

**Analisi Matematica II** per il corso di Laurea Triennale in Matematica  
26 Settembre 2022

---

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordinati o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

---

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + xy + 5y^2 + 3x - y + 1;$$

- a. **(3 punti)** si determinino, se esistono, massimi e minimi assoluti di  $f$  nel suo dominio.

- b. **(3 punti)** si determinino, se esistono, massimi e minimi assoluti di  $f$  in  $[-1, 1]^2$ ;

- c. **(2 punti)** si determini la retta tangente alla curva di livello di  $f$  passante per il punto  $(1, 0)$ .

2. (7 punti) Si calcoli il volume del seguente solido:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y \leq 2, x \geq \frac{1}{2}, 0 \leq z \leq |\log(xy)| \right\}$$

3. (7 punti) Sia data la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  dove

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$$

a. (3 punti) Calcolarne l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme;

b. (2 punti) detta  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , calcolare  $S(x)$ . Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$$

giustificando la risposta.

c. (2 punti) Si provi che

$$0 \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(x) dx \leq \frac{1}{3},$$

giustificando la risposta.

4. **(8 punti)** Per ogni  $\alpha > 0$  si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4y - 4\sqrt[4]{y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a. **(3 punti)** verificare che ammette un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente: individuare l'intervallo massimale di definizione della soluzione;

b. **(2 punti)** é possibile prolungare la soluzione a tutto su  $\mathbb{R}$ ? In quanti modi?

c. **(3 punti)** Si consideri ora il caso  $\alpha = 0$ ; quante soluzioni locali ammette il problema di Cauchy? Determinarle tutte.