

1. La matrice esponenziale.

Sia dato il sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti

$$(1.1) \quad X' = AX$$

dove A è una matrice reale $n \times n$ costante. In base alla Proposizione 5.1 del Capitolo X, le soluzioni del sistema (1.1) sono definite su tutto \mathbb{R} .

Se $n = 1$, il sistema (1.1) si riduce all'equazione

$$x' = ax$$

le cui soluzioni sono le funzioni

$$(1.2) \quad x(t) = ce^{at}.$$

Si vedrà che l'integrale generale della (1.1) può essere scritto in una forma analoga alla (1.2). Per far ciò occorre introdurre la nozione di matrice esponenziale.

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n,n}$ costituito dalle matrici $n \times n$ a coefficienti reali. È immediato verificare che se si pone

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2},$$

$\mathbb{R}^{n,n}$ è uno spazio vettoriale normato. In effetti $\mathbb{R}^{n,n}$ può essere considerato come \mathbb{R}^{n^2} , in cui gli elementi vengono scritti sotto forma di matrice.

Oltre alle operazioni di somma e prodotto per scalari, tipiche degli spazi vettoriali, su $\mathbb{R}^{n,n}$ è definita un'altra operazione, il prodotto riga per colonna di due matrici.

Lemma 1.1. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Vale l'identità

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Dimostrazione. Se $C = AB$, allora

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Se indichiamo con A_i la riga (a_{i1}, \dots, a_{in}) e con B^j la colonna $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$,

si ha $c_{ij} = A_i \cdot B^j$.

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ai vettori A_i e B^j segue che

$$|c_{ij}| \leq \|A_i\| \|B^j\|.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \|C\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \|A_i\|^2 \|B^j\|^2 = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|A_i\|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \|B^j\|^2 \right) = \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2. \end{aligned}$$

La conclusione del Lemma 1.1 si estende facilmente al prodotto di più matrici: se $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora

$$\|A_1 A_2 \dots A_k\| \leq \|A_1\| \|A_2\| \dots \|A_k\|.$$

Lemma 1.2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. La serie

$$(1.3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

è convergente.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|$$

converge. Per il Lemma 1.1

$$\left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| = \frac{1}{k!} \|A \cdot A \cdot \dots \cdot A\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k.$$

Ma la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$ converge ed ha per somma $e^{\|A\|}$. Basta allora applicare il criterio del confronto.

Indichiamo adesso con $(A^k)_{ij}$ l'elemento di posto (i, j) della matrice A^k . Qualunque siano $i, j = 1, \dots, n$, poichè

$$|(A^k)_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i,j} (A^k)_{ij}^2} = \|A^k\|,$$

per il criterio delle confronto la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A^k)_{ij}$ converge. In altre parole, la serie numerica costituita dal generico elemento di posto (i, j) nella (1.3) converge. Il lemma segue per quanto visto nel § 6 del Capitolo VII. ■

Definizione 1.3. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si chiama matrice esponenziale di A la matrice

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Teorema 1.4. L'integrale generale del sistema (1.1) è dato da

$$X(t) = e^{tA} c$$

dove c è un generico vettore costante. In particolare $\Phi(t) = e^{tA}$ è una matrice fondamentale del sistema (1.1) e, fissata una qualunque base $\{w_1, \dots, w_n\}$ di \mathbb{R}^n , le n funzioni

$$X_i(t) = e^{tA} w_i$$

$(i = 1, \dots, n)$ formano un sistema fondamentale di soluzioni.

Dimostrazione. Sia $X(t) = e^{tA} c$, con $c \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$X'(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{tA} \right) c.$$

Per calcolare la derivata di e^{tA} , consideriamo i termini di posto i, j nella serie (1.3), che indicheremo ancora con $(A^k)_{ij}$. Indicato inoltre con $b_{ij}(t)$ il termine di posto i, j in e^{tA} , si ha

$$b_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A^k)_{ij} t^k.$$

Quest'ultima è una serie di potenze che converge per ogni $t \in \mathbb{R}$. Avendo raggio di convergenza infinito può essere derivata termine a termine per ogni t . Dunque

$$\begin{aligned} b'_{ij}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (A^k)_{ij} t^{k-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A^{k+1})_{ij} t^k. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^{k+1} = A e^{tA}.$$

Di conseguenza

$$X'(t) = A e^{tA} c = A X(t).$$

D'altra parte le n soluzioni $X_i(t) = e^{tA} w_i$ sono linearmente indipendenti, in quanto $X_i(0) = w_i$. Poichè lo spazio delle soluzioni ha dimensione n , la dimostrazione è conclusa. ■

Il problema della risoluzione del sistema (1.1) è quindi ricondotto al calcolo della matrice esponenziale e^{tA} , di cui ci occuperemo nei paragrafi seguenti.

