Cap. 6 - Elementi di collisioni nei plasmi

1 Equazione della diffusione in una dimensione

Si vuole risolvere l'equazione della diffusione per la densità n in assenza di sorgenti

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \nabla^2 n = 0 \tag{1}$$

in geometria piana, in una dimensione. D_a indica il coefficiente di diffusione ambipolare, supposto noto ed uniforme. Si suppone che il plasma sia esteso da $x = -L$ a $x = L$ e soddisfi la condizione al contorno $n(\pm L) = 0$.

- Risolvendo per separazione di variabili, cercando una soluzione fattorizzata del tipo $n(x,t) = X(x)T(t)$, mostrare che la soluzione generale può essere scritta nella forma

$$n(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{L}\right)\exp\left(-t/\tau_n\right) \tag{2}$$

  essendo $\tau_n = \frac{L^2}{D_a \pi^2}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}$ e A_n dei coefficienti opportuni. Ciascun termine n è detto "modo di diffusione". In particolare, osservare che i modi di diffusione più alti decadono più rapidamente.

- Si introduce ora, per lo stesso plasma unidimensionale sopra descritto, un termine di sorgente $S(x,t) = S_0\delta(x)$ nell'equazione di diffusione, di modo che l'equazione è ora

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \nabla^2 n = S_0\delta(x) \tag{3}$$

  Determinare il profilo di densità $n(x)$ che si stabilisce nello stato stazionario (cioè quando $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$), verificando che

$$n(x) = \frac{S_0 L}{2D_a}\left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \tag{4}$$