

Robotica e Automazione: modulo di Automatica

Pasquale Palumbo

Contents

1	Definizione di sistema	4
1.1	Sistema come insieme di relazioni ingresso/uscita	4
1.2	Sistema con lo spazio di stato	4
1.3	Sistemi stazionari	6
1.4	Sistemi lineari	6
2	Sistemi lineari e stazionari	7
2.1	Sistemi lineari stazionari a tempo discreto	7
2.2	Sistemi lineari stazionari a tempo continuo	9
2.3	Proprietà delle matrici Φ , H , Ψ	10
2.4	Rappresentazione implicita per sistemi lineari e stazionari a tempo discreto	11
2.5	Esempi di modelli a tempo discreto	12
2.5.1	Dinamica di una popolazione studentesca	12
2.5.2	Dinamica di estinzione un debito	15
2.6	Rappresentazione implicita per sistemi lineari e stazionari a tempo continuo	15
2.7	Esempi di modelli a tempo continuo	17
2.7.1	Circuito RLC in serie	17
2.7.2	Moto di un corpo in caduta libera	18
2.8	Discretizzazione di un sistema a tempo continuo	19
3	Modi naturali di un sistema lineare stazionario	20
3.1	Decomposizione spettrale (autovalori distinti)	20
3.2	Modi naturali	21
3.2.1	Modi naturali reali	22
3.2.2	Modi naturali complessi coniugati	22
3.2.3	Il caso di autovalori multipli	24
3.2.4	Alcuni commenti	24
3.2.5	Modi naturali nel circuito RLC in serie	24
3.2.6	Eccitabilità dallo stato iniziale.	25
3.2.7	Eccitabilità per impulsi in ingresso	25
3.2.8	Osservabilità in uscita	26

4	Sistemi lineari stazionari a tempo continuo: approccio in frequenza	26
4.1	Trasformata di Laplace	26
4.2	Trasformate di segnali	27
4.3	Risposta in frequenza di un sistema lineare stazionario a tempo continuo	28
4.3.1	Esempio	30
4.4	Transitorio e regime	32
4.4.1	Risposta a regime all'impulso	33
4.4.2	Risposta a regime al gradino	33
4.4.3	Risposta a regime a una rampa lineare	34
4.4.4	Risposta a regime a un'esponenziale	34
4.4.5	Risposta armonica	35
4.5	Diagrammi di Bode	35
4.5.1	Guadagno di Bode K	36
4.5.2	Termine monomio	36
4.5.3	Termine binomio	37
4.5.4	Termine trinomio	39
4.5.5	Esempio di diagramma di Bode con termini monomi e binomi	44
4.5.6	Esempio di diagramma di Bode con termine trinomio smorzato	47
4.5.7	Esempio di diagramma di Bode con termine trinomio non smorzato	51
5	Punti di equilibrio e Stabilità	54
5.1	Punti di equilibrio	54
5.1.1	Punti di equilibrio per sistemi lineari stazionari	55
5.2	Stabilità	55
5.2.1	Stabilità per sistemi lineari stazionari	56
5.3	Stabilità esterna	57
5.4	Stabilità per sistemi lineari stazionari a tempo continuo: il criterio di Routh	58
5.4.1	Il caso di uno zero in prima colonna nella tabella di Routh	60
5.4.2	Il caso di una riga tutta nulla nella tabella di Routh	62
5.4.3	Scelta della regione per le radici	63
6	Stabilità per sistemi lineari stazionari a retroazione a tempo continuo	67
6.1	Feedback a retroazione unitaria	68
6.2	Stabilità dei sistemi a controreazione unitaria: il Criterio di Nyquist per sistemi Single Input Single Output (SISO)	70
6.2.1	Assenza di radici a parte reale nulla nel polinomio a ciclo aperto	71
6.2.2	Diagrammi polari	72
6.2.3	Esempi di diagrammi polari senza poli immaginari	73
6.2.4	Presenza di radici a parte reale nulla nel polinomio a ciclo aperto	77
6.3	Margini di stabilità	82
6.3.1	Reti anticipatrici per aumentare il margine di fase	85
6.4	Il criterio di Routh per sistemi in controreazione unitaria	85

7	Caratterizzazione dei sistemi di controllo a controreazione per sistemi SISO	86
7.1	Fedeltà di risposta	86
7.1.1	Fedeltà di risposta a ingressi canonici di tipo k	87
7.1.2	Fedeltà di risposta a ingressi armonici	90
7.1.3	Reiezione di disturbi	90
7.2	Specifiche sulla risposta al transitorio: risposta al gradino	92
7.3	Sintesi per tentativi	94
7.4	Regolatori PID	96
7.4.1	Regolatori PI per sistemi di cui si conosce la funzione di trasferimento	98
7.4.2	Regolatori PID per sistemi di cui non si conosce la funzione di trasferimento	100
8	Regolatori digitali	101
8.1	Funzione di trasferimento del sistema discreto equivalente $P(z)$	103
8.2	La trasformata Z	105
8.3	Fedeltà di risposta a ingressi polinomial fattoriali	109
8.4	Fedeltà di risposta ad ingressi armonici	111
8.5	Risposta in tempo finito	111

1 Definizione di sistema

1.1 Sistema come insieme di relazioni ingresso/uscita

Siano dati:

- un sottinsieme T ordinato dei numeri reali $T \subseteq \mathbb{R}$ che chiameremo **asse dei tempi**. Tale sottinsieme può avere la potenza del continuo (ad esempio gl'intervalli $[t_1, t_2]$ o $[t_1, +\infty)$) oppure essere un insieme discreto di elementi (ad esempio una sequenza, finita o infinita, di istanti temporali). L'asse dei tempi rappresenta il modo (dal punto di vista temporale) in cui rappresentiamo le grandezze relative al sistema. In tale contesto definiamo

$$T(t_0) = \{t \in T : t \geq t_0\}$$

l'insieme degli istanti di tempo maggiori o uguali a un valore iniziale t_0 .

