Esercizi di ricapitolazione

F. Bellini

December 16, 2021

1 Mortalità

Esercizio 1.1 *Considerare la funzione*

$$S_0(x) = \frac{120 - x}{120}, \quad 0 \leq x \leq 120.$$

a) Disegnare il grafico di S_0 e verificare che può rappresentare una funzione di sopravvivenza

b) Quanto vale l'età massima ω in questo caso?

c) Calcolare la forza di mortalità μ_x e disegnarne il grafico

d) Calcolare la funzione di sopravvivenza condizionata $S_{20}(x)$ e disegnarne il grafico. Quale relazione sussiste tra $S_0(x)$ e $S_{20}(x)$?

e) Calcolare $\mathring{e}_0$ e $\mathring{e}_{20}$

f) Calcolare ${}_{20}p_{20}$, ${}_{20}q_{20}$, ${}_{20|10}q_{20}$

Soluzione 1.1 *c)* $\mu_x = \frac{1}{120-x}$ *d)* $S_{20}(x) = \frac{100-x}{100}$ *e)* $\mathring{e}_0 = 60$, $\mathring{e}_{20} = 50$ *f)* ${}_{20}p_{20} = 0.8$, ${}_{20}q_{20} = 0.2$, ${}_{20|10}q_{20} = 0.1$.

Esercizio 1.2 *Considerare la funzione*

$$S_0(x) = \frac{\sqrt{100 - x}}{10}, \quad 0 \leq x \leq 100.$$

a) Disegnare il grafico di S_0 e verificare che può rappresentare una funzione di sopravvivenza

b) Quanto vale l'età massima ω in questo caso?

c) Calcolare la forza di mortalità μ_x e disegnarne il grafico

d) Calcolare la funzione di sopravvivenza condizionata $S_{36}(x)$ e disegnarne il grafico. Quale relazione sussiste tra $S_0(x)$ e $S_{36}(x)$?

e) Calcolare $\overset{\circ}{e}_0$ *e* $\overset{\circ}{e}_{36}$

f) Calcolare $\mathbf{{}_{20}p_{36}}$, $\mathbf{{}_{20}q_{36}}$, $\mathbf{{}_{20|10}q_{36}}$

Soluzione 1.2 *c)* $\mu_x = \frac{1}{20\sqrt{100-x}}$ *d)* $S_{36}(x) = \frac{\sqrt{64-x}}{8}$ *e)* $\overset{\circ}{e}_0 = 66.67$, $\overset{\circ}{e}_{36} = 42.67$

Esercizio 1.3 *Considerare la funzione*

$$S_0(x) = \frac{10000 - x^2}{10000}.$$

a) Disegnare il grafico di S_0 *e verificare che può rappresentare una funzione di sopravvivenza*

b) Quanto vale l'età massima ω *in questo caso?*

c) Calcolare la forza di mortalità μ_x *e verificare che è una funzione strettamente crescente di* x

d) Calcolare $S_{80}(x)$

e) Calcolare $\mathbf{{}_{10}p_{80}}$, $\mathbf{{}_{10}q_{80}}$, $\mathbf{{}_{5|10}q_{80}}$

Esercizio 1.4 *Considerare la funzione*

$$S_0(x) = \frac{18000 - 110x - x^2}{18000}.$$

a) Disegnare il grafico di S_0 *e verificare che può rappresentare una funzione di sopravvivenza*

b) Quanto vale l'età massima ω *in questo caso?*

c) Calcolare $\mathbf{{}_{20}p_0}$

d) Calcolare $S_{20}(t)$

e) Calcolare la probabilità che un individuo di venti anni muoia tra le età di trenta e quaranta anni.

Esercizio 1.5 *Sapendo che* $\mathbf{q_x} = 0.001$, $\mathbf{q_{x+1}} = 0.002$, $\mathbf{q_{x+2}} = 0.003$, *calcolare:*

a) $\mathbf{p_x}$, $\mathbf{p_{x+1}}$, $\mathbf{p_{x+2}}$

b) $\mathbf{{}_2p_x}$, $\mathbf{{}_2q_x}$, $\mathbf{{}_3p_x}$, $\mathbf{{}_3q_x}$

c) $\mathbf{{}_{1|1}q_x}$, $\mathbf{{}_{2|1}q_x}$

Esercizio 1.6 *Sapendo che* $\mathbf{p_x} = 0.99$, $\mathbf{p_{x+1}} = 0.985$, $\mathbf{{}_3p_{x+1}} = 0.95$, $\mathbf{q_{x+3}} = 0.02$, *calcolare:*

a) $\mathbf{p_{x+3}}$

b) $\mathbf{{}_2p_x}$

c) $\mathbf{{}_2p_{x+1}}$

d) $\mathbf{{}_3p_x}$

e) $\mathbf{{}_{1|2}q_x}$.

