

I principi di calcolo del premio

Fabio Bellini

Università di Milano-Bicocca

fabio.bellini@unimib.it

16 dicembre 2021

L'impostazione assiomatica del calcolo del premio

Un “principio di calcolo del premio” (in inglese “premium principle”) è un metodo per associare a una variabile casuale nonnegativa D che rappresenta il danno il corrispondente premio $\pi(D)$.

La “impostazione assiomatica” del problema del calcolo del premio prevede che si specifichino delle proprietà considerate “desiderabili” e poi si veda quali metodi di calcolo del premio le soddisfano. Questo tema è strettamente collegato alla impostazione assiomatica del problema della determinazione del capitale di copertura (“capital requirement”), che ha originato il concetto di “misura coerente di rischio”.

Iniziamo elencando una serie di assiomi (alcuni ovvi e unanimemente accettati, altri meno ovvi, altri anche contraddittori tra di loro) che sono stati suggeriti in letteratura.

L'impostazione assiomatica del calcolo del premio

- massimo danno (**MD**)
- positività del caricamento di sicurezza (**POS**)
- positiva omogeneità (**OM**)
- traslatività (**TR**)
- monotonia (**MON**)
- costanza (**C**)
- additività per variabili indipendenti (**ADD-I**)

Massimo danno

L'assioma del “massimo danno” (in inglese a volte chiamato “no ripoff”) chiede semplicemente che se il danno D è una variabile casuale limitata superiormente, cioè se esiste una costante $M < +\infty$ tale che

$$P(D < M) = 1,$$

allora

$$\pi(D) \leq M. \quad \text{(MD)}$$

Il premio non può superare il massimo valore del danno: una proprietà ovvia e accettata da tutti. Se $i > 0$, l'assioma diventa

$$\pi(D) \leq \frac{M}{1+i},$$

cioè il premio non può superare il valore attuale del massimo danno.

L'assioma di 'positività del caricamento di sicurezza' richiede che il premio sia maggiore del premio equo:

$$\pi(D) > \frac{\mathbb{E}[D]}{1+i}. \quad (\text{POS})$$

Questa proprietà è molto naturale in quanto i premi devono coprire anche le spese di gestione e garantire un utile adeguato alla compagnia assicurativa. Questa proprietà può anche essere motivata dal fatto che è possibile dimostrare che la probabilità di rovina di un compagnia di assicurazione che pratici premi equi è pari a 1. Come abbiamo visto, il premio di indifferenza con una funzione di utilità u concava soddisfa la proprietà di positività del caricamento di sicurezza.

Positiva omogeneità

L'assioma di positiva omogeneità richiede che

$$\pi(\alpha D) = \alpha \pi(D), \quad \text{per ogni } \alpha > 0. \quad \text{(OM)}$$

L'idea è che se il danno viene moltiplicato per una costante positiva α , allora anche il corrispondente premio deve venire moltiplicato per α .

Questa proprietà esprime il fatto che il premio dovrebbe essere indipendente dalla scelta della unità di misura degli importi monetari. Ad esempio, se consideriamo un danno D espresso in Euro e indichiamo con D' lo stesso danno espresso in milioni di Euro, è ragionevole pensare che

$$\pi(D') = \pi\left(\frac{D}{1.000.000}\right) = \frac{\pi(D)}{1.000.000},$$

cioè che il premio non cambi, se non per il fatto di essere anch'esso convertito in milioni di Euro.

L'assioma di traslatività richiede che se aggiungiamo al danno un importo costante c , allora anche il premio aumenta della stessa costante:

$$\pi(D + c) = \pi(D) + c \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R} \quad \text{(TR)}$$

Se $i > 0$, l'assioma di traslatività diventa

$$\pi(D + c) = \pi(D) + \frac{c}{1 + i}.$$

L'idea è che se il danno ha una “componente certa” pari a c , l'assicuratore può sempre accantonare un importo pari a c (eventualmente attualizzato) per coprire la componente certa, e richiedere il premio $\pi(D)$ sulla componente incerta.

L'assioma di monotonia richiede che

$$D_1 \geq D_2 \Rightarrow \pi(D_1) \geq \pi(D_2), \quad \text{(MON)}$$

cioè il premio richiesto a un danno maggiore dovrebbe essere maggiore. La proprietà di costanza richiede che se $P(D = c) = 1$, cioè se l'importo del danno è certo ed è pari a c , allora anche

$$\pi(D) = c. \quad \text{(C)}$$

Nel caso $i > 0$, la proprietà di costanza diventa

$$\pi(D) = \frac{c}{1+i}.$$

Il premio da chiedere per un danno certo dovrebbe essere pari all'importo del danno stesso attualizzato.