2. Equivalenza lineare.

Il calcolo di una matrice esponenziale non è in generale immediato, ma le procedure possono risultare semplificate se si sceglie opportunamente il sistema di coordinate.

Si ricordi che due matrici quadrate A e B si dicono simili se esiste una matrice non singolare P tale che $B = P^{-1}AP$. Una matrice non singolare P rappresenta d'altra parte un cambiamento di coordinate in \mathbb{R}^n .

Dato un sistema di coordinate X in \mathbb{R}^n , e un sistema lineare omogeneo

$$X' = AX$$

riferito a queste coordinate, posto $X = PY$ si ha

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY.$$

Queste considerazioni motivano la seguente definizione.

Definizione 2.1. Siano dati due sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti, riferiti a due diversi sistemi di coordinate di \mathbb{R}^n

$$(2.1) \quad X' = AX \quad \text{e} \quad Y' = BY .$$

I due sistemi si dicono **linearmente equivalenti** se le matrici A e B sono simili. ■

Sistemi linearmente equivalenti possono dunque essere riguardati come "lo stesso sistema" visto in due sistemi di riferimento diversi.

Quella introdotta nella Definizione 2.1 è effettivamente una relazione di equivalenza, come è facile verificare. La sua utilità è dovuta al risultato che segue.

Proposizione 2.2. Siano dati i due sistemi (2.1), con $B = P^{-1}AP$. Se $X(t)$ è una soluzione del primo sistema, allora $Y(t) = P^{-1}X(t)$ è soluzione del secondo. Viceversa, se $Y(t)$ è soluzione del secondo sistema, allora $X(t) = PY(t)$ è soluzione del primo.

Dimostrazione. Sia $X(t)$ soluzione del sistema $X' = AX$.

Allora

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = (P^{-1}AP)P^{-1}X(t) = BP^{-1}X(t) = BY(t)$$

e analogamente per il viceversa. ■

Corollario 2.3. Se $B = P^{-1}AP$, allora

$$e^{tB} = P^{-1}e^{tA}P$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. In altri termini, se due matrici sono simili anche i loro esponenziali lo sono, mediante lo stesso cambiamento di base.

Dimostrazione. Sia $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $X(t) = e^{tA}X_0$ la soluzione del sistema $X' = AX$ tale che $X(0) = X_0$. Posto $Y_0 = P^{-1}X_0$, si considerino le funzioni

$$Y_1(t) = e^{tB}Y_0, \quad Y_2(t) = P^{-1}e^{tA}X_0 .$$

Esse sono entrambe soluzioni del sistema $Y' = BY$ (Y_1 lo è per il Teorema 1.4 e Y_2 per la Proposizione 2.2) e inoltre $Y_1(0) = Y_2(0) = Y_0$. Per

l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, è $Y_1(t) = Y_2(t)$ per ogni t , cioè

$$e^{tB}P^{-1}X_0 = P^{-1}e^{tA}X_0 .$$

Per l'arbitrarietà di X_0 , $e^{tB}P^{-1} = P^{-1}e^{tA}$, da cui segue la tesi. ■

Una dimostrazione alternativa del Corollario 2.3 consiste nell'osservare che per ogni n

$$\begin{aligned} B^n &= B \cdot B \cdot \dots \cdot B \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \dots (P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

e nell'utilizzare la serie esponenziale.

Il Corollario 2.3 suggerisce una possibile strategia per il calcolo della matrice e^{tA} : cercare se, tra le matrici simili ad A , ne esiste una di forma particolarmente semplice, la cui matrice esponenziale sia calcolabile in modo elementare. Cominciamo ad applicare questa strategia nel caso in cui la matrice A risulti diagonalizzabile in campo reale.

3. Caso di una matrice diagonalizzabile in campo reale

Dire che A è diagonalizzabile in campo reale significa che esiste una matrice reale non singolare P tale che

$$(3.1) \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = B$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono numeri reali non necessariamente distinti. Se B ha la forma (3.1), il calcolo della matrice esponenziale è immediato. Si ha infatti:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} e^{tB} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Per risalire alla matrice e^{tA} , e quindi all'integrale generale del sistema dato, si può allora usare il Corollario 2.3, a condizione di conoscere la matrice P che determina il cambiamento di coordinate. Vediamo quindi come si può ragionare per identificare una tale matrice P .