Soluzione 1.3 *a)* $\mathbf{p_{x+3}} = 0.98$ *b)* $\mathbf{{}_2p_x} \simeq 0.975$ *c)* $\mathbf{{}_2p_{x+1}} \simeq 0.969$ *d)* $\mathbf{{}_3p_x} = 0.959$ *e)* $\mathbf{{}_{1|2}q_x} = 0.031$.

Esercizio 1.7 *Utilizzando la tavola di mortalità*

x	ℓ_x
40	98120
41	98021
42	97913
43	97795

calcolare le seguenti probabilità, spiegando il significato della notazione:

a) $\mathbf{p_{40}}$

b) $\mathbf{{}_3p_{40}}$

c) $\mathbf{{}_3q_{40}}$

d) $\mathbf{q_{40}}$, $\mathbf{{}_{1|1}q_{40}}$, $\mathbf{{}_{2|1}q_{40}}$

Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto d) coincide con la probabilità calcolata al punto c).

Esercizio 1.8 *Usando le tavole di mortalità ISTAT 2013 maschi fornite nelle slides, calcolare le seguenti probabilità:*

a) $\mathbf{p_{30}}$

b) $\mathbf{q_{30}}$

c) $\mathbf{{}_{10}p_{30}}$

d) $\mathbf{{}_{10}q_{30}}$

e) $\mathbf{{}_{i|1}q_{30}}$ *per* $i = 0, \ldots, 9$.

Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto e) coincide con la probabilità calcolata al punto d).

2 Valori attuariali

Esercizio 2.1 *Utilizzando la tavola di mortalità*

x	ℓ_x
50	96545
51	96286
52	96000
53	95686

e un tasso annuo $i = 5\%$ *calcolare il valore attuariale delle seguenti prestazioni per un individuo di età* $x = 50$*:*

a) *un capitale differito con scadenza tra* 3 *anni e capitale assicurato* $C =$ 100000 *Euro*

b) *una copertura temporanea caso morte con scadenza tra* 3 *anni e capitale assicurato* $C = 100000$ *Euro*

c) *una copertura temporanea caso morte con scadenza tra* 3 *anni e capitali assicurati decrescenti pari a* $C_1 = 100000$ *Euro,* $C_2 = 90000$ *Euro,* $C_3 =$ 80000 *Euro*

d) *una copertura temporanea caso morte con scadenza tra* 3 *anni e capitali assicurati pari ai debiti residui di un piano di ammortamento in* 3 *rate di un debito iniziale di* 100000 *Euro al tasso passivo* $j = 7\%$.

Soluzione 2.1 *a)* 85606 *Euro b)* 804 *Euro c)* 721 *Euro d)* 540 *Euro.*

Esercizio 2.2 *Utilizzando la tavola di mortalità*

x	ℓ_x
60	92410
61	91746
62	91010
63	90189

e un tasso annuo $i = 5\%$ *calcolare il valore attuariale delle seguenti prestazioni per un individuo di età* $x = 60$*:*

a) *una rendita vitalizia anticipata con scadenza tra* 3 *anni e rata pari a* $R =$ 10000 *Euro*

b) *una rendita vitalizia posticipata con scadenza tra* 3 *anni e rata pari a* $R = 10000$ *Euro*

Che relazione sussiste tra i valori attuariali delle due rendite? A quanto ammontano i valori attuariali delle due rendite nel caso in cui il tasso di interesse sia nullo? Confrontare i valori attuariali calcolati con i valori attuali delle stesse rendite calcolati sotto la ipotesi che siano nulle le probabilità di morte.

