Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
28 Gennaio 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(7 punti)** Sia

$$f(x,y)=\begin{cases} xye^{\frac{xy}{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si verifichi che f é continua su $\mathbb{R}^2$ e si studi la differenziabilitá nell'origine;

• Poiché $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{(x^2)^{\frac12}(y^2)^{\frac12}}{x^2+y^2} \le 1 \Rightarrow e^{-1} \le e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} \le e \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. f continua in $\mathbb{R}^2$

• Essendo $f(x,0)=f(0,y)=0 \Rightarrow \nabla f(0,0)=(0,0)$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\left|\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} e\,\frac{|h_1||h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le e \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}=0$$

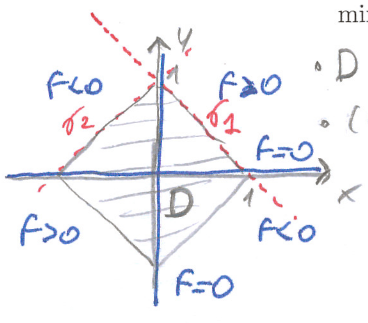
$\Rightarrow f$ differenziabile in $(0,0)$

b. **(2 punti)** si determinino estremo superiore, estremo inferiore e (se esistono) massimi e minini assoluti di f sul suo domminio;

Poiché $\lim_{x\to\infty} f(x,1)=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x,1)=-\infty$

$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty$, $\inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty$, Massimi/minimi assoluti non esistono

c. **(3 punti)** si determinino estremo superiore, estremo inferiore e (se esistono) massimi e minini assoluti di f su $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|+|y|\le 1\}$.



• D è un compatto, f è ivi continua $\Rightarrow \exists$ Max/Min assoluti di f

• $(x,y)\in D \Leftrightarrow (-x,-y)\in D$ e $f(x,y)=f(-x,-y)$: studio solo $y\ge 0$

• $\nabla f(x,y)=\frac{e^{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)^2}\left(y(x^4-x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4),\ x(x^4+x^3y+2x^2y^2-xy^3+y^4)\right)$

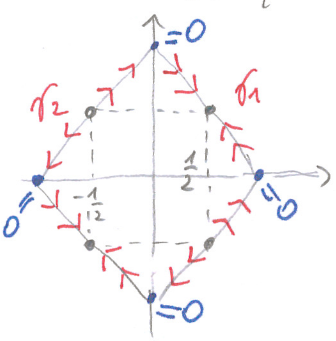
è nullo se e solo se $x=0$, oppure $y=0$.

Essendo f positiva nel I° e nel III° quadrante e f negativa nel II° e nel IV° quadrante

Non ci sono punti di Max/Min per f in int(D).

• Studio $\gamma_1=\{(x,y): y=-x+1,\ 0\le x\le 1\}$ $\quad f|_{\gamma_1}=f(x,-x+1)=(x-x^2)e^{\frac{x-x^2}{2x^2-2x+1}}=g_1(x)$

$\Rightarrow$ in $[0,1]$ $g_1'(x)>0$ per $x<\frac12$



Studio $\gamma_2=\{(x,y): y=x+1,\ -1\le x\le 0\}$

$f|_{\gamma_2}=f(x,x+1)=(x+x^2)e^{\frac{x+x^2}{2x^2+2x+1}}=g_2(x) \Rightarrow$ in $[-1,0]$ $g_2'(x)>0$ per $x>-\frac12$

Quindi $\left(\frac12,\frac12\right)$ e $\left(-\frac12,-\frac12\right)$ sono Max; $\left(\frac12,-\frac12\right)$ e $\left(-\frac12,\frac12\right)$ sono Min

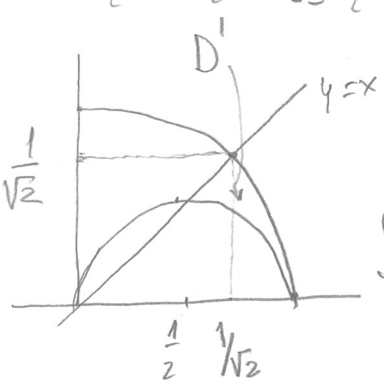
2. **(10 punti)** Sia

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ y^2 \le z^2 \le x^2+y^2\ , z < x^2+y^2 < 1\ ,\ y>0,\ x\ge 0\}$$

e sia D_z la sua intersezione con il piano di equazione $z=x$.

a. **(4 punti)** Sia D' la proiezione di D_z nel piano xy. Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare D' attorno all'asse x.