- due insiemi dei **valori degli ingressi (input)** U e dei **valori delle uscite (output)** Y . Gli ingressi rappresentano le sollecitazioni al sistema, e possono essere dei disturbi, oppure gli ingressi di controllo attraverso cui vogliamo soddisfare determinate specifiche; le uscite possono rappresentare determinate grandezze di interesse del sistema (che vogliamo monitorare oppure controllare), oppure le uscite accessibili che possiamo misurare. Per il nostro corso considereremo $U \subseteq \mathbb{R}^p$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ intendendo p distinti ingressi al sistema e q distinte uscite del sistema. In questo contesto definiamo $U^{T(t_0)}$ e $Y^{T(t_0)}$ l'insieme di tutte le funzioni di ingresso e di uscita a partire dall'istante iniziale t_0 , $u : T(t_0) \mapsto U$ e $y : T(t_0) \mapsto Y$

allora è possibile definire una selezione delle possibili relazioni ingresso/uscita a partire da un istante t_0 :

$$S_{t_0} \subseteq U^{T(t_0)} \times Y^{T(t_0)}$$

Definizione. Data la terna (T, U, Y) si definisce **sistema** l'insieme delle relazioni

$$\mathcal{S} = \{S_{t_0} \subseteq U^{T(t_0)} \times Y^{T(t_0)}, t_0 \in T\}$$

che sia chiuso rispetto al troncamento, ossia

$$\forall t_0 \in T, t_1 \in T(t_0), (u_0, y_0) \in S_{t_0} \implies (u_0|_{T(t_1)}, y_0|_{T(t_1)}) \in S_{t_1}$$

1.2 Sistema con lo spazio di stato

Con la definizione di *Sistema* come *insieme delle relazioni ingresso/uscita*, può accadere che ad uno stesso ingresso possano essere associate più funzioni di uscita. Allora, considero come sistema la dinamica di un oggetto nello spazio, definendolo come l'insieme delle relazioni tra le forze che agiscono su di esso (input) e la sua traiettoria nello spazio (output). Ad esempio, posso considerare sempre lo stesso input (la forza di gravità) per una mela, ma la sua traiettoria può essere molto diversa: un punto (se la mela è ferma su un tavolo); un moto uniformemente accelerato se parte ferma da un punto sopra il tavolo; un moto parabolico se parte da sopra il tavolo con una velocità trasversale diversa da zero, e così via. Questa ambiguità impedisce di fare predizioni sulla base dei soli ingressi che eccitano il sistema, e può essere superata introducendo il concetto di **stato** (nel caso della mela bisogna conoscere posizione e velocità iniziale). Più formalmente, Le **variabili di stato** a un dato istante t riassumono tutta la storia passata del processo e permettono, dato

l'ingresso a partire da quell'istante di calcolare lo stato negli istanti futuri. Riassumendo, utilizzando la definizione di sistema con lo spazio di stato X , dato un istante $t_0 \in T$, data una funzione $u \in U^{T(t_0)}$, dato uno stato $x_0 \in X$, esiste ed è unica la funzione di uscita $y \in Y^{T(t_0)}$ associata alla terna (t_0, u, x_0) . In base a quanto scritto possiamo definire formalmente un sistema nello spazio di stato da:

- un asse dei tempi T
- una tripla (X, U, Y) di spazio di stato $X \subseteq \mathbb{R}^n$, un insieme degli ingressi $U \subseteq \mathbb{R}^p$ e un insieme delle uscite $Y \subseteq \mathbb{R}^q$
- uno spazio delle funzioni di ingresso

$$\mathcal{U} = \{u \in U^{T(t_0)}, t_0 \in T\}$$

- una **funzione di transizione dello stato**

$$\varphi : (T \times T)^* \times X \times \mathcal{U} \mapsto X, \quad (T \times T)^* = \{(t, t_0) \in T \times T : t \geq t_0\}$$

che aggiorna lo stato all'istante t a partire da un istante precedente $t_0 \leq t$, a partire dallo stato iniziale x_0 ed eccitato dall'ingresso $u \in \mathcal{U}$

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u)$$

- una **funzione di trasformazione di uscita**

$$\eta : T \times X \times U \mapsto Y$$

che fornisce l'uscita attuale (al tempo t) in funzione dell'istante attuale t , dello stato attuale $x(t)$ e dell'ingresso attuale $u(t)$:

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$$

tale per cui le seguenti proprietà siano verificate:

1) consistenza:

$$\forall t = t_0, \forall x \in X, \forall u \in \mathcal{U} \implies \varphi(t, t, x, u) = x$$

Quindi, in virtù della proprietà di consistenza, possiamo sempre assumere che

$$\varphi(t, t_0, x, u) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u)$$

2) causalità:

$$\begin{aligned} \forall (t, t_0) \in (T \times T)^*, \forall x \in X, \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} : u_1|_{[t_0, t]} = u_2|_{[t_0, t]} \\ \implies \varphi(t, t_0, x, u_1) = \varphi(t, t_0, x, u_2) \end{aligned}$$

