Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
26 Settembre 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = 3x^2 + xy + 5y^2 + 3x - y + 1;$$

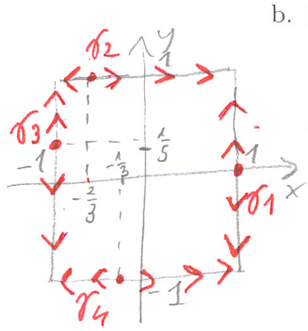
a. **(3 punti)** si determinino, se esistono, massimi e minimi assoluti di f nel suo dominio.

• Poiché $\lim_{x\to\infty} f(x,0)=+\infty \Rightarrow$ non esistono massimi assoluti nel suo dominio $\mathbb{R}^2$

• $\nabla f=(6x+y+3,\ x+10y-1)=0 \iff (x,y)=\left(-\frac{31}{59},\frac{9}{59}\right)=P$

$Hess\, f=\begin{bmatrix}6&1\\1&10\end{bmatrix}$ è una matrice definita positiva $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, quindi f è convessa e P è minimo assoluto per f.

b. **(3 punti)** si determinino, se esistono, massimi e minimi assoluti di f in $[-1,1]^2$;



• Per Weierstrass esistono max/min assoluti in $[-1,1]^2$

• Il punto P è minimo assoluto anche in $[-1,1]^2$

• Il Max assoluto è su $\partial([-1,1]^2)=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$

su γ_1 $f(1,y)=5y^2+7$ con $|y|\le 1$, cresce per $y>0$

su γ_2 $f(x,1)=3x^2+4x+5$ con $|x|\le 1$, cresce per $x>-\frac{2}{3}$

su γ_3 $f(-1,y)=5y^2-2y+1$ con $|y|\le 1$, cresce per $y>\frac{1}{5}$

su γ_4 $f(x,-1)=3x^2+2x+7$ con $|x|\le 1$, cresce per $x>-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Il Max è su uno dei vertici: $f(1,1)=f(1,-1)=12$, $f(-1,1)=4$, $f(-1,-1)=8$ $\Rightarrow$ Max sono $(1,1)$ e $(1,-1)$

c. **(2 punti)** si determini la retta tangente alla curva di livello di f passante per il punto $(1,0)$.

$f(1,0)=7$. Definisco $G(x,y)=f(x,y)-7$, $G(x,y)=0$ è la curva di livello

$G(1,0)=0$

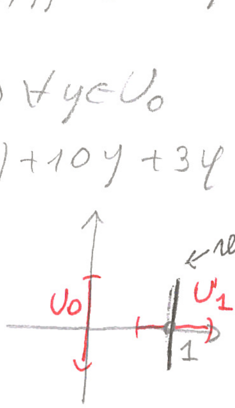
$\nabla G(1,0)=(9,0) \Rightarrow \exists\ \varphi: U_0\to U_1$ · $\varphi(0)=1$ e $G(\varphi(y),y)=0\ \forall y\in U_0$

Posto $x=\varphi(y)$ in $G(x,y)=0$

$\Rightarrow 3\varphi(y)^2+\varphi(y)\cdot y+5y^2+3\varphi(y)-y-6=0\ \forall y\in U_0$

derivo $6\varphi(y)\varphi'(y)+\varphi'(y)\cdot y+\varphi(y)+10y+3\varphi'(y)-1=0\ \forall y\in U_0$

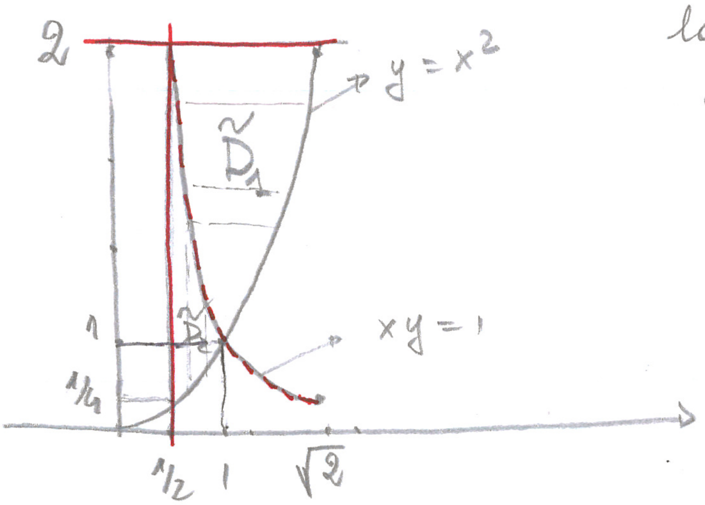
posto $\varphi(0)=1$, $y=0 \Rightarrow \varphi'(0)=0$



