Il premio di Esscher

Fabio Bellini

Università di Milano-Bicocca

fabio.bellini@unimib.it

9 dicembre 2021

La trasformazione di Esscher

Uno dei metodi più semplici per modificare la distribuzione di probabilità della perdita in senso prudenziale è la cosiddetta *trasformazione di Esscher*, dal nome dell'attuario danese Fredrik Esscher. L'idea è molto semplice: se ipotizziamo che il danno abbia una distribuzione discreta del tipo

$$D = \begin{cases} d_1 \text{ con prob. } p_1 \\ d_2 \text{ con prob. } p_2 \\ \dots \\ d_n \text{ con prob. } p_n \end{cases},$$

moltiplichiamo ciascun probabilità p_k per il fattore $\exp(\alpha d_k)$, con $\alpha > 0$, e poi normalizziamo in modo che la somma delle probabilità sia pari a 1. In questo modo le probabilità di danni elevati vengono sovrastimate, mentre quelle di danni bassi vengono sottostimate.

La trasformazione di Esscher

Più formalmente, definiamo le probabilità trasformate

$$q_k = \frac{p_k \exp(\alpha d_k)}{\sum_{k=1}^n p_k \exp(\alpha d_k)}.$$

Evidentemente se $p_k > 0$ si ha $q_k > 0$ e

$$\sum_{k=1}^n q_k = \sum_{k=1}^n \frac{p_k \exp(\alpha d_k)}{\sum_{k=1}^n p_k \exp(\alpha d_k)} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \exp(\alpha d_k)}{\sum_{k=1}^n p_k \exp(\alpha d_k)} = 1,$$

e le probabilità q_k sono maggiori di p_k per valori alti del danno d_k.

Esempio numerico

Consideriamo un datore di lavoro che paga un'assicurazione contro gli infortuni per i suoi 10 dipendenti. Il risarcimento è fissato in 1.000.000 Euro e ipotizziamo che la probabilità che a ciascuno dei dipendenti avvenga un infortunio in un anno sia $0,1\%$.
Ipotizzando per semplicità che gli infortuni siano eventi indipendenti, la distribuzione del numero degli infortuni N è una binomiale $B(10; 0,001)$.
Considerando un tasso tecnico $i = 1\%$, il premio equo è dato da

$$P = \frac{\mathbb{E}[D]}{1+i} = 1.000.000 \times \frac{\mathbb{E}[N]}{1+i} = 1.000.000 \times \frac{10 \times 0,001}{1,01} \simeq 9900 \text{ Euro},$$

dove abbiamo usato la fondamentale formula $\mathbb{E}[N] = np$ se $N \sim Bin(n; p)$.
Nella tabella nella pagina seguente vediamo cosa succede operando una trasformazione di Esscher con $\alpha = 0,1$.

Esempio numerico

Danno	Prob.	Prob. prudenziale
0	9,90E-01	9,89E-01
1	9,91E-03	10,9E-03
2	4,46E-05	5,45E-05
3	1,19E-07	1,61E-07
4	2,09E-10	3,11E-10
5	2,51E-13	4,13E-13
6	2,09E-16	3,81E-16
7	1,20E-19	2,41E-19
8	4,49E-23	9,98E-23
9	9,99E-27	24,5E-27
10	1,00E-30	2,72E-30

Trasformazione di Esscher con $\alpha = 0,1$

Esempio numerico

Se calcoliamo il premio usando le probabilità prudenziali otteniamo $P \simeq 10941$ Euro. Nella tabella seguente riportiamo il premio al variare del parametro α:

α	**Premio**
0	9901 Euro
0,02	10101 Euro
0,04	10305 Euro
0,06	10513 Euro
0,08	10725 Euro
0,1	10941 Euro

Premi di Esscher al variare del parametro α.

La trasformazione di Esscher nel caso continuo

Nel caso in cui una generica variabile casuale X ha una distribuzione continua con densità di probabilità $f(x)$, la trasformazione di Esscher è definita in modo analogo:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\exp(\alpha x) f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha x) f(x)\, dx}, \text{ con } \alpha > 0.$$

La densità di probabilità $f(x)$ viene ripesata con il fattore $\exp(\alpha x)$ e quello che si ottiene viene normalizzato in modo da essere ancora una densità di probabilità. Si ha infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)\, dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha x) f(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha x) f(x)\, dx} = 1.$$

La funzione generatrice dei momenti della trasformata

Uno dei vantaggi della trasformazione di Esscher è che è molto facile calcolare la funzione generatrice dei momenti della variabile trasformata $\tilde{X}$. Si ha infatti

$$\mathbb{E}[\exp(t\tilde{X})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\tilde{f}(x)\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\exp(\alpha x)f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha x)f(x)\,dx} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left((t+\alpha)x\right) f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha x)f(x)\,dx} = \frac{\mathbb{E}[\exp\left((t+\alpha)X\right)]}{\mathbb{E}[\exp(\alpha X)]}.$$

La funzione generatrice dei momenti della trasformata

Ricordando la definizione della f.g.m. di una variabile casuale X

$$M_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)],$$

vediamo che la uguaglianza della slide precedente può essere scritta come

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+\alpha)}{M_X(\alpha)}.$$

Vediamo cioè che *la f.g.m. della variabile trasformata $\tilde{X}$ può essere facilmente calcolata a partire da quella di X*. Questa formula vale sia nekl caso discreto che nel caso continuo; la applicheremo per calcolare la trasformazione di Esscher della Bernoulli, della binomiale, della Poisson, della normale, della esponenziale e della Gamma.