Additività per variabili indipendenti

La proprietà di additività per variabili indipendenti richiede che se D_1 e D_2 sono variabili casuali indipendenti allora

$$\pi(D_1 + D_2) = \pi(D_1) + \pi(D_2). \quad (\mathbf{ADD})$$

L'idea è che se la entità del danno D_1 non influenza in alcun modo quella del danno D_2 , né in senso positivo né in senso negativo, allora il premio complessivo dovrebbe essere dato dalla somma dei due premi.

Analogamente al corrispondente assioma di indipendenza della teoria della utilità attesa, possiamo dire che questo assioma è sicuramente il più controverso rispetto a tutti quelli visti finora.

Vediamo ora alcuni esempi semplici principi di calcolo del premio:

- premio equo
- premio equo con caricamento percentuale fissato
- premio media-varianza
- premio media-deviazione standard
- premio esponenziale
- premio di Esscher

Ricordiamo che il premio equo è dato da

$$\pi(D) = \frac{\mathbb{E}[D]}{1+i}.$$

Non è evidentemente verificata la proprietà di positività del caricamento di sicurezza. Tutti gli altri assiomi sono verificati, con l'eccezione della proprietà di continuità.

Premio equo con caricamento percentuale fissato

Il premio equo con caricamento percentuale fissato è definito da

$$\pi(D) = (1 + \beta)\mathbb{E}[D], \quad \text{con } \beta > 0.$$

In sostanza, l'assicuratore applica al valore atteso del danno un caricamento percentuale β fissato, ad esempio $\beta = 30\%$.

Quali proprietà sono soddisfatte? Verifichiamo che **POS**, **OM**, **ADD** sono soddisfatte, mentre **TR** non lo è:

$$\pi(D) = (1 + \beta)\mathbb{E}[D] > \mathbb{E}[D]$$

$$\pi(\alpha D) = (1 + \beta)\mathbb{E}[\alpha D] = \alpha(1 + \beta)\mathbb{E}[D] = \alpha\pi(D)$$

$$\pi(D + c) = (1 + \beta)\mathbb{E}[D + c] = (1 + \beta)\mathbb{E}[D] + (1 + \beta)c \neq \pi(D) + c$$

$$\pi(D_1 + D_2) = (1 + \beta)\mathbb{E}[D_1 + D_2] = \pi(D_1) + \pi(D_2).$$

Il premio media-varianza è

$$\pi(D) = \mathbb{E}[D] + \beta \text{Var}[D], \quad \text{con } \beta > 0.$$

Questo premio soddisfa le proprietà **POS**, **TR**, **ADD** ma non **OM**:

$$\pi(D) = \mathbb{E}[D] + \beta \text{Var}[D] > \mathbb{E}[D]$$

$$\pi(\alpha D) = \mathbb{E}[\alpha D] + \beta \text{Var}[\alpha D] = \alpha \mathbb{E}[D] + \beta \alpha^2 \text{Var}[D] \neq \alpha \pi(D)$$

$$\pi(D + c) = \mathbb{E}[D + c] + \beta \text{Var}[D + c] = \mathbb{E}[D] + c + \beta \text{Var}[D] = \pi(D) + c$$

$$\pi(D_1 + D_2) = \mathbb{E}[D_1 + D_2] + \beta \text{Var}[D_1 + D_2] = \pi(D_1) + \pi(D_2),$$

infatti se D_1 e D_2 sono indipendenti $\text{Var}[D_1 + D_2] = \text{Var}[D_1] + \text{Var}[D_2]$.

Il premio media-varianza non soddisfa la proprietà di monotonia.
Consideriamo

$$D_1 = 3 \text{ e } D_2 = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } 1/2 \\ 2 & \text{con prob. } 1/2 \end{cases} .$$

Si ha chiaramente in ogni caso $D_1 > D_2$, quindi dalla proprietà di monotonia dovrebbe valere $\pi(D_1) > \pi(D_2)$.

