$

diventa

$$-\mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda((c+P)(1+i)-D)\right)\right] = -\exp\left(-\lambda c(1+i)\right),$$

Il caso della utilità esponenziale

osservando che la quantità deterministica $-\exp(-\lambda c(1+i))$ è presente anche al primo membro e quindi può essere semplificata, otteniamo

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda\left(P(1+i)-D\right)\right)\right]=1$$

da cui portando fuori dal valore atteso le costanti otteniamo

$$\exp\left(-\lambda P(1+i)\right)\mathbb{E}[\exp(\lambda D)]=1$$

da cui

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda D)]=\exp\left(\lambda P(1+i)\right)$$

e infine

$$P=\frac{\log\mathbb{E}[\exp(\lambda D)]}{\lambda(1+i)},\quad \lambda>0,$$

che viene chiamato semplicemente *premio esponenziale*.

Il premio esponenziale

Il premio esponenziale

$$P = \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda D)]}{\lambda(1+i)}, \quad \lambda > 0,$$

ha la caratteristica di non dipendere dal patrimonio iniziale dell'assicuratore c. E' immediato vedere che *il premio esponenziale coincide con il certo equivalente del danno, attualizzato al tasso* i; questo non è vero per una generica funzione di utilità u, in quanto il premio di indifferenza dipende anche da c, mentre il certo equivalente del danno no. Infine, osserviamo che il premio esponenziale dipende in modo esplicito dal coefficiente di avversione al rischio λ dell'assicuratore.

Esempi numerici

Consideriamo un danno di tipo bernoulliano, di importo pari a 100.000 Euro e che si verifica con probabilità del 1%. Ipotizziamo che il patrimonio iniziale dell'assicuratore sia $c = 1.000.000$ Euro e che il tasso di interesse annuo sia $i = 3\%$. Se l'assicuratore stipula una polizza al premio P, abbiamo

$$X_1 = \begin{cases} (1.000.000 + P) \times (1 + 0.03) & \text{con prob. } 99\% \\ (1.000.000 + P) \times (1 + 0.03) - 100.000 & \text{con prob. } 1\% \end{cases}$$

D'altro canto, non assicurando si ha

$$X_2 = 1.000.000 \times (1 + 0.03) = 1.030.000 \quad \text{con prob. } 100\%$$

Il premio di indifferenza è determinato dalla equazione

$$\mathbb{E}[u(X_1)] = \mathbb{E}[u(X_2)].$$

Esempi numerici

Se $u(x) = \sqrt{x}$, otteniamo

$$0,99 \times \sqrt{(1.000.000 + P) \times (1 + 0.03)} +$$
$$0,01 \times \sqrt{(1.000.000 + P) \times (1 + 0.03) - 100.000} = \sqrt{1.030.000},$$

da cui $P \simeq 995,38$ Euro. Notiamo che il premio equo è dato da

$$P_{equo} = \frac{\mathbb{E}[D]}{1+i} = \frac{0,01 \times 100.000}{1,03} \simeq 970,87 \text{ Euro}$$

Nel caso della utilità logaritmica $u(x) = \log x$, la equazione precedente diventa

$$0,99 \times \log\left(1.000.000 + P\right) \times (1 + 0.03) +$$
$$0,01 \times \log\left(1.000.000 + P\right) \times (1 + 0.03) - 100.000 = \log 1.030.000,$$

da cui otteniamo $P \simeq 1020,72$ Euro.

Esempi numerici

Consideriamo infine il caso della utilità esponenziale $u(x) = -\exp(-\lambda x)$. Come abbiamo visto, in questo caso il premio di indifferenza non dipende da c ed è dato da

$$P = \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda D)]}{\lambda(1+i)} = \frac{\log(0,99 \times 1 + 0,01 \times \exp(\lambda \times 100.000))}{\lambda \times 1,03}$$

Riportiamo alcuni valori nella tabella seguente:

lambda	**Premio**
0,000001	1.020,54
0,000002	1.073,58
0,000003	1.130,25
0,000004	1.190,82
0,000005	1.255,58

Possiamo osservare che il premio aumenta all'aumentare di λ, che esprime il coefficiente di avversione al rischio della utilità esponenziale considerata.