Quindi, in virtù della proprietà di causalità, possiamo sempre assumere che

$$\varphi(t, t_0, x(t_0), u) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t]})$$

3) separazione:

$$\begin{aligned} \forall t_0 \leq t_1 \leq t \in T, \forall x_0 \in X, \forall u \in \mathcal{U} \\ \implies \varphi(t, t_0, x_0, u|_{[t_0, t]}) = \varphi(t, t_1, x(t_1), u|_{[t_1, t]}) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0, u|_{[t_0, t_1]}), u|_{[t_1, t]}) \end{aligned}$$

1.3 Sistemi stazionari

Siano $u \in \mathcal{U}$ e $\Delta \in T$. Definiamo $\delta_\Delta u \in \mathcal{U}$ la funzione traslata

$$\delta_\Delta u(t) = u(t - \Delta)$$

Un sistema è **stazionario** se

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall (t, t_0) \in (T \times T)^*, \quad \forall x \in X, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad \forall \Delta \in T \\ & \implies \varphi(t + \Delta, t_0 + \Delta, x, \delta_\Delta u|_{[t_0 + \Delta, t + \Delta]}) = \varphi(t, t_0, x, u|_{[t_0, t]}) \\ (ii) \quad & \forall t \in T, \quad \forall x \in X, \quad \forall \bar{u} \in U, \quad \forall \Delta > 0 \\ & \implies \eta(t + \Delta, x, \bar{u}) = \eta(t, x, \bar{u}) \end{aligned}$$

Da cui segue che, scegliendo $\Delta = -t_0$

$$x(t) = \varphi(t - t_0, 0, x, \delta_{-t_0} u|_{[0, t - t_0]}) = \varphi(t, t_0, x, u|_{[t_0, t]})$$

per cui, ai fini della funzione di transizione dello stato, conta solo lo scostamento $t - t_0$ e non i due singoli istanti di tempo. Per questo motivo, la funzione di transizione dello stato per sistemi stazionari può supporre che parta sempre dall'istante $t_0 = 0$ senza perdita di generalità:

$$x(t) = \varphi(t, 0, x(0), u|_{[0, t]})$$

Analogamente, scegliendo $\Delta = -t$ nella trasformazione di uscita:

$$y(t) = \eta(t, x, \bar{u}) = \eta(0, x, \bar{u}), \quad \forall x \in X, \quad \bar{u} \in U$$

per cui la funzione di trasformazione di uscita non dipende esplicitamente dal tempo.

1.4 Sistemi lineari

Un sistema nello spazio di stato è **lineare** se:

- la funzione di transizione dello stato è lineare rispetto a $X \times \mathcal{U}$:

$$\varphi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t]}) = \varphi_{\text{lib}}(t, t_0, x(t_0), 0|_{[t_0, t]}) + \varphi_{\text{for}}(t, t_0, 0, u|_{[t_0, t]})$$

ossia l'evoluzione dello stato può decomporre nella sua **evoluzione libera** (che dipende *linearmente* dal solo stato iniziale, supponendo nullo l'ingresso) + la sua **evoluzione forzata** (che dipende *linearmente* dalla sola funzione di ingresso, supponendo nullo lo stato iniziale)

- la funzione di trasformazione di stato è lineare rispetto a $X \times U$:

$$\eta(t, x(t), u(t)) = \eta_1(t, x(t), 0) + \eta_2(t, 0, u(t))$$

ossia l'evoluzione dello stato può decomporre nella sua **componente dinamica** η_1 (che dipende *linearmente* dal solo stato all'istante attuale, supponendo nullo l'ingresso all'istante attuale) + la sua **componente diretta** η_2 (che dipende *linearmente* dal solo ingresso all'istante attuale, supponendo nullo lo stato all'istante attuale).

2 Sistemi lineari e stazionari

2.1 Sistemi lineari stazionari a tempo discreto

In un sistema a tempo discreto, l'asse dei tempi è un sottinsieme degli interi relativi \mathbb{Z} . Per quel che riguarda l'evoluzione libera, sfruttando la stazionarietà, avremo la funzione

$$x_{\text{lib}}(t) = \varphi_{\text{lib}}(t - t_0, 0, x(t_0), 0|_{[0, t-t_0)})$$

Sfruttando la linearità della φ_{lib} rispetto al vettore $x(t_0)$, possiamo esplicitare tale relazione attraverso una matrice:

$$x_{\text{lib}}(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0)$$

e la matrice $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la **matrice di transizione dello stato**. Invece, per la risposta forzata, sfruttando la stazionarietà:

$$x_{\text{for}}(t) = \varphi_{\text{for}}(t - t_0, 0, \delta_{-t_0}u|_{[0, t-t_0)})$$

In questo caso la linearità è rispetto alla funzione di ingresso, ossia rispetto ai suoi valori

$$u(t_0), u(t_0 + 1), \dots, u(t - 1)$$

per cui

$$\begin{aligned} x_{\text{for}}(t) &= H(t - t_0, t_0)u(t_0) + \dots + H(t - t_0, t - 1)u(t - 1) \\ &= \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - t_0, \tau)u(\tau) \end{aligned}$$