$D_z = \{D \cap \{z=x\}\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ |y|\le|x|\ ;\ x < x^2+y^2 < 1\ ;\ x \ge 0;\ y \ge 0\}$



$D' = \{(x,y):\ 0\le y\le x\ ;\ x^2+y^2<1\ ;\ (x-\frac12)^2+y^2 > \frac14\}$

Il volume cercato è $2\pi \int_{D'} y\,dy$

$$\int_{D'} y\,dy = \int_{1/2}^{1/\sqrt2} dx \int_{\sqrt{x-x^2}}^{x} y\,dy + \int_{1/\sqrt2}^{1} dx\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \int_{1/2}^{1/\sqrt2}\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + \int_{1/\sqrt2}^{1}\left(\frac12 - \frac x2\right) = \frac{13}{48} - \frac{1}{3\sqrt2}$$

b. **(6 punti)** Si calcoli

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2)}}\,dx\,dy\,dz.$$

Passiamo in coordinate cilindriche: il corrispondente di D è $\tilde D$ dove

$$\tilde D = \{(\theta,\rho,z):\ 0\le\theta\le\tfrac\pi2\ ;\ \rho\sin\theta\le|z|\le\rho\ ;\ z<\rho^2<1\} = \tilde D\cap\{z\ge0\}\cup\tilde D\cap\{z<0\} = \tilde D^+\cup\tilde D^-$$

$$\int_{\tilde D^-} f = \int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^1 d\rho \int_{-\rho}^{-\rho\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-z^2}}\,dz = \int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 d\rho\left[\arcsin\frac z\rho\right]_{-\rho}^{-\rho\sin\theta} = \int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 d\rho\left[-\theta+\frac\pi2\right] = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\int_{\tilde D^+}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-z^2}} = \int_0^{\pi/2}d\theta\int_{\sin\theta}^1 d\rho\int_{\rho\sin\theta}^{\rho^2}\frac{1}{\rho\sqrt{1-\frac{z^2}{\rho^2}}} = \int_0^{\pi/2}d\theta\int_{\sin\theta}^1 d\rho\left[\arcsin\frac z\rho\right]_{\rho\sin\theta}^{\rho^2} =$$

$$\int_0^{\pi/2}d\theta\int_{\sin\theta}^1(\arcsin\rho-\theta)\,d\rho = \int_0^{\pi/2}(\theta\sin\theta-\theta)\,d\theta + \int_0^{\pi/2}d\theta\int_{\sin\theta}^1\arcsin\rho\,d\rho =$$

$$\int_0^{\pi/2}(\theta\sin\theta-\theta)\,d\theta + \int_0^{\pi/2}\left[\rho\arcsin\rho+\sqrt{1-\rho^2}\right]_{\sin\theta}^1 = \int_0^{\pi/2}\left(\cancel{\theta\sin\theta}-\theta+\frac\pi2-\cancel{(\sin\theta)}\,\theta-\cos\theta\right)d\theta$$

$= \frac{\pi^2}{8}-1$ Sommando i due: $\int_{\tilde D} f = \frac{\pi^2}{4}-1$

3. **(7 punti)** Data la successione di funzioni

$$f_{n,\alpha}(x) = n^\alpha \tanh\left(\frac{x}{n}\right)$$

a. **(3 punti)** si stabilisca, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme E_α di convergenza semplice;

$f_{n,\alpha}(0) = 0 \ \forall n, \alpha$; $x \neq 0$ $f_{n,\alpha}(x) \sim n^\alpha \frac{x}{n} = n^{\alpha-1} \cdot x$ $\begin{cases} \alpha < 1 & \text{tende a zero} \\ \alpha = 1 & \text{tende a } x \end{cases}$ $\alpha > 1$ non converge mai

$E_{n,\alpha} = \{0\}$ $\alpha > 1$ $\quad E_{n,\alpha} = \mathbb{R}$ se $\alpha \leq 1$

funzione limite $f(x) \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ x & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$

b. **(4 punti)** si stabilisca per quali valori di α la convergenza risulta anche uniforme su E_α.