← retta tangente $x=1$

2. **(7 punti)** Si calcoli il volume del seguente solido:

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 \le y \le 2 \, , x \ge \frac{1}{2} \, , 0 \le z \le |\log(xy)| \right\}$$



la proiezione di D sul piano xy è:

$\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$ in D_1 risulta $xy > 1$

in D_2 " $xy < 1$

$$\int_D 1 \, dx\,dy\,dz = \int_0^{|\log(xy)|} \left(\int_{\tilde{D}} dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int_{\tilde{D}_1} \log(xy)\,dx\,dy - \int_{\tilde{D}_2} \log(xy)\,dx\,dy = \int_1^2 dy \int_{1/y}^{\sqrt{y}} \log(xy)\,dx - \int_{1/2}^{1} dx \int_{x^2}^{1/x} \log xy\,dy$$

$$\int_{\tilde{D}_1} \log(xy)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{y}\right) \log y + \Big[x \log x - x\Big]_{1/y}^{\sqrt{y}} = \int_1^2 \frac{3}{2}\sqrt{y}\log y - \sqrt{y} + \frac{1}{y} =$$

$$= (1 + 2\sqrt{2}) \log 2 + \frac{4}{3}(1 - 2\sqrt{2})$$

$$\int_{\tilde{D}_2} \log xy\,dx\,dy = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{x} - x^2\right) \log x + \Big[y \log y - y\Big]_{x^2}^{1/x} = \int_{1/2}^{1} x^2 - \frac{1}{x} - 3x^2 \log x = \frac{7}{12} - \frac{9}{8}\log 2$$

$$\int_{\tilde{D}_1} \log xy - \int_{\tilde{D}_2} \log xy = \left(2\sqrt{2} + \frac{17}{8}\right) \log 2 - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{3}{4}$$

3. **(7 punti)** Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Calcolarne l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme;

il raggio di convergenza è 1 : $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[2k]{2k} = 1$

Nei due estremi la serie non converge poichè il termine generale non tende a zero. Convergente semplice in $(-1, 1)$.

La convergenza è uniforme in $[-r, r]$ con $0 \le r < 1$. Non è uniforme in $[-1, 1]$ per il teorema del doppio limite

se $|x| < 1$ $\quad S(x) = x + 2x^2 + x^3 + 4x^4 + x^5 + \dots$ e la serie converge ASSOLUTAMENTE

b. **(2 punti)** detta $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcolare $S(x)$. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 1^-} S(x)$$

giustificando la risposta.

per $|x| < 1$ $\quad S(x) = \sum_0^{+\infty} x^{2k+1} + \sum_0^{+\infty} 2k \cdot x^{2k}$ poichè le serie convergono assolutamente

$$S(x) = x \sum_0^{+\infty} x^{2k} + x \sum_0^{+\infty} 2k\, x^{2k-1} = x \left[\frac{1}{1-x^2} + \frac{d}{dx} \left(\sum_0^{+\infty} x^{2k} - 1 \right) \right]$$ dove

l'uguaglianza è giustificata dalla convergenza uniforme in $|x| \le r < 1$

$$S(x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$$

c. **(2 punti)** Si provi che

$$0 \le \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(x)\, dx \le \frac{1}{3},$$

giustificando la risposta.

