Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
28 Gennaio 2022

———————————————————————————-

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

———————————————————————————-

NOME E COGNOME:

———————————————————————————-

1. **(7 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} xye^{\frac{xy}{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a. **(2 punti)** Si verifichi che f é continua su $\mathbb{R}^2$ e si studi la differenziabilitá nell'origine;

   b. **(2 punti)** si determinino estremo superiore, estremo inferiore e (se esistono) massimi e minini assoluti di f sul suo domminio;

   c. **(3 punti)** si determinino estremo superiore, estremo inferiore e (se esistono) massimi e minini assoluti di f su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}$.

2. **(10 punti)** Sia

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 \leq z^2 \leq x^2 + y^2 \ , z < x^2 + y^2 < 1 \ , \ y > 0, \ x \geq 0\}$$

e sia D_z la sua intersezione con il piano di equazione $z = x$.

a. **(4 punti)** Sia D' la proiezione di D_z nel piano xy. Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare D' attorno all'asse x.

b. **(6 punti)** Si calcoli

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2)}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

3. **(7 punti)** Data la successione di funzioni

$$f_{n,\alpha}(x) = n^{\alpha} \tanh\left(\frac{x}{n}\right)$$

a. **(3 punti)** si stabilisca, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme E_α di convergenza semplice;

b. **(4 punti)** si stabilisca per quali valori di α la convergenza risulta anche uniforme su E_α.

4. **(7 punti)** Si consideri il problema

$$\begin{cases} 8yy' = 15x^2 \sqrt[5]{y^2-1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(1 punti)** Al variare del dato iniziale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si stabilisca quando la teoria garantisce l'esistenza e l'unicitá di soluzioni locali;

b. **(3 punti)** per $(x_0, y_0) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, si determinino (se esistono) tutte le soluzioni locali;

c. **(3 punti)** per $(x_0, y_0) = (0, \sqrt{2})$, si determinino (se esistono) tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.