Dato che $\mathbb{E}[D_1] = 3$, $\mathbb{E}[D_2] = 1$, $\text{Var}[D_1] = 0$, $\text{Var}[D_2] = 1$, possiamo osservare che per $\beta = 3$ si ha

$$\pi(D_1) = \mathbb{E}[D_1] + 3 \times \text{Var}[D_1] = 3 \text{ e } \pi(D_2) = \mathbb{E}[D_2] + 3 \times \text{Var}[D_2] = 4,$$

quindi la proprietà di monotonia non è soddisfatta.

Il coefficiente β in questo caso sarà tanto maggiore quanto maggiore è la avversione al rischio dell'assicuratore. Il premio media-varianza è analogo al criterio media-varianza della teoria del portafoglio; la distribuzione di probabilità del danno D è valutata soltanto attraverso i suoi primi due momenti. Si può dimostrare (in analogia alla cosiddetta “espressione approssimata del certo equivalente”) che il premio media-varianza è una buona approssimazione del premio di indifferenza se la varianza della lotteria è piccola e il patrimonio dell'assicuratore è grande. Un modo di avere la proprietà di positiva omogeneità è sostituire alla varianza la deviazione standard

$$\text{Std}[D] = \sqrt{\text{Var}[D]}.$$

Premio media-deviazione standard

Il *premio media-deviazione standard* è dato da

$$\pi(D) = \mathbb{E}(D) + \beta \text{Std}(D), \text{ con } \beta > 0.$$

Questo premio soddisfa le proprietà **POS**, **OM**, **TR** ma non **ADD**:

$$\pi(D) = \mathbb{E}(D) + \beta \text{Std}[D] > \mathbb{E}[D]$$

$$\pi(\alpha D) = \mathbb{E}[\alpha D] + \beta \text{Std}[\alpha D] = \alpha \mathbb{E}[D] + \beta \alpha \text{Std}[D] = \alpha \pi(D)$$

$$\pi(D + c) = \mathbb{E}[D + c] + \beta \text{Std}[D + c] = \mathbb{E}[D] + c + \beta \text{Std}[D] = \pi(D) + c$$

$$\pi(D_1 + D_2) = \mathbb{E}[D_1 + D_2] + \beta \text{Std}[D_1 + D_2] \neq \pi(D_1) + \pi(D_2),$$

in quanto se D_1 e D_2 sono indipendenti si ha

$$\text{Std}[D_1 + D_2] = \sqrt{(\text{Std}[D_1])^2 + (\text{Std}[D_2])^2} < \text{Std}[D_1] + \text{Std}[D_2].$$

Premio media-deviazione standard

Il premio media-deviazione standard soddisfa la proprietà di subadditività; per verificarlo, osserviamo che

$$\text{Cov}[D_1, D_2] = \text{Std}[D_1] \cdot \text{Std}[D_2] \cdot \text{Corr}[D_1, D_2] \leq \text{Std}[D_1] \cdot \text{Std}[D_2],$$

da cui otteniamo per qualsiasi coppia di variabili D_1 e D_2

$$\begin{aligned} \text{Std}[D_1 + D_2] &= \sqrt{\text{Std}^2[D_1] + \text{Std}^2[D_2] + 2 \cdot \text{Cov}[D_1, D_2]} \leq \\ &\leq \sqrt{\text{Std}^2[D_1] + \text{Std}^2[D_2] + 2 \cdot \text{Std}[D_1] \cdot \text{Std}[D_2]} = \\ &= \text{Std}[D_1] + \text{Std}[D_2]. \end{aligned}$$

Dalla subadditività della deviazione standard segue immediatamente quella del premio media-deviazione standard.

Premio esponenziale

Consideriamo il premio esponenziale, che nel caso $i = 0$ è dato da

$$\pi(D) = \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda D)]}{\lambda}, \quad \text{con } \lambda > 0.$$

Questo premio soddisfa le proprietà **POS**, **TR**, **ADD** ma non **OM**.

$$\pi(D) = \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda D)]}{\lambda} > \mathbb{E}[D] \text{ dalla disuguaglianza di Jensen}$$

$$\pi(\alpha D) = \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda \alpha D)]}{\lambda} \neq \alpha \pi(D)$$

$$\begin{aligned} \pi(D + c) &= \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda(D + c))]}{\lambda} = \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda D) \exp(\lambda c)]}{\lambda} = \\ &= \frac{\log(\exp(\lambda c) \mathbb{E}[\exp(\lambda D)])}{\lambda} = \frac{\lambda c + \log \mathbb{E}[\exp(\lambda D)]}{\lambda} \\ &= c + \pi(D). \end{aligned}$$