Soluzione 2.2 *a)* 28390 *Euro b)* 26820 *Euro.*

Esercizio 2.3 *Utilizzando la tavola di mortalità*

x	ℓ_x
70	82269
71	80649
72	78915
73	77080
74	75125

e il tasso tecnico $i = 5\%$, *calcolare* ${}_4\mathbf{E}_{70}$, ${}_3\mathbf{E}_{71}$, ${}_4\mathbf{A}_{70}$, ${}_3\mathbf{A}_{71}$, ${}_4\ddot{\mathbf{a}}_{70}$, ${}_3\ddot{\mathbf{a}}_{71}$, *e verificare le relazioni ricorsive*

$$\begin{aligned} {}_n\mathbf{E}_x &= v \cdot \mathbf{p}_x \cdot {}_{n-1}\mathbf{E}_{x+1} \\ {}_n\mathbf{A}_x &= v \cdot \mathbf{q}_x + v \cdot \mathbf{p}_x \cdot {}_{n-1}\mathbf{A}_{x+1} \\ {}_n\ddot{\mathbf{a}}_x &= 1 + v \cdot \mathbf{p}_x \cdot {}_{n-1}\ddot{\mathbf{a}}_{x+1} \end{aligned}$$

Esercizio 2.4 *Calcolare* ${}_n\bar{\mathbf{A}}_x$ *in un modello con forza di mortalità costante e pari a* λ. *Verificare che* $0 < {}_n\bar{\mathbf{A}}_x < 1$ *e che*

$$\bar{\mathbf{A}}_x = \lim_{n \to +\infty} {}_n\bar{\mathbf{A}}_x = \lambda/(\lambda - \log v).$$

Spiegare il significato attuariale di questa formula e discuterne la dipendenza dai parametri λ *e* v.

3 Calcolo del premio equo

Esercizio 3.1 *Utilizzando le basi tecniche dell'Esercizio 2.1, per ciascuna delle prestazioni considerate nei punti a), b), c), d), calcolare il premio unico iniziale e il premio annuo costante, nella ipotesi in cui vengano pagati tre premi annui anticipati.*

Soluzione 3.1 *a)* $P_{unico} = 85606$ *Euro,* $P_{annuo} = 30027$ *Euro b)* $P_{unico} = 804$ *Euro,* $P_{annuo} = 282$ *Euro c)* $P_{unico} = 721$ *Euro,* $P_{annuo} = 253$ *Euro d)* $P_{unico} = 540$ *Euro,* $P_{annuo} = 189$ *Euro.*

Esercizio 3.2 *Utilizzando le basi tecniche dell'Esercizio 2.1, per ciascuna delle prestazioni considerate nei punti b), c), d), calcolare il premio naturale e confrontarlo con il premio annuo costante calcolato nell'Esercizio 3.1. Verificare che il valore attuariale dei premi naturali coincide con il premio unico iniziale.*

Soluzione 3.2 *b)* $P_0^N = 255$ *Euro,* $P_1^N = 283$ *Euro,* $P_1^N = 311$ *Euro.*

4 Riserva matematica

Esercizio 4.1 *Utilizzando le basi tecniche dell'Esercizio 2.1 e la equazione di Fouret, calcolare le quantità* $_{\mathbf{1}}\mathbf{V_{50}}$, $_{\mathbf{2}}\mathbf{V_{50}}$, $_{\mathbf{3}}\mathbf{V_{50}}$ *nel caso della prestazione del punto a), sia nel caso in cui venga pagata con un premio unico iniziale che nel caso venga pagata con* 3 *premi annui costanti.*

Soluzione 4.1 *Con premio unico iniziale,* $_{\mathbf{1}}\mathbf{V_{50}} \simeq 90139$ *Euro,* $_{\mathbf{2}}\mathbf{V_{50}} \simeq 94931$ *Euro,* $_{\mathbf{3}}\mathbf{V_{50}} \simeq 100000$ *Euro. Con premio annuo costante,* $_{\mathbf{1}}\mathbf{V_{50}} \simeq 31617$ *Euro,* $_{\mathbf{2}}\mathbf{V_{50}} \simeq 64908$ *Euro,* $_{\mathbf{3}}\mathbf{V_{50}} \simeq 100000$ *Euro.*

Esercizio 4.2 *Utilizzando le basi tecniche dell'Esercizio 2.1 e la equazione di Fouret, calcolare le quantità* $_{\mathbf{1}}\mathbf{V_{50}}$, $_{\mathbf{2}}\mathbf{V_{50}}$, $_{\mathbf{3}}\mathbf{V_{50}}$ *nel caso della prestazione del punto b), sia nel caso in cui venga pagata con un premio unico iniziale che nel caso venga pagata con* 3 *premi annui costanti.*