Sempre per la convergenza uniforme $\int_{-1/2}^{1/2} S(x) = \sum_0^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} a_n x^n$

per n dispari $\int_{-1/2}^{1/2} a_n x^n = 0$ quindi l'integrale è ovviamente ≥ 0 e

$$\int_{-1/2}^{1/2} S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2k \int_{-1/2}^{1/2} x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{1}{2^{2k}} < \sum_1^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$

4. **(8 punti)** Per ogni $\alpha > 0$ si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4y - 4\sqrt[4]{y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

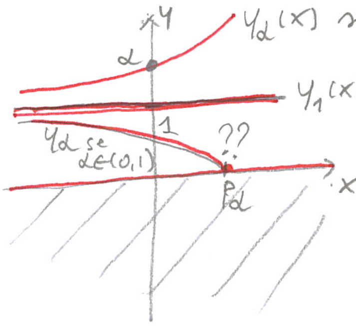
a. **(3 punti)** verificare che ammette un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente: individuare l'intervallo massimale di definizione della soluzione;

• $f(x,y) = 4y - 4\sqrt[4]{y}$ è continua in $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ e Lipschitz loc. rispetto a y in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$. Poiché $(0,\alpha) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ esiste unica soluz. locale

• posto $z = y^{3/4} \Rightarrow z' = 3z - 3$ per $z \geq 0 \Rightarrow z(x) = Ae^{3x} + 1$ quando $Ae^{3x} + 1 \geq 0$
$\Rightarrow y(x) = (Ae^{3x} + 1)^{4/3} \overset{y(0)=\alpha}{\Rightarrow} y_\alpha(x) = ((\alpha^{3/4} - 1)e^{3x} + 1)^{4/3}$ è la soluzione

per x t.c. $(\alpha^{3/4} - 1)e^{3x} + 1 \geq 0$ <
- se $\alpha \geq 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- se $\alpha \in (0,1) \Rightarrow x < -\frac{1}{3}\ln(1 - \alpha^{3/4}) = P_\alpha$ che è $P_\alpha > 0$

b. **(2 punti)** é possibile prolungare la soluzione a tutto su $\mathbb{R}$? In quanti modi?



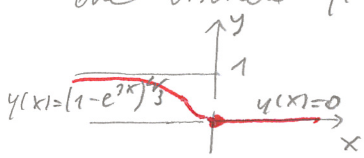
• se $\alpha \geq 1$ sì, in modo unico, vedi sopra

• se $\alpha \in (0,1)$ si vede che $y_\alpha(P_\alpha) = 0$.
Inoltre $y'_\alpha(x) = \frac{4}{3}[(\alpha^{3/4} - 1)e^{3x} + 1]^{1/3}(\alpha^{3/4} - 1) \cdot 3e^{3x}$
e si ha $y'_\alpha(P_\alpha) = 0$

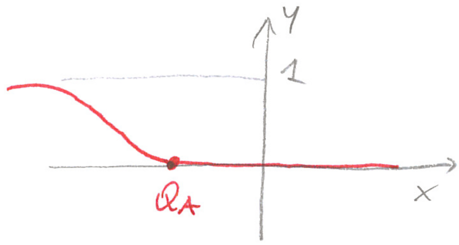
Posso prolungare y_α da P_α in poi "attaccandola" alla funzione $y(x) = 0$ (in modo unico)

c. **(3 punti)** Si consideri ora il caso $\alpha = 0$; quante soluzioni locali ammette il problema di Cauchy ? Determinarle tutte.

• se $\alpha = 0$ da , $y(0) = 0 \Rightarrow y(x) = (1 - e^{3x})^{4/3}$ in $x \leq 0$
che essendo $y(0) = y'(0) = 0$ posso "attaccarla" a $y(x) = 0$ per $x > 0$



• Inoltre per ogni $A < -1$ $y(x) = (Ae^{3x} + 1)^{4/3}$ in $x \leq \frac{1}{3}\ln\left[-\frac{1}{A}\right] = Q_A < 0$
abbiamo $y(Q_A) = y'(Q_A) = 0$ e posso "attaccarla" a $y(x) = 0$ in $x > Q_A$



Queste sono tutte le soluzioni locali del problema