Bernoulli

La variabile casuale di Bernoulli o indicatrice ha distribuzione

$$X = \begin{cases} 1 \text{ con prob. } p \\ 0 \text{ con prob. } q = 1 - p. \end{cases}$$

La f.g.m. della Bernoulli è

$$M_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = pe^t + qe^0 = pe^t + q.$$

Si ha

$$\frac{M_X(t+\alpha)}{M_x(\alpha)} = \frac{pe^{t+\alpha} + q}{pe^\alpha + q} = \frac{pe^\alpha e^t + q}{pe^\alpha + q},$$

che è la f.g.m. della variabile casuale sempre di Bernoulli data da

$$\tilde{X} = \begin{cases} 1 \text{ con prob. } \frac{pe^\alpha}{pe^\alpha + q} \\ 0 \text{ con prob. } \frac{q}{pe^\alpha + q} \end{cases}$$

Binomiale

La binomiale con parametri n e p rappresenta il numero di teste in n lanci indipendenti di una moneta, in cui la probabilità di una testa è p. La binomiale è la somma di n variabili casuali di Bernoulli indipendenti e identicamente distribuite, quindi la sua f.g.m. è

$$M_X(t) = (pe^t + q)^n,$$

poiché la f.g.m. di una somma di variabili indipendenti è il prodotto delle f.g.m. Si ha $M_X(t+\alpha) = (pe^{t+\alpha} + q)^n$ da cui otteniamo

$$\begin{aligned} M_{\tilde{X}}(t) &= \frac{M_X(t+\alpha)}{M_X(\alpha)} = \left(\frac{pe^{t+\alpha} + q}{pe^\alpha + q}\right)^n = \\ &= \left(\frac{pe^{t+\alpha}}{pe^\alpha + q} + \frac{q}{pe^\alpha + q}\right)^n = (\tilde{p}e^t + \tilde{q})^n, \end{aligned}$$

dove come prima

$$\tilde{p} = \frac{pe^\alpha}{pe^\alpha + q}, \tilde{q} = \frac{q}{pe^\alpha + q}.$$

La variabile aleatoria trasformata $\tilde{X}$ è ancora Binomiale con parametri $(n, \tilde{p})$. Si può anche osservare che $\tilde{p}$ è una funzione crescente rispetto ad α, pertanto anche qui $\mathbb{E}[\tilde{X}] > \mathbb{E}[X]$ se $\alpha > 0$.
Infine, se X ha una distribuzione di Poisson con parametro λ, cioè

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda),$$

come noto si ha

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}, \qquad M_X(t+\alpha) = e^{\lambda(e^{t+\alpha}-1)}$$

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+\alpha)}{M_X(\alpha)} = \frac{e^{\lambda(e^{t+\alpha}-1)}}{e^{\lambda(e^{\alpha}-1)}} =$$

$$= e^{\lambda(e^{t+\alpha}-1-e^{\alpha}+1)} = e^{\lambda(e^{t+\alpha}-e^{\alpha})} = e^{\lambda e^{\alpha}(e^t-1)},$$

quindi $\tilde{X}$ ha una distribuzione di Poisson con parametro $\tilde{\lambda} = \lambda e^{\alpha} > \lambda$.

Il caso normale

Come abbiamo già ricordato, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, la f.g.m. è

$$M_X(t) = \exp\left(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right).$$

Abbiamo quindi che la f.g.m. della variabile trasformata è data da

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+\alpha)}{M_X(\alpha)} = \frac{\exp\left((t+\alpha)\mu + \frac{(t+\alpha)^2\sigma^2}{2}\right)}{\exp\left(\alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\exp\left(t\mu + \alpha\mu + \frac{(t^2+\alpha^2+2t\alpha)\sigma^2}{2}\right)}{\exp\left(\alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right)} = \exp\left(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2} + t\alpha\sigma^2\right) =$$

$$= \exp\left(t(\mu + \alpha\sigma^2) + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right).$$

Il caso normale

Se osserviamo la f.g.m. di $\tilde{X}$, vediamo che corrisponde a una distribuzione normale con la stessa varianza di X e con media $\mu + \alpha\sigma^2$.
Si ha pertanto che *la trasformazione di Esscher di una variabile $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ è ancora una variabile normale $\tilde{X} \sim N(\mu + \alpha\sigma^2, \sigma^2)$.*
Nel caso normale, la trasformazione di Esscher non cambia il tipo di distribuzione ma semplicemente trasforma la media da μ a $\mu + \alpha\sigma^2$, mentre la varianza rimane inalterata.
Osserviamo che l'incremento nella media è proporzionale al parametro α: maggiore è il valore di α, maggiore è il peso attribuito ai valori più elevati di X, a discapito di quelli più bassi, pertanto la media aumenta.