Soluzione 4.2 *Con premio unico iniziale,* $_{\mathbf{1}}\mathbf{V_{50}} \simeq 566$ *Euro,* $_{\mathbf{2}}\mathbf{V_{50}} \simeq 295$ *Euro,* $_{\mathbf{3}}\mathbf{V_{50}} \simeq 0$ *Euro.*

5 Principi di calcolo del premio

Esercizio 5.1 *Calcolare il premio di indifferenza e il premio equo per il danno*

$$D = \begin{cases} 16 & \textit{con prob. } 1/2 \\ 0 & \textit{con prob. } 1/2 \end{cases}$$

sapendo che la funzione di utilità della compagnia di assicurazione è $u(x) = \sqrt{x}$, *il suo capitale iniziale è* $c = 16$ *e il tasso di interesse è nullo.*

Soluzione 5.1 $P_{ind} = 9$, $P_{equo} = 8$.

Esercizio 5.2 *Calcolare il premio di indifferenza e il premio equo per il danno*

$$D = \begin{cases} 1 & \textit{con prob. } 1/2 \\ 0 & \textit{con prob. } 1/2 \end{cases}$$

sapendo che la funzione di utilità della compagnia di assicurazione è $u(x) = \log x$, *il suo capitale iniziale è* $c = 1$ *e il tasso di interesse è nullo.*

Soluzione 5.2 $P_{ind} = (\sqrt{5} - 1)/2$, $P_{equo} = 1/2$.

Esercizio 5.3 *Calcolare il premio esponenziale e il premio equo per un danno* D *che ha distribuzione esponenziale con funzione di distribuzione*

$$F(x) = 1 - e^{-2x} \textit{ per } x \geq 0,$$

ipotizzando un tasso di interesse nullo e un coefficiente di avversione al rischio assoluta $\lambda = 1$.

Soluzione 5.3 $P_{ind} = \log 2$, $P_{equo} = 1/2$.

Esercizio 5.4 *Calcolare il premio equo, il premio esponenziale con parametro $\lambda = 1$ e il premio di Esscher con parametro $\alpha = 1$ per il danno*

$$D = D_1 + D_2$$

dove le variabili casuali D_1 e D_2 sono indipendenti e hanno la stessa distribuzione data da

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1/2 \\ 0 & \text{con prob. } 1/2 \end{cases},$$

ipotizzando che il tasso di interesse i sia nullo.

Soluzione 5.4 $P_{equo} = 1$, $P_{exp} \simeq 1,24$, $P_E \simeq 1,46$.

Esercizio 5.5 *Calcolare il premio equo, il premio esponenziale, il premio di Esscher, il premio media-varianza e il premio media-deviazione standard per la variabile casuale*

$$D = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } 1/3 \\ 1 & \text{con prob. } 1/3 \\ 2 & \text{con prob. } 1/3 \end{cases},$$

utilizzando come parametri $i = 5\%$, $\lambda = 1$ per il premio esponenziale, $\alpha = 1$ per il premio di Esscher, $\beta = 1$ per il premio media-varianza e per il premio media-deviazione standard.

Soluzione 5.5 $P_{equo} \simeq 0,952$, $P_{exp} \simeq 1,25$, $P_E \simeq 1,50$, $P_{mv} \simeq 1,59$, $P_{mstd} \simeq 1,73$.

Esercizio 5.6 *Calcolare il premio equo, il premio esponenziale, il premio di Esscher, il premio media-varianza e il premio media-deviazione standard per la variabile casuale*

$$D = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } 9/10 \\ 10 & \text{con prob. } 1/10 \end{cases},$$

utilizzando come parametri $i = 5\%$, $\lambda = 2$ per il premio esponenziale, $\alpha = 2$ per il premio di Esscher, $\beta = 2$ per il premio media-varianza e per il premio media-deviazione standard.

Soluzione 5.6 $P_{equo} \simeq 0,952$, $P_{exp} \simeq 8,43$, $P_E \simeq 9,52$, $P_{mv} \simeq 18,1$, $P_{mstd} \simeq 6,67$.