È noto dall'Algebra lineare che una matrice A è diagonalizzabile se e solo se esiste un sistema completo di autovettori. Inoltre, in tal caso, i numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ che compaiono nella forma diagonale (3.1) sono gli autovalori di A , ciascuno ripetuto μ_i volte, se μ_i è la sua molteplicità.

Sia

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la base canonica di \mathbb{R}^n . Indichiamo con $v_i = Pe_i$ la colonna i -esima di P . Scrivendo la (3.1) nella forma $AP = PB$, si ha, per $i = 1, \dots, n$,

$$Av_i = APe_i = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} e_i = P(\lambda_i e_i) = \lambda_i v_i.$$

Le colonne di P non sono dunque altro che gli autovettori di A relativi (nell'ordine) agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Il calcolo degli autovettori di A (e quindi della matrice P) si effettua, come noto, risolvendo opportuni sistemi algebrici. Una volta determinata la matrice P , possiamo, come abbiamo già osservato, applicare il Corollario 2.3. Si ha dunque

$$e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}.$$

L'integrale generale del sistema può così essere scritto (si ricordi il Teorema 1.4) come

$$X(t) = e^{tA}c = Pe^{tB}P^{-1}c = Pe^{tB}k$$

avendo posto $k = P^{-1}c$. Si noti che, essendo P invertibile, k è un vettore di costanti arbitrarie al pari di c . Possiamo proseguire osservando che

$$e^{tB}k = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Poichè le colonne di P sono gli autovettori di A relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, nell'ordine, si ha infine

$$(3.3) \quad X(t) = Pe^{tB}k = k_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + k_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

Segue in particolare dalla (3.3) che le funzioni $X_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$ ($i = 1, \dots, n$) costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni.

La (3.3) mostra inoltre che, nella pratica, non c'è bisogno di effettuare esplicitamente il cambiamento di coordinate per scrivere l'integrale generale. L'informazione essenziale consiste nella conoscenza degli autovalori e dei relativi autovettori.

Osservazione. Nel caso che stiamo trattando, e cioè in cui esiste un sistema completo di autovettori, la (3.3) poteva essere determinata in modo diretto osservando che se λ è un autovalore di A e v un suo autovettore, allora la funzione $X(t) = e^{\lambda t} v$ è una soluzione del sistema. Infatti si verifica facilmente che

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v = A(e^{\lambda t} v) = A X(t).$$

Il ricorso ad un sistema di coordinate rispetto al quale la matrice A assume una forma particolarmente semplice delinea tuttavia un approccio al problema che ci permetterà di affrontare anche il caso più generale.

Vedremo infatti nei prossimi due paragrafi come la conoscenza della struttura algebrica di A è sufficiente per il calcolo della matrice esponenziale anche quando A non è diagonalizzabile in campo reale. Premettiamo che possono esserci due ragioni per cui A non è diagonalizzabile in campo reale: 1) la presenza di autovalori complessi; 2) un numero di autovettori linearmente indipendenti insufficiente a costruire una base di \mathbb{R}^n . ■

Concludiamo questo paragrafo con una breve digressione che propone una diversa interpretazione del procedimento descritto in questo paragrafo. Se A è simile ad una matrice diagonale $B = P^{-1}AP$, il cambiamento di coordinate indotto da P dà al nostro sistema una forma particolarmente semplice:

$$(3.4) \quad Y' = B Y \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y'_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dots \\ y'_n = \lambda_n y_n \end{cases}$$

caratterizzata dal fatto che ciascuna equazione è indipendente da tutte le altre (si dice in tal caso che le equazioni del sistema sono *disaccoppiate*). Il sistema (3.4) è risolvibile in modo elementare. Il suo integrale generale si presenterà nella forma

$$y_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(t) = k_n e^{\lambda_n t}$$

dove k_1, \dots, k_n sono costanti arbitrarie. Tornando alla forma vettoriale, si ritrova quanto già noto e cioè che