Dalle proprietà di Sistema si può dimostrare che

$$H(t - t_0, \tau) = H(t - \tau) \quad \forall t_0 \leq \tau < t$$

per cui la risposta forzata diventa

$$x_{\text{for}}(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau)$$

con la matrice $H(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, detta **matrice di forzamento**. Per rendere consistente la formula anche per $t = t_0$ (in questo caso la risposta forzata è nulla), si definisce $H(0) = 0$. Riassumendo, la decomposizione in evoluzione libera e forzata dello stato per un sistema lineare stazionario a tempo discreto è:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)$$

Relativamente alla trasformazione di uscita, le funzioni η_1 ed η_2 saranno trasformazioni lineari dello stato e dell'ingresso attuale $x(t)$ e $u(t)$, rispettivamente, per cui possono scriversi con opportune matrici $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ che non dipendono dal tempo per la proprietà di stazionarietà, per cui:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

In particolare, la matrice D prende il nome di matrice del legame diretto ingresso/uscita. Andando a sostituire la funzione di transizione dello stato otteniamo la decomposizione in evoluzione libera e forzata anche per l'uscita:

$$\begin{aligned} y(t) &= C \left[\Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) \right] + Du(t) \\ &= C\Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t CH(t - \tau)u(\tau) + Du(t) \\ &= \Psi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t W(t - \tau)u(\tau) \end{aligned}$$

con la **matrice di transizione stato/uscita** $\Psi(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, e la **matrice (funzione) di trasferimento** $W(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$

$$\Psi(t) = C\Phi(t), \quad W(t) = \begin{cases} CH(t), & t > 0 \\ D, & t = 0 \end{cases}$$

Si noti che, utilizzando la funzione **delta di Kronecker**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

la matrice di trasferimento può scriversi in modo compatto come

$$W(t) = CH(t) + \delta(t)D$$

Tramite la delta di Kronecker si introducono gli *ingressi impulsivi* come

$$u(t) = \delta(t - \bar{t})e_i$$

dove e_i è un vettore della base canonica in \mathbb{R}^p , ossia è un vettore tutto nullo tranne che per la componente i -esima uguale a 1. In questo caso, per $t_0 \leq \bar{t} \leq t$ la risposta forzata diventa

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \delta(\tau - \bar{t})W(t - \tau)e_i = W_i(t - \bar{t})$$

dove W_i è la i -esima colonna di W . Per questo motivo, la matrice di trasferimento prende anche il nome di **matrice delle risposte impulsive**.

Riassumendo, parliamo di **rappresentazione esplicita** per un sistema lineare stazionario a tempo discreto per la seguente coppia di equazioni che naturalmente forniscono la decomposizione in evoluzione libera e forzata dello stato e dell'uscita:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) \\ y(t) &= \Psi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t W(t - \tau)u(\tau) \end{aligned}$$

2.2 Sistemi lineari stazionari a tempo continuo

In un sistema a tempo continuo, l'asse dei tempi è un sottinsieme dei numeri reali \mathbb{R} . Possono ripetersi tutti i ragionamenti svolti per i sistemi lineari e stazionari a tempo discreto (e si adottano anche le stesse notazioni per le matrici della rappresentazione esplicita Φ, H, Ψ, W), con l'eccezione del calcolo della risposta forzata dello stato e dell'uscita. A tempo continuo, infatti, la risposta forzata

$$x_{\text{for}}(t) = \varphi_{\text{for}}(t - t_0, 0, \delta_{-t_0} u|_{[0, t-t_0)})$$

non è una trasformazione lineare di una quantità discreta e finita di vettori, perché il tempo ha la potenza del continuo. Per cui bisogna fare riferimento a una trasformazione lineare rispetto a una funzione $u|_{[t_0, t)}$, che si dimostra essere fornita dall'**integrale di convoluzione**

$$x_{\text{for}}(t) = \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

e quindi la decomposizione in evoluzione libera e risposta forzata per la funzione di trasformazione dello stato si ottiene andando a sostituire l'integrale di convoluzione:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Per quel che riguarda la trasformazione di uscita, andando a sostituire la risposta forzata dello stato, avremo

$$y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t CH(t - \tau)u(\tau)d\tau + Du(t)$$

con $\Psi(t) = C\Phi(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$. In questo caso la definizione formale della matrice $W(t)$ richiede l'equivalente a tempo continuo della delta di Kronecker, detta **delta (impulso) di Dirac** e indicata analogamente con $\delta(t)$. Trattasi di una *distribuzione* (non saremo rigorosi nella definizione) tale per cui:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - \bar{t})dt = f(\bar{t})$$

per cui la decomposizione nell'evoluzione libera + risposta forzata per la funzione di trasformazione dell'uscita può scriversi come

$$y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

con la matrice di trasferimento data da

$$W(t) = CH(t) + \delta(t)D$$

Analogamente al tempo discreto, tramite la delta di Dirac si introducono gli ingressi impulsivi come

$$u(t) = \delta(t - \bar{t})e_i$$

dove e_i è un vettore della base canonica in \mathbb{R}^p . In questo caso, per $t_0 \leq \bar{t} \leq t$ la risposta forzata diventa

$$y(t) = \int_{t_0}^t \delta(\tau - \bar{t}) W(t - \tau) e_i d\tau = W_i(t - \bar{t})$$

dove W_i è la i -esima colonna di W . Per questo motivo, anche nel tempo continuo, la matrice di traferimento prende il nome di **matrice delle risposte impulsive**.