Infine, se D_1 e D_2 sono indipendenti,

$$\begin{aligned}\pi(D_1 + D_2) &= \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda(D_1 + D_2))]}{\lambda} = \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda D_1) \exp(\lambda D_2)]}{\lambda} = \\ &= \frac{\log(\mathbb{E}[\exp(\lambda D_1)] \mathbb{E}[\exp(\lambda D_2)])}{\lambda} = \\ &= \frac{\log \mathbb{E}[\exp(\lambda D_1)] + \log \mathbb{E}[\exp(\lambda D_2)]}{\lambda} = \pi(D_1) + \pi(D_2),\end{aligned}$$

poiché se D_1 e D_2 sono indipendenti allora anche $\exp(\lambda D_1)$ e $\exp(\lambda D_2)$ sono indipendenti.

Per quanto riguarda il premio esponenziale, dalla monotonia della funzione esponenziale e dalla positività di λ possiamo osservare che

$$D_1 \geq D_2 \Rightarrow \exp(\lambda D_1) \geq \exp(\lambda D_2),$$

e dalla monotonia del valore atteso e della funzione logaritmo si ha

$$\log \mathbb{E} [\exp(\lambda D_1)] \geq \log \mathbb{E} [\exp(\lambda D_2)],$$

pertanto possiamo concludere che la proprietà di monotonia

$$D_1 \geq D_2 \Rightarrow \pi(D_1) \geq \pi(D_2)$$

è soddisfatta.

Il premio di Esscher soddisfa la proprietà di traslatività, di additività per variabili indipendenti, ma non quella di monotonia, come può essere verificato con un semplice esempio. Siano X e Y due variabili aleatorie tali che $P(X = 0, Y = 0) = 1/3$, $P(X = 0, Y = 3) = 1/3$, $P(X = 6, Y = 6) = 1/3$. Chiaramente, si ha $X \leq Y$ e $P(X = 0) = 2/3$, $P(X = 6) = 1/3$, $P(Y = 0) = 1/3$, $P(Y = 3) = 1/3$, $P(Y = 6) = 1/3$. Calcoliamo il premio di Esscher per $\alpha = \frac{1}{2}$. Si ha

$$P_E(X) = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\frac{X}{2}}]}{\mathbb{E}[e^{\frac{X}{2}}]} = \frac{0 \cdot e^0 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot e^3 \cdot \frac{1}{3}}{e^0 \cdot \frac{2}{3} + e^3 \cdot \frac{1}{3}} \approx 5.46$$

$$P_E(Y) = \frac{\mathbb{E}[Ye^{\frac{Y}{2}}]}{\mathbb{E}[e^{\frac{Y}{2}}]} = \frac{0 \cdot e^0 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot e^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot e^3 \cdot \frac{1}{3}}{e^0 \cdot \frac{1}{3} + e^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} + e^3 \cdot \frac{1}{3}} \approx 5.24,$$

quindi $P_E(X) > P_E(Y)$.

Additività per variabili indipendenti

Verifichiamo che anche il premio di Esscher soddisfa la additività per variabili indipendenti. Poniamo per semplicità $i = 0$.

$$\begin{aligned}P_E(D_1 + D_2) &= \frac{\mathbb{E}[(D_1 + D_2)e^{\alpha(D_1+D_2)}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha(D_1+D_2)}]} \\&= \frac{\mathbb{E}[D_1 e^{\alpha D_1} e^{\alpha D_2} + D_2 e^{\alpha D_1} e^{\alpha D_2}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha D_1} e^{\alpha D_2}]} \\&= \frac{\mathbb{E}[e^{\alpha D_2}]\mathbb{E}[D_1 e^{\alpha D_1}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha D_1}]\mathbb{E}[e^{\alpha D_2}]} + \frac{\mathbb{E}[e^{\alpha D_1}]\mathbb{E}[D_2 e^{\alpha D_2}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha D_1}]\mathbb{E}[e^{\alpha D_2}]} \\&= \frac{\mathbb{E}[D_1 e^{\alpha D_1}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha D_1}]} + \frac{\mathbb{E}[D_2 e^{\alpha D_2}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha D_2}]} = P_E(D_1) + P_E(D_2).\end{aligned}$$