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = e^{tB} k .$$

Più precisamente, se si cerca quella soluzione particolare tale che $X(0) = c$, basterà risolvere il sistema (3.4) con la condizione $Y(0) = k = P^{-1}c$. Si avrà così, tornando alla coordinate originali,

$$X(t) = P e^{tB} k = P e^{tB} P^{-1} P k = e^{tA} c .$$

4. Caso di una matrice A diagonalizzabile in campo complesso.

Osserviamo preliminarmente che ogni matrice reale A può essere sempre associata ad una particolare applicazione lineare di \mathbb{C}^n in sè. In questo contesto più ampio gli autovettori di A saranno, in generale, elementi di \mathbb{C}^n . Analogamente, possiamo interpretare (1.1) come un sistema di equazioni in \mathbb{C}^n . Possiamo cioè porci il problema di determinare tutte le funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{C}^n che lo risolvono. Naturalmente, si troverà che l'integrale generale in campo complesso è ancora rappresentabile come (*)

$$(4.1) \quad Z(t) = e^{tA} c$$

dove però adesso c sarà un vettore di n costanti arbitrarie scelte in \mathbb{C} . Poichè (4.1) rappresenta l'integrale generale della (1.1), essa contiene anche le soluzioni reali, alle quali siamo interessati. Queste ultime verranno fornite in seguito ad opportune scelte delle costanti.

Passiamo senz'altro ad illustrare il procedimento, osservando in primo luogo che le considerazioni svolte nel paragrafo precedente continuano a valere in ambito complesso. In particolare, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gli autovalori di A e siano $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}^n$ i corrispondenti autovettori. La (4.1) ammette dunque una rappresentazione analoga alla (3.3), e cioè

$$Z(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} w_1 + \dots + k_n e^{\lambda_n t} w_n .$$

(*) Conveniamo di usare la lettera Z anzichè la X quando ci si riferisce all'integrale generale nel campo complesso.

Ricordiamo ora che gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici dell'equazione $\det(A - \lambda I) = 0$, che è un'equazione algebrica a coefficienti reali. Ne segue che, se $\lambda \in \mathbb{C}$ è una radice di molteplicità μ , anche $\bar{\lambda}$ è una radice con la stessa molteplicità μ . Inoltre, se

$$w = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

è un autovettore relativo a λ , e $Z(t) = e^{\lambda t} w$ è la corrispondente soluzione del sistema,

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

risulta pure un autovettore di A relativo a $\bar{\lambda}$. Infatti, essendo A una matrice reale,

$$A \bar{w} = \overline{A w} = \overline{\lambda w} = \bar{\lambda} \bar{w} .$$

Dunque anche la funzione coniugata di $Z(t)$

$$\bar{Z}(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{w}$$

è soluzione del sistema. Di conseguenza le funzioni a valori in \mathbb{R}^n

$$X(t) = \frac{1}{2} (Z(t) + \bar{Z}(t)) = \text{Re } Z(t)$$

$$Y(t) = \frac{1}{2i} (Z(t) - \bar{Z}(t)) = \text{Im } Z(t)$$

sono soluzioni del sistema $X' = AX$. Per esplicitare $X(t)$ e $Y(t)$, si ponga

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = w^{(1)} + i w^{(2)}$$

con $w^{(1)}, w^{(2)} \in \mathbb{R}^n$. Allora, posto $\lambda = \alpha + i\beta$,

$$X(t) = \text{Re} (e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (w^{(1)} + i w^{(2)})) =$$

$$= \text{Re} (e^{\alpha t} \cos \beta t w^{(1)} - e^{\alpha t} \sin \beta t w^{(2)} + i e^{\alpha t} \sin \beta t w^{(1)} + i e^{\alpha t} \cos \beta t w^{(2)}) =$$

$$= e^{\alpha t} \cos \beta t w^{(1)} - e^{\alpha t} \sin \beta t w^{(2)}$$

$$Y(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t w^{(1)} + e^{\alpha t} \cos \beta t w^{(2)} .$$

Se, come stiamo supponendo, A ha n autovettori complessi linearmente indipendenti, si ha quanto segue.

Teorema 4.1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagonalizzabile su \mathbb{C} . Siano $\{w_1, \dots, w_l, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_l\}$ autovettori indipendenti di autovalori non reali $\lambda_1, \dots, \lambda_l, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_l$, con $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $w_j = w_j^{(1)} + iw_j^{(2)}$ e siano $\{v_{2l+1}, \dots, v_n\}$ autovettori, pure indipendenti, di autovalori reali $\lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_n$, con $v_{2l+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Allora le n funzioni a valori in \mathbb{R}^n

$$\left. \begin{aligned} X_j(t) &= e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t w_j^{(1)} - e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t w_j^{(2)} \\ Y_j(t) &= e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t w_j^{(1)} + e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t w_j^{(2)} \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, l$$

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j \quad j = 2l+1, \dots, n$$

formano un sistema fondamentale di soluzioni del sistema $X' = AX$.