Riassumendo, anche nel caso a tempo continuo, parliamo di **rappresentazione esplicita** per un sistema lineare stazionario per la seguente coppia di equazioni che naturalmente forniscono la decomposizione in evoluzione libera e forzata dello stato e dell'uscita:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) &= \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

2.3 Proprietà delle matrici Φ , H , Ψ

Queste proprietà valgono sia per i sistemi a tempo continuo che a tempo discreto. Qui sono ricavate per i sistemi a tempo continuo, ma i conti sono analoghi per il tempo discreto.

- 1) Dalla proprietà di consistenza, ponendo $t = t_0$ deve essere:

$$x(t) = \Phi(0)x(t)$$

per cui, data l'arbitrarietà di $x(t)$, necessariamente

$$\Phi(0) = I_n$$

Da cui segue che

$$\Psi(0) = C\Phi(0) = C$$

- 2) Dalla proprietà di separazione, dati $t_0 \leq t_1 \leq t$, $\forall x(t_0)$, posto $u = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t - t_0)x(t_0) \\ &= \Phi(t - t_1)x(t_1) = \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0)x(t_0) \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà dello stato iniziale abbiamo

$$\Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0), \quad t_0 \leq t_1 \leq t$$

ossia

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$$

Questa proprietà è nota come proprietà di **semigrupp**. Come conseguenza si ha che il prodotto tra due matrici di transizione dello stato è commutativo. Da questa proprietà segue anche che

$$\Psi(t_1 + t_2) = C\Phi(t_1 + t_2) = \Psi(t_1)\Phi(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$$

3) Dalla proprietà di separazione, dati $t_0 \leq t_1 \leq t$, $\forall u \in \mathcal{U}$, posto $x(t_0) = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t-t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t-t_1) \int_{t_0}^{t_1} H(t_1-\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_1}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Da cui, semplificando:

$$\int_{t_0}^{t_1} H(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau)u(\tau)d\tau$$

Dall'arbitrarietà dell'input abbiamo

$$H(t-\tau) = \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau), \quad \forall \tau \leq t_1 \leq t$$

ossia

$$H(t_1+t_2) = \Phi(t_1)H(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$$

2.4 Rappresentazione implicita per sistemi lineari e stazionari a tempo discreto

Le rappresentazioni implicite aiutano a dare una descrizione *dinamica*, facile da implementare, di cui le rappresentazioni esplicite costituiscono la soluzione. Consideriamo la rappresentazione esplicita di un sistema lineare stazionario a tempo discreto e cerchiamo un'equazione ricorsiva che possa descrivere le variazioni dello stato. Ponendo $t_0 = t$ e cercando lo stato a $t+1$:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \Phi(t+1-t)x(t) + \sum_{\tau=t}^t H(t+1-\tau)u(\tau) \\ &= \Phi(1)x(t) + H(1)u(t) = Ax(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

con $A = \Phi(1)$ e $B = H(1)$. Mettendo a sistema con l'equazione di uscita decomposta nella componente dinamica e diretta otteniamo la **rappresentazione implicita** del sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) \\ y(t) &= Cx(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Le 4 matrici A, B, C, D si ricavano dalle 4 matrici della rappresentazione esplicita Φ, H, Ψ, W come precedentemente visto:

$$A = \Phi(1), \quad B = H(1), \quad C = \Psi(0), \quad D = W(0)$$

Per quel che riguarda il passaggio da implicita a esplicita, considerando l'equazione di transizione dello stato per $u = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t-1) = A(Ax(t-2)) = A^2x(t-2) = \dots A^\tau x(t-\tau) = \dots \\ &\dots = A^{t-t_0}x(t-t+t_0) = A^{t-t_0}x(t_0) \end{aligned}$$

da cui segue che $\Phi(t - t_0) = A^{t-t_0}$, o più semplicemente che $\Phi(t) = A^t$. Per quel che riguarda la matrice di forzamento, dalla sua proprietà di separazione:

$$H(t) = H(t - 1 + 1) = \Phi(t - 1)H(1) = A^{t-1}B$$

per cui $H(t) = A^{t-1}B$. Analogamente, a partire dalle loro definizioni:

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = CA^t$$

e

$$W(t) = CH(t) + \delta(t)D = CA^{t-1}B + \delta(t)D$$

Dunque, le trasformazioni da implicita e esplicita sono:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= A^t, & \Psi(t) &= CA^t, \\ H(t) &= A^{t-1}B, & W(t) &= CA^{t-1}B + \delta(t)D \end{aligned}$$

Riassumendo, le risposte libera e forzata di stato e uscita per un sistema lineare stazionario a tempo discreto si scrivono come

$$\begin{aligned} x_{\text{lib}}(t) &= A^{t-t_0}x(t_0) & y_{\text{lib}}(t) &= CA^{t-t_0}x(t_0) \\ x_{\text{for}}(t) &= \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau) & y_{\text{for}}(t) &= \sum_{\tau=t_0}^{t-1} CA^{t-\tau-1}Bu(\tau) + Du(t) \end{aligned}$$

2.5 Esempi di modelli a tempo discreto

2.5.1 Dinamica di una popolazione studentesca

Si consideri la dinamica di una popolazione di studenti di un ciclo di studi della durata di tre anni. Il tempo è discreto, e scandisce le dinamiche di anno in anno. Lo stato è rappresentato dal numero di studenti iscritti al primo, secondo e terzo anno, e dai laureati. Per cui il vettore di stato è $x(t) \in \mathbb{R}^4$, con $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, numero di studenti iscritti dell' i -esimo anno, per l'anno accademico t , e $x_4(t)$ numero totale di laureati. Sia $u(t)$ l'ingresso del sistema definito come il numero di nuovi iscritti al primo anno. Si supponga che

