

Capitolo 5 - Elementi di onde nei plasmi

1 Energia delle onde elettromagnetiche in un plasma uniforme e senza campo magnetico

L'energia media \bar{W} di un'onda elettromagnetica che propaga in un plasma uniforme e privo di campo magnetico è descritta dall'espressione

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\epsilon_0\bar{E}_1^2 + \frac{\bar{B}_1^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\rho_e\bar{u}_1^2 = \bar{W}_E + \bar{W}_B + \bar{W}_M \quad (1)$$

dove E_1 e B_1 sono i campi elettrico e magnetico dell'onda, ρ_e è la densità di massa degli elettroni e u_1 è la velocità fluida degli elettroni. Come indicato dalla relazione sopra, l'energia si compone di tre contributi, dovuti ad E_1 , B_1 ed u_1 ed indicati dalle espressioni W_E , W_B e W_M .

Usando l'equazione di conservazione del momento, la legge di Faraday e la relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche in un plasma con le caratteristiche sopra descritte, mostrare che

- $\bar{W}_E = \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2}\bar{W}_M$
- $\bar{W}_B = \left(\frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} - 1\right)\bar{W}_M$

dove ω indica la frequenza angolare dell'onda e ω_{Pe} la frequenza angolare di plasma degli elettroni. Mostrare quindi che

- $\bar{W}_M = \frac{1}{2}\frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2}\bar{W}$
- $\bar{W}_E = \frac{1}{2}\bar{W}$
- $\bar{W}_B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2}\right)\bar{W}$

A cosa si riducono le tre espressioni sopra nel limite $\omega \gg \omega_{Pe}$? Giustificare la risposta da un punto di vista fisico.

2 Riflettometria

Per lo studio del profilo di densità degli elettroni nella ionosfera, vengono usati pacchetti di onde elettromagnetiche di breve durata. Questi sono riflessi quando raggiungono la densità critica e viene misurato il tempo intercorso dal lancio del pacchetto al suo ritorno a terra. Si assuma che la densità degli elettroni cresca linearmente tra 0 e $2 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$ tra le altitudini di 120 km e 220 km.

- Calcolare la massima frequenza dell'onda necessaria a sondare l'intero profilo di densità elettronica.
- Mostrare che il tempo di viaggio t_g del pacchetto nella ionosfera con la velocità di gruppo v_g , ovvero $t_g = \int ds/v_g$, si può scrivere come $t_g = \frac{1}{c} \int ds (1 - n(s)/n_c)^{-1/2}$, dove n_c è la densità critica associata all'altitudine fino a cui si vuole sondare. ds indica un elemento infinitesimo lungo la traiettoria dell'onda e $n(s)$ è la densità elettronica in un particolare punto della traiettoria dell'onda.
- Calcolare t_g nel caso in cui si voglia sondare l'intero profilo di densità elettronica e trovare quindi il tempo totale per raggiungere la sommità della ionosfera, ovvero t_g maggiorato del tempo di propagazione necessario all'onda per raggiungere l'inizio della ionosfera.