Dimostrazione. Per quanto appena visto, le X_j e Y_j sono soluzioni. Si calcolino le X_j e le Y_j per $t = 0$. Per $1 \leq j \leq l$, si ha

$$X_j(0) = w_j^{(1)}, \quad Y_j(0) = w_j^{(2)}$$

e, per $2l+1 \leq j \leq n$, si ha

$$X_j(0) = v_j.$$

Si tratta di vedere che $\{w_1^{(1)}, \dots, w_l^{(1)}, w_1^{(2)}, \dots, w_l^{(2)}, v_{2l+1}, \dots, v_n\}$ è una base di \mathbb{R}^n . Ma ciò dipende dal fatto che w_j e \bar{w}_j sono combinazioni lineari complesse di $w_j^{(1)}$ e $w_j^{(2)}$ e che per ipotesi $\{w_1, \dots, w_l, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_l, v_{2l+1}, \dots, v_n\}$ è una base di \mathbb{C}^n . Ne segue in particolare che ogni vettore di \mathbb{R}^n è loro combinazione lineare. ■

Esempio 4.2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e il sistema differenziale $X' = AX$. L'equazione caratteristica di A è

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0$$

e gli autovalori di A sono $i, -i, 2$. Si cercano allora gli autovettori di autovalore i e 2 (non è necessario cercare quello di autovalore $-i$ per quanto detto sopra). Si ottiene così

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1+i \end{pmatrix} \quad \text{autovettore di autovalore } i$$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{autovettore di autovalore } 2.$$

Un sistema fondamentale di soluzioni è dunque costituito da

$$X_1(t) = \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_1(t) = \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5. Caso in cui A è non diagonalizzabile.

Una matrice B (reale o complessa) si dice in *forma canonica di Jordan* se è nella forma

$$(5.1) \quad B = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & C_m \end{pmatrix}$$

dove C_1, \dots, C_m sono sotto-matrici quadrate della forma

$$(5.2) \quad C_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

I C_i si dicono anche *blocchi di Jordan*. Se C_i e C_j sono blocchi distinti, è permesso che $\lambda_i = \lambda_j$. Non è escluso che la dimensione di qualche blocco si riduca a 1. La matrice B è diagonale se e solo se tutti i blocchi hanno dimensione 1 (*). È noto dall'Algebra lineare che:

Teorema 5.1. Per ogni matrice quadrata A esiste una matrice B in forma canonica di Jordan simile ad A . ■

Il Teorema 5.1 afferma che ogni matrice A può essere scritta nella forma canonica di Jordan B per mezzo di un cambiamento di coordinate lineare. Data una matrice A , e indicata con B la sua forma canonica di Jordan, si riconoscono le seguenti proprietà.

- a) I termini λ_i che compaiono sulla diagonale principale di ogni blocco C_i sono autovalori di A .
- b) Ad ogni blocco C_i corrisponde un unico autovettore di A relativo all'autovalore λ_i (a meno, ovviamente, di multipli scalari). Autovettori corrispondenti a blocchi diversi sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, il numero di blocchi in cui compare uno stesso λ_i è uguale alla dimensione dell'autospazio corrispondente. Tale dimensione, come noto, prende il nome di *molteplicità geometrica* di λ_i e si indica con ν_i . Se μ_i è la *molteplicità algebrica* di λ_i (cioè la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico), allora $1 \leq \nu_i \leq \lambda_i$, di modo che $\sum_{i=1}^m \nu_i \leq n$.
- c) Come già detto, i blocchi hanno tutti dimensione 1 se e solo se A è diagonalizzabile, equivalentemente, se e solo se $\nu_i = \mu_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$.
- d) Se un autovalore λ_i non è reale, i blocchi relativi a λ_i e a $\bar{\lambda}_i$ sono in egual numero e hanno le stesse dimensioni.

Un semplice calcolo mostra che se B ha la forma (5.1), allora

$$(5.3) \quad e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{tC_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tC_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{tC_m} \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'integrale generale del sistema (1.1), possiamo quindi pensare di procedere come nel caso diagonalizzabile, a condizione di saper calcolare la matrice esponenziale dei singoli blocchi di Jordan.