- $\alpha_1 \in (0, 1)$ sia la frazione di iscritti al primo anno che si iscriveranno al secondo (e $1 - \alpha_1$ la frazione di quelli che abbandonano al primo anno);
- $\alpha_2 \in (0, 1)$ sia la frazione di iscritti al secondo anno che si iscriveranno al terzo (e $1 - \alpha_2$ la frazione di quelli che abbandonano al secondo anno);
- $\alpha_3 \in (0, 1)$ sia la frazione di iscritti al terzo anno che si laureano, $\alpha_4 \in (0, 1)$ la frazione di iscritti al terzo anno che abbandonano

Allora, le relazioni dinamiche sono:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) - \alpha_1 x_1(t) - (1 - \alpha_1)x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) &= x_2(t) + \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t) - (1 - \alpha_2)x_2(t) \\ x_3(t+1) &= x_3(t) + \alpha_2 x_2(t) - \alpha_3 x_3(t) - \alpha_4 x_3(t) \\ x_4(t+1) &= x_4(t) + \alpha_4 x_3(t) \end{aligned}$$

ossia, dopo le ovvie semplificazioni:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= u(t) \\x_2(t+1) &= \alpha_1 x_1(t) \\x_3(t+1) &= \alpha_2 x_2(t) + (1 - \alpha_3 - \alpha_4)x_3(t) \\x_4(t+1) &= \alpha_4 x_3(t) + x_4(t)\end{aligned}$$

Supponendo di scegliere come output la popolazione studentesca totale y_1 e la popolazione totale di laureati y_2 , avremo $y(t) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\y_2(t) &= x_4(t)\end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 - \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

Ipotizzando lo stato iniziale nullo al tempo $t = 0$ (ossia non si hanno iscritti al tempo iniziale), e supponendo un flusso di iscrizioni costante $u(t) = \bar{u}$ negli anni, avremo:

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B \bar{u} = \sum_{k=0}^{t-1} A^k B \bar{u}$$

Infine, tenendo conto che

$$\begin{aligned}A^0 B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & A^1 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & A^2 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\A^3 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 (1 - \alpha_3 - \alpha_4) \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \end{bmatrix}, & A^4 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^2 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 (1 + (1 - \alpha_3 - \alpha_4)) \end{bmatrix} =\end{aligned}$$

generalizzando:

$$\begin{aligned}
 A^k B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2} \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \sum_{i=0}^{k-3} (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2} \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \frac{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2}}{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2} \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} (1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2}) \end{bmatrix}, \quad k > 2
 \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned}
 x(1) &= B\bar{u} = [\bar{u} \ 0 \ 0 \ 0]^T & x(2) &= (B + AB)\bar{u} = [1 \ \alpha_1 \ 0 \ 0]^T \bar{u} \\
 y(1) &= Cx(1) = [\bar{u} \ 0]^T & y(2) &= Cx(2) = [1 + \alpha_1 \ 0]^T \bar{u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(3) &= (B + AB + A^2B)\bar{u} = [1 \ \alpha_1 \ \alpha_1 \alpha_2 \ 0]^T \bar{u} \\
 y(3) &= Cx(3) = [1 + \alpha_1 + \alpha_2 \ 0]^T \bar{u}
 \end{aligned}$$

e poi, per $t > 3$:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \bar{u} \\
 x_2(t) &= \alpha_1 \bar{u} \\
 x_3(t) &= \alpha_1 \alpha_2 \sum_{k=2}^{t-1} (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2} \bar{u} = \alpha_1 \alpha_2 \sum_{\rho=0}^{t-3} (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^\rho \bar{u} \\
 &= \alpha_1 \alpha_2 \frac{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{t-2}}{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)} \bar{u} = \alpha_1 \alpha_2 \frac{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{t-2}}{\alpha_3 + \alpha_4} \bar{u} \\
 x_4(t) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \sum_{k=3}^{t-1} (1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2}) \bar{u} \\
 &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \sum_{\rho=0}^{t-4} (1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{\rho+1}) \bar{u} \\
 &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \left((t-3) - (1 - \alpha_3 - \alpha_4) \frac{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{t-3}}{\alpha_3 + \alpha_4} \right) \bar{u}
 \end{aligned}$$

Per cui notiamo che, al variare del tempo (degli anni accademici), supponendo un flusso in ingresso costante, la numerosità degli iscritti al primo anno non varia ed è fissa a \bar{u} (infatti tanti ne entrano, tanti ne escono, o per il secondo anno o per abbandono), la numerosità degli iscritti al secondo anno non varia ed è pari alla frazione α_1 del flusso in ingresso, la numerosità degli iscritti al terzo anno varia nel tempo e converge al valore

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 + \alpha_4} \bar{u}$$

e, infine, la numerosità dei laureati asintoticamente converge verso una crescita lineare del tipo:

$$x_4(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \left((t-3) - \frac{1 - \alpha_3 - \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \right) \bar{u}$$

2.5.2 Dinamica di estinzione un debito

Sia D l'ammontare di un debito contratto al tempo $t = 0$. Sia $r(t)$ la rata annuale, e sia α l'interesse annuo sul debito. Se indichiamo con $x(t)$ la somma da restituire all'anno t (il tempo evolve in modo discreto di anno in anno), l'equazione relativa all'ammontare del debito è:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + \alpha x(t) - r(t) \\ x(0) = D \end{cases}$$