Il caso esponenziale

Immaginiamo ora che X abbia una distribuzione esponenziale, cioè

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \text{ con } x > 0 \text{ e } \lambda > 0.$$

Come noto $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ e la f.g.m. è

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^{+\infty} \exp(tx)\lambda \exp(-\lambda x)\, dx = \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \exp\left((t-\lambda)x\right)\, dx = \\ &= \lambda \left[\frac{\exp\left((t-\lambda)x\right)}{t-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \text{ per } t < \lambda. \end{aligned}$$

Il caso esponenziale

Usando nuovamente la formula

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+\alpha)}{M_X(\alpha)}$$

otteniamo

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda - t - \alpha}}{\frac{\lambda}{\lambda - \alpha}} = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda - t - \alpha}.$$

Ne segue che $\tilde{X}$ ha ancora una distribuzione esponenziale, in cui il parametro λ è sostituito da $\lambda - \alpha$, con $\alpha \in (0, \lambda)$. Osserviamo che

$$\mathbb{E}[\tilde{X}] = \frac{1}{\lambda - \alpha} > \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}[X].$$

Il caso gamma

Vediamo il caso della distribuzione Gamma, che ha densità

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx), \text{ con } a, b > 0,$$

dove $\Gamma(a)$ rappresenta la funzione Gamma

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \exp(-t)\, dt$$

che interpola i fattoriali nel senso che $\Gamma(a+1) = a!$.
La distribuzione Gamma è una generalizzazione della distribuzione esponenziale, che si ottiene come caso particolare ponendo $a = 1$.
La f.g.m. della Gamma è data da

$$M_X(t) = \left(\frac{b}{b-t} \right)^a,$$

Il caso gamma

quindi possiamo calcolare

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+\alpha)}{M_X(\alpha)} = \frac{\left(\frac{b}{b-t-\alpha}\right)^a}{\left(\frac{b}{b-\alpha}\right)^a} = \left(\frac{b-\alpha}{b-t-\alpha}\right)^a,$$

da cui osserviamo che $\tilde{X} \sim \Gamma(a, b-\alpha)$. Dato che la media della Gamma è pari a $\frac{a}{b}$, si ha

$$\mathbb{E}[\tilde{X}] = \frac{a}{b-\alpha} > \frac{a}{b} = \mathbb{E}[X].$$

Il premio di Esscher

Il premio di Esscher P_E è quindi in generale definito semplicemente come il premio equo, dopo avere trasformato la distribuzione di probabilità di D mediante una trasformazione di Esscher:

$$P_E(D) = \frac{1}{1+i} \frac{\mathbb{E}[D \exp(\alpha D)]}{\mathbb{E}[\exp(\alpha D)]}.$$

Come il premio esponenziale, anche il premio di Esscher è finito soltanto se $\mathbb{E}[\exp(\alpha D)] < +\infty$, cioè se la variabile casuale D ammette f.g.m. finita nel punto α.

Premio di Esscher e premio esponenziale

Il premio di Esscher e il premio esponenziale sono strettamente collegati tra di loro. Introduciamo innanzitutto il logaritmo della funzione generatrice dei momenti, dato da

$$g(x) = \log \mathbb{E}[\exp(xD)].$$

Si ha che $g(0) = 0$, e con strumenti matematici che vanno al di là di quelli che utilizziamo in questo corso è possibile dimostrare che la funzione g è convessa. La derivata della funzione g è data da

$$g'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\mathbb{E}[\exp(xD)]}{\mathbb{E}[\exp(xD)]} = \frac{\mathbb{E}[\frac{d}{dx}\exp(xD)]}{\mathbb{E}[\exp(xD)]} = \frac{\mathbb{E}[D\exp(xD)]}{\mathbb{E}[\exp(xD)]}.$$

Si ha quindi

$$P_E(D) = g'(\alpha)$$

e ricordando la definizione del premio esponenziale, si ha anche

$$P_{\exp}(D) = \frac{g(\lambda)}{\lambda}.$$

Premio di Esscher e premio esponenziale

Dalle proprietà delle funzioni convesse ricordate nelle slides sul premio di indifferenza abbiamo quindi tre conseguenze:

- il premio di Esscher è crescente rispetto al parametro α, poiché la derivata $g'(\alpha)$ di una funzione convessa è crescente
- il premio esponenziale è crescente rispetto al parametro λ, poiché il rapporto incrementale di una funzione convessa $g(\lambda)/\lambda$ è crescente
- se $\alpha = \lambda$ si ha che $P_E \geq P_{exp}$ in quanto la derivata di una funzione convessa è maggiore o uguale del rapporto incrementale sinistro, cioè

$$\frac{g(\lambda)}{\lambda} \leq g'(\lambda).$$