(*) Si osservi che un blocco di dimensione 1 consiste del solo termine λ_i .

A tal fine, abbiamo bisogno del lemma seguente, di cui tralasciamo la dimostrazione.

Lemma 5.2. Se A e B sono due matrici quadrate della stessa dimensione tali che $AB = BA$, allora

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Consideriamo dunque una matrice della forma (5.2). Poichè si lavora con un solo blocco alla volta, possiamo per semplicità tralasciare di indicare l'indice i . Scriveremo allora

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \lambda & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

e denoteremo con q la dimensione di C . Chiaramente, C si decompone come $C = S + N$, dove

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \lambda I \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $SN = NS$, per cui, in base al Lemma 5.2

$$e^{tC} = e^{tS} e^{tN}.$$

Ma $e^{tS} = e^{\lambda t} I$, in quanto $S = \lambda I$. Per quanto riguarda N , si osservi che

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^q = 0.$$

Pertanto

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k N^k = I + tN + \frac{1}{2} t^2 N^2 + \dots + \frac{1}{(q-1)!} t^{q-1} N^{q-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2} t^2 & \dots & \frac{1}{(q-2)!} t^{q-2} & \frac{1}{(q-1)!} t^{q-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(q-2)!} t^{q-2} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & t & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi

$$(5.4) \quad e^{tC} = e^{\lambda t} e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \dots & \dots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{q-2}}{(q-2)!} e^{\lambda t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & t e^{\lambda t} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Sia adesso A una generica matrice $n \times n$ e sia $B = P^{-1}AP$ la sua forma canonica di Jordan, che esiste per il Teorema 5.1. In base alle considerazioni svolte nel §3, l'integrale generale del sistema $X' = AX$ si scrive come

$$(5.5) \quad X(t) = P e^{tB} k$$

dove k è un vettore di costanti arbitrarie. Le formule (5.3) e (5.4) risolvono il problema del calcolo della matrice e^{tB} . Resta però da indicare come si determina la matrice P che individua il cambiamento di base e, quindi, la forma canonica di Jordan B della matrice A .

A tal fine, come nel § 3, si indichino con v_1, \dots, v_n le colonne di P e si noti che

$$PB = P \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_m \end{pmatrix} = AP.$$

Denotiamo con q_i la dimensione del blocco C_i ($i = 1, \dots, m$). Limitandoci per semplicità il calcolo al primo blocco, ricaviamo

$$Av_1 = APe_1 = PBe_1 = \lambda_1 Pe_1 = \lambda_1 v_1$$

dove, come al solito, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Proseguendo, si ha

$$Av_2 = APe_2 = PBe_2 = P \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P(\lambda_1 e_2 + e_1) = \lambda_1 v_2 + v_1.$$

Analogamente, si trova che

$$Av_3 = \lambda_1 v_3 + v_2$$

$$\dots$$

$$Av_{q_1} = \lambda_1 v_{q_1} + v_{q_1-1}.$$

In conclusione, abbiamo mostrato che v_1 è un autovettore relativo all'autovalore λ_1 che compare in C_1 , mentre i vettori v_2, \dots, v_{q_1} si possono ottenere risolvendo, in successione, i sistemi algebrici non omogenei

$$(5.6) \quad \begin{aligned} (A - \lambda_1 I)v_2 &= v_1 \\ \dots & \dots \\ (A - \lambda_1 I)v_{q_1} &= v_{q_1-1}. \end{aligned}$$

La (5.6) si dice anche una *cascata* di sistemi. Il termine noto di ciascuno di essi è infatti fornito dal sistema precedente.

I vettori v_2, \dots, v_{q_1} ottenuti risolvendo i sistemi (5.6) si chiamano *autovettori generalizzati* relativi all'autovalore λ_1 . Proseguendo, si troverà che v_{q_1+1} è un autovettore relativo all'autovalore λ_2 (il quale può, si badi, coincidere con λ_1) che compare in C_2 . Se la dimensione di C_2 è maggiore di 1, seguiranno poi autovettori generalizzati relativi a λ_2 e così via.

In definitiva, per la determinazione dell'integrale generale del sistema $X' = AX$ si procede nel modo seguente:

- (a) Si risolve l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ calcolando gli autovalori λ_i con le relative molteplicità algebriche μ_i .
- (b) Si risolvono i sistemi $(A - \lambda_i I)v = 0$, determinando così l'autospazio relativo a ciascun λ_i e la sua dimensione ν_i .
- (c) Se per qualche i risulta $\nu_i < \mu_i$, ciò segnala la presenza di almeno un blocco di Jordan relativo all'autovalore λ_i di dimensione maggiore di 1.