In questo caso il sistema è scalare (dimensione di stato $n = 1$), con le matrici $A = 1 + \alpha$, $B = -1$. Per cui, la soluzione esplicita è:

$$x(t) = (1 + \alpha)^t D - \sum_{\tau=0}^{t-1} (1 + \alpha)^{t-\tau-1} r(\tau)$$

Supponendo una rata di restituzione costante $r(t) = \bar{r}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 + \alpha)^t D - \sum_{k=0}^{t-1} (1 + \alpha)^k \bar{r} = (1 + \alpha)^t D - \frac{1 - (1 + \alpha)^t}{1 - (1 + \alpha)} \bar{r} \\ &= (1 + \alpha)^t D - \frac{(1 + \alpha)^t - 1}{\alpha} \bar{r} \end{aligned}$$

Se volessimo conoscere che rata usare per estinguere il debito dopo N anni, avremo:

$$(1 + \alpha)^N D = \frac{(1 + \alpha)^N - 1}{\alpha} \bar{r}$$

da cui

$$\bar{r} = \frac{\alpha(1 + \alpha)^N D}{(1 + \alpha)^N - 1} = \frac{\alpha}{1 - (1 + \alpha)^{-N}} D$$

Ad esempio, per un debito di $400K$ euro, a un tasso di interesse annuo fisso di $\alpha = 2\%$, volendo estinguere il debito in 30 anni, avreste una rata annua di

$$\bar{r} = \frac{0.02}{1 - (1.02)^{-30}} \cdot 400 \cdot 10^3 \simeq 17,860$$

da cui quasi 1,500 euro al mese. Se, invece, il tasso di interesse fosse dell'1%, allora

$$\bar{r} = \frac{0.01}{1 - (1.01)^{-30}} \cdot 400 \cdot 10^3 \simeq 15,500$$

ossia, quasi 1,300 euro mensili.

2.6 Rappresentazione implicita per sistemi lineari e stazionari a tempo continuo

Come operazione preliminare, è necessario investigare le proprietà della matrice di transizione Φ . In particolare, calcoliamone la derivata:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta) - \Phi(t)}{\Delta}$$

Dalle proprietà di semigrupp e consistenza:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)\Phi(\Delta) - \Phi(t)}{\Delta} = \Phi(t) \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Delta) - I_n}{\Delta} \\ &= \Phi(t) \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Delta) - \Phi(0)}{\Delta} = \Phi(t) \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0}\end{aligned}$$

E, analogamente, poiché $\Phi(t + \Delta) = \Phi(t)\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta)\Phi(t)$, abbiamo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi(t) \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} \Phi(t)$$

Se definiamo con A tale derivata, abbiamo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi(t) = \Phi(t)A, \quad A = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0}$$

Analogamente, se andiamo a considerare le proprietà della matrice H :

$$H(t) = H(t + 0) = \Phi(t)H(0)$$

e, quindi:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}H(0) = A\Phi(t)H(0) = AH(t)$$

Adesso consideriamo la rappresentazione esplicita di un sistema lineare stazionario a tempo continuo e cerchiamo un'equazione differenziale che possa descrivere le variazioni dello stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=t_0} x(t_0) + H(0)u(t) + \int_{t_0}^t \left. \frac{dH}{dt} \right|_{t-\tau} u(\tau) d\tau \\ &= A\Phi(t - t_0)x(t_0) + H(0)u(t) + \int_{t_0}^t AH(t - \tau)u(\tau) d\tau \\ &= A \left[\Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau) d\tau \right] + H(0)u(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t), \quad B = H(0)\end{aligned}$$

Per quel che riguarda le matrici C e D , dalla loro relazioni con le matrici della rappresentazione esplicita, segue:

$$C = \Psi(0), \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (W(t) - C\Phi(t)B) dt$$

Riassumendo, la rappresentazione implicita di un sistema lineare stazionario a tempo continuo è

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) \\ y(t) &= Cx(t) + D(t)\end{aligned}$$

con

$$A = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0}, \quad B = H(0), \quad C = \Psi(0), \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (W(t) - C\Phi(t)B) dt$$

Per il passaggio da implicito a esplicito, ossia per l'integrazione dell'equazione differenziale associata, sviluppiamo con la serie di Taylor la matrice $\Phi(t)$ nell'intorno dell'origine $t = 0$:

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \dot{\Phi}(0)t + \ddot{\Phi}(0)\frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}$$

Ora, applicando iterativamente le proprietà sulle derivate della matrice $\Phi(t)$ abbiamo

$$\Phi^{(k)}(t) = A^k \Phi(t) = \Phi(t) A^k$$

per cui, dallo sviluppo di Taylor, ricordando che $\Phi(0) = I_n$:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi(0) A^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Si dimostra che la serie matriciale converge, e la matrice a cui converge prende il nome di **esponenziale di matrice**, per la somiglianza formale con lo sviluppo in serie della funzione esponenziale:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Dunque, la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$ si calcola attraverso l'esponenziale della matrice At . Tutte le altre matrici seguono di conseguenza:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At}, & \Psi(t) &= Ce^{At}, \\ H(t) &= e^{At}B, & W(t) &= Ce^{At}B + \delta(t)D \end{aligned}$$

Riassumendo, le risposte libera e forzata di stato e uscita per un sistema lineare stazionario a tempo continuo si scrivono come

$$\begin{aligned} x_{\text{lib}}(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) & y_{\text{lib}}(t) &= Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) \\ x_{\text{for}}(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau & y_{\text{for}}(t) &= \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