Ricordando che $(\tanh y)' = \frac{1}{Ch^2 y}$ le $f_{n,\alpha}$ sono tutte crescenti (e dispari)

Sia $\alpha < 1$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{n,\alpha}(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{n,\alpha}(x)| = \lim_{x \to +\infty} |f_{n,\alpha}(x)| = n^\alpha \to 0 \iff \alpha < 0$$

Sia $\alpha = 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{n,\alpha}(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{n,\alpha}(x) - x|$$

Calcoliamo la derivata di $f_{n,\alpha}(x) - x$ $\div [f_{n,1}(x) - x]' = 1 - Th^2\left(\frac{x}{n}\right) - 1$

Quindi $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{n,1}(x) - x| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (x - f_{n,1}(x)) = \lim_{x \to +\infty} x - f_{n,1}(x) = +\infty$

quindi per $\alpha = 1$ non c'è convergenza uniforme.

4. **(7 punti)** Si consideri il problema

$$\begin{cases} 8yy' = 15x^2\sqrt[5]{y^2-1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(1 punti)** Al variare del dato iniziale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si stabilisca quando la teoria garantisce l'esistenza e l'unicitá di soluzioni locali;

$$\begin{cases} y' = \dfrac{15x^2\sqrt[5]{y^2-1}}{8y} = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

F è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$. F è ~~Lipschitz rispetto a y~~ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0, y=\pm 1\}$. Quindi $\forall (x_0,y_0)$ con $y_0 \notin \{0, \pm 1\}$ esiste unica la soluzione locale

b. **(3 punti)** per $(x_0, y_0) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, si determinino (se esistono) tutte le soluzioni locali;

$$8y\frac{dy}{dx} = 15x^2(y^2-1)^{\frac{1}{5}}$$ per $y \neq \pm 1$ che sono soluzioni

$$4\int \frac{2y}{(y^2-1)^{\frac{1}{5}}}\,dy = 15\int x^2\,dx + \tilde{C}$$

$(y^2-1)^{4/5} = x^3 + C$ solo per $x^3 + C \geq 0$

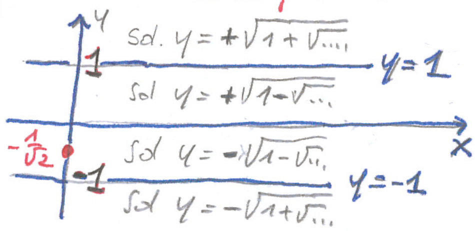
$y(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow C = 2^{-\frac{4}{5}}$

Quindi $(y^2-1)^{4/5} = x^3 + 2^{-\frac{4}{5}}$ $\boxed{\text{per } x \geq -2^{-\frac{4}{15}}}$

$$y^2 = 1 \pm (x^3 + 2^{-\frac{4}{5}})^{5/4}$$

$$y(x) = \pm\sqrt{1 \pm (x^3 + 2^{-\frac{4}{5}})^{5/4}}$$

se scelgo il − deve essere $x^3 - 2^{-\frac{4}{5}} \leq 1$

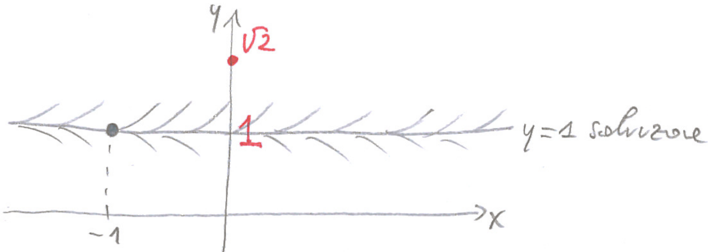


$$\boxed{\begin{array}{l} \text{la soluzione è} \\ y(x) = -\sqrt{1-(x^3+2^{-\frac{4}{5}})^{5/4}} \\ \text{per } -2^{-\frac{4}{15}} \leq x \leq (1+2^{-\frac{4}{5}})^{\frac{1}{3}} \end{array}}$$

c. **(3 punti)** per $(x_0, y_0) = (0, \sqrt{2})$, si determinino (se esistono) tutte le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

da $(y^2-1)^{4/5} = x^3 + C$ solo per $x^3 + C \geq 0$

$y(0) = \sqrt{2} \Rightarrow C = 1$ da cui



$$y(x) \overset{\text{da}}{=} \sqrt{1 + (x^3+1)^{5/4}} \quad \text{in } x \geq -1$$

poichè per questa soluzione

Poichè per questa soluzione abbiamo $y(-1) = 1$

$$\lim_{x \to -1^+} y'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{5/4\,(x^3+1)^{1/4} \cdot 3x^2}{2\sqrt{1+(x^3+1)^{5/4}}} = 0,$$

possiamo "attaccare" in modo C^1 questa soluzione con la soluzione $y(x) = 1$.

Quindi l'unica soluzione è

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1+(x^3+1)^{5/4}} & \text{se } x \geq -1 \\ 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$