Occorre allora calcolare gli autovettori generalizzati relativi a tali blocchi, risolvendo una o più cascate di sistemi algebrici del tipo (5.6).

Quest'ultima parte dal procedimento può risultare molto complicata se la molteplicità geometrica di qualche λ_i è maggiore di 1, e cioè se ci sono più blocchi con lo stesso autovalore λ_i . In tal caso infatti potrebbero esserci autovettori generalizzati relativi a λ_i ottenuti a partire da blocchi diversi (risolvendo cioè più cascate di sistemi del tipo (5.6)).

Non intendiamo qui diffonderci sui procedimenti che consentono di ricavare la forma canonica di Jordan nel caso più generale possibile. Osserviamo solo che se a λ_i compete un solo blocco, sarà sufficiente risolvere un'unica cascata di sistemi del tipo (5.6).

Più avanti, nell'Esempio 5.4, esamineremo tutti i casi che si possono presentare con matrici 3×3 .

Supponiamo comunque di aver completato questi calcoli, e di aver così determinato le colonne v_1, \dots, v_n della matrice P e quindi la forma canonica di Jordan B di A . Introduciamo la notazione seguente: per ogni i , indichiamo con $u_1^{(i)}$ l'autovettore di λ_i relativo al blocco C_i e con

$$u_2^{(i)}, \dots, u_{q_i}^{(i)}$$

la cascata degli autovettori generalizzati relativi a λ_i definiti in relazione al blocco C_i (cioè a partire dall'autovettore $u_1^{(i)}$) (*).

Sviluppando la (5.5), si vede che un sistema fondamentale di soluzioni del sistema lineare $X' = AX$ è dato dalle funzioni

$$(5.7) \quad \begin{cases} X_{i,1}(t) = e^{\lambda_i t} u_1^{(i)} \\ X_{i,2}(t) = e^{\lambda_i t} (t u_1^{(i)} + u_2^{(i)}) \\ \dots \\ X_{i,q_i}(t) = e^{\lambda_i t} \left(\frac{t^{q_i-1}}{(q_i-1)!} u_1^{(i)} + \dots + u_{q_i}^{(i)} \right) \end{cases}$$

al variare di i tra 1 e m . Si noti che, come nel caso diagonalizzabile, per scrivere le (5.7) non è necessario effettuare esplicitamente il cambiamento di coordinate. Bisogna comunque che siano noti gli autovalori e gli autovettori (generalizzati e non) della matrice A .

Nel caso in cui vi siano autovalori di A complessi, la (5.7) fornisce ovviamente soluzioni complesse. Utilizzando la proprietà (d) dei blocchi

(*) Gli $u_j^{(i)}$ non sono altro che v_1, \dots, v_n indicati con etichette diverse. Per esempio $u_1^{(1)} = v_1, \dots, u_{q_1}^{(1)} = v_{q_1}, u_1^{(2)} = v_{q_1+1}$ ecc.

di Jordan ricordata all'inizio del paragrafo si dovranno quindi separare parti reali e parti immaginarie delle soluzioni, applicando lo stesso procedimento illustrato nel §4.

Il problema di determinare l'integrale generale di un sistema omogeneo a coefficienti costanti può dunque considerarsi risolto, almeno in via teorica. Ovviamente, se il numero delle equazioni è molto elevato può essere tutt'altro che facile calcolare gli autovalori, gli autovettori, propri e generalizzati, e quindi l'integrale generale. In dimensione bassa la casistica è, per fortuna, abbastanza limitata. Analizziamo a titolo di esempio, come preannunciato, il caso $n = 3$.

Esempio 5.3. Sia $A \in \mathbb{R}^{3,3}$. Analizziamo i casi che si possono presentare.

- (a) La matrice ha tre autovettori reali indipendenti. La forma canonica di Jordan di A è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ (non necessariamente distinti) e le soluzioni del sistema $X' = AX$ sono date dalla (3.3).

- (b) La matrice ha un autovalore reale λ e due autovalori complessi coniugati $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$. Nella base degli autovettori complessi, A si trasforma nella matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni del sistema $X' = AX$ si determinano come nell'Esempio 4.2.

- (c) La matrice ha due autovalori reali λ e μ distinti, con λ di molteplicità algebrica 2 ma senza che vi siano due autovettori indipendenti di autovalore λ . La forma canonica di Jordan è

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ rispetto alla quale A assume questa forma si determina risolvendo

$$(A - \lambda I)v_1 = 0, \quad (A - \lambda I)v_2 = v_1, \quad (A - \mu I)v_3 = 0.$$

Per la (5.7), si hanno le soluzioni indipendenti

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1, \quad X_2(t) = t e^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2, \quad X_3(t) = e^{\mu t} v_3.$$

- (d) La matrice ha un solo autovalore, reale, e la dimensione di $\ker(A - \lambda I)$ è 1. La forma canonica di Jordan consiste di un solo blocco, ed è

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Una base corrispondente $\{v_1, v_2, v_3\}$ si trova risolvendo

$$(A - \lambda I)v_1 = 0, \quad (A - \lambda I)v_2 = v_1, \quad (A - \lambda I)v_3 = v_2.$$

Si hanno le soluzioni

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1, \quad X_2(t) = t e^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2, \quad X_3(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t} v_1 + t e^{\lambda t} v_2 + e^{\lambda t} v_3.$$

Si noti che nella ricerca degli autovettori generalizzati i sistemi lineari da risolvere sono degeneri. Essi risultano sempre compatibili, ma non hanno soluzione unica. Nel nostro caso in particolare v_2 e v_3 vanno scelti (in modo arbitrario) tra le infinite soluzioni dei relativi sistemi.

- (e) La matrice A ha un solo autovalore, reale, e la dimensione di $\ker(A - \lambda I)$ è 2. La forma canonica di Jordan è

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Per determinare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ corrispondente si procede come segue. Si prende $v_1 \neq 0$ nell'immagine di $A - \lambda I$. Poichè $(A - \lambda I)^2 = 0$, è $(A - \lambda I)v_1 = 0$ e dunque v_1 è autovettore di autovalore λ . Si cerca poi v_2 tale che

$$(A - \lambda I)v_2 = v_1$$

e infine v_3 sarà un altro autovettore indipendente da v_1 . Si hanno così le tre soluzioni

$$X_1(t) = e^{\lambda t} v_1, \quad X_2(t) = t e^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2, \quad X_3(t) = e^{\lambda t} v_3.$$

■

Concludiamo con un'altra digressione.

Il sistema associato ad una matrice B in forma di Jordan in generale non è costituito da equazioni disaccoppiate.

Il sistema risulta però disaccoppiato a blocchi, nel senso che la particolare forma della matrice consente di identificare gruppi di equazioni con la proprietà che le variabili che compaiono in un certo gruppo ne influenzano ne sono influenzate da quelle di altri gruppi. Inoltre, come si verifica facilmente, le equazioni, di ciascun gruppo sono organizzate, come si dice anche in questo caso, *in cascata*. Per il primo gruppo si ha ad esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_{q_1-1} = \lambda_1 x_{q_1-1} + x_{q_1} \\ \dot{x}_{q_1} = \lambda_1 x_{q_1}. \end{cases}$$

L'ultima equazione può essere risolta elementarmente e, una volta calcolato $x_{q_1}(t)$, lo si sostituisce nella penultima, che diventa così un'equazione scalare lineare non omogenea, comunque risolvibile elementarmente. Proseguendo in questo modo, e poi passando alla forma vettoriale, si ritrovano le q_1 funzioni della forma (5.7) mediante le quali il blocco C_1 contribuisce all'integrale generale.

6. Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti di tipo particolare.

Riprendiamo adesso in considerazione il sistema lineare non omogeneo a coefficienti costanti

$$X' = AX + B(t).$$

Come abbiamo detto, si continua a chiamare questo sistema "a coefficienti costanti" anche se il vettore B dipende dalla variabile t . Nelle applicazioni, il termine $B(t)$ modella le forze esterne al sistema. Accade spesso che tali forze vengano a loro volta generate da qualche dispositivo fisico il cui funzionamento è descritto da un altro sistema di equazioni lineari. Per questo motivo il termine $B(t)$ ha spesso la forma

$$B(t) = P(t)e^{\alpha t}$$

ove $\alpha \in \mathbb{C}$ e $P(t)$ è un polinomio a coefficienti vettoriali. Lo scopo di questo paragrafo è quello di identificare una soluzione del sistema nel caso in cui $B(t)$ sia della forma indicata, senza ricorrere al metodo generale della variazione delle costanti (che è comunque sempre applicabile).