2.7 Esempi di modelli a tempo continuo

2.7.1 Circuito RLC in serie

Consideriamo una maglia elettrica con un generatore di tensione (di differenza di potenziale $\phi(t)$), una resistenza (di resistenza R), un condensatore (di capacità C) e un'induttanza (di induttanza L) in serie. Andando a scrivere il bilancio delle tensioni nella maglia, indicando con $i(t)$ la corrente nella maglia, tenendo conto che la caduta di potenziale per la resistenza vale $Ri(t)$, per il condensatore vale

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau)d\tau$$

e per l'induttanza vale

$$L \frac{di}{dt}$$

avremo:

$$\phi(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + L \frac{di}{dt}$$

Se definiamo il vettore di stato $x(t) \in \mathbb{R}^2$ con $x_1(t) = v_c(t)$ e $x_2(t) = i(t)$ e indichiamo con $u(t) = \phi(t)$ l'ingresso del sistema, avremo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{C} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{L} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} \phi(t) \end{aligned}$$

ossia, in forma matriciale:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

da cui, se prendiamo come uscite le tensioni ai capi di resistenza, condensatore e induttanza:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= Ri(t) = Rx_2(t) \\ y_2(t) &= v_c(t) = x_1(t) \\ y_3(t) &= L di/dt = -x_1(t) - Rx_2(t) + \phi(t) \end{aligned}$$

avremo

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad C = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 1 & 0 \\ -1 & -R \end{bmatrix}, \quad D = 1$$

2.7.2 Moto di un corpo in caduta libera

Consideriamo un corpo di massa m in caduta libera per effetto della gravità. La forza d'attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra può approssimarsi a una forza di intensità costante pari a mg , con $g = 9.8 \text{ms}^{-2}$ l'accelerazione di gravità. Ipotizziamo che il corpo sia anche soggetto ad attrito dinamico a causa dell'aria, ossia una forza F_a che si oppone al movimento con intensità proporzionale alla velocità del corpo: $F_a = -\beta v(t)$, dove $v(t) = \dot{s}(t)$ indica la velocità, e $s(t)$ indica la posizione sull'asse verticale ove si esplica il moto. Dalla equazione della dinamica di Newton, avremo:

$$mg - \beta \dot{s}(t) = m \ddot{s}(t)$$

Indicando con $x_1 = s(t)$ e $x_2(t) = \dot{s}$ il vettore di stato in \mathbb{R}^2 , avremo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\beta}{m} x_2(t) + g \end{aligned}$$

ossia, indicando con $u(t) = g$ l'accelerazione di gravità

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta/m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo di essere interessati alla velocità di regime (di un paracadutista, ad esempio) a partire da una velocità nulla (e posizione nulla su una scala verticale dello spazio), per cui l'uscita del sistema sarà la seconda componente del vettore di stato:

$$x(0) = [0 \ 0]^T, \quad C = [0 \ 1], \quad D = 0$$

Per il calcolo dell'esponenziale di matrice, notiamo che

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta/m \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} -\beta/m \\ (\beta/m)^2 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad A^k B = \begin{bmatrix} (-\beta/m)^{k-1} \\ (-\beta/m)^k \end{bmatrix}$$

per cui, l'evoluzione dell'uscita (solo forzata) diventa:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{k=0}^{+\infty} C A^k B \frac{(t-\tau)^k}{k!} u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{\beta(t-\tau)}{m} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot g d\tau = g \int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{gm}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}(t-\tau)} \Big|_0^t = \frac{gm}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) \end{aligned}$$

Quindi, per $t \mapsto +\infty$ abbiamo che la risposta forzata converge al valore di regime della velocità pari a gm/β . La velocità con cui si raggiunge la velocità di regime (occhio al gioco di parole!) dipende dalla velocità con cui l'esponenziale decrescente va a zero, ossia dal rapporto β/m : maggiore è l'attrito (fluido molto viscoso) oppure minore è la massa (corpo leggero) e più velocemente si raggiunge la velocità di regime.

2.8 Discretizzazione di un sistema a tempo continuo

Consideriamo un sistema a tempo continuo e immaginiamo di campionare stato, ingresso e uscita a intervalli regolari di ampiezza Δ per cui la sequenza discreta degli istanti campionati sarà:

$$t_k = k\Delta, \quad k \in \mathbb{N}$$

Volendo scrivere la funzione di transizione dello stato a tempo discreto associato all'aggiornamento dei campioni da t_k a t_{k+1} , avremo:

$$x(t_{k+1}) = x((k+1)\Delta) = e^{A((k+1)\Delta - k\Delta)} x(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{A((k+1)\Delta - \tau)} B u(\tau) d\tau$$

Se approssimiamo

$$u(\tau) \simeq u(k\Delta), \quad \tau \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$$

allora

$$x((k+1)\Delta) = e^{A\Delta} x(k\Delta) + \int_0^\Delta e^{A\theta} d\theta \cdot B u(k\Delta)$$

Da cui

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k)$$

con $x_d(k) = x(k\Delta)$, $u_d(k) = u(k\Delta)$ e

$$A_d = e^{A\Delta}, \quad B_d = \int_0^\Delta e^{A\theta} d\theta \cdot B$$

Nel caso in cui la matrice A fosse invertibile, per calcolare l'integrale della matrice B_d sfruttiamo l'esponenziale di matrice:

$$\begin{aligned} \int_0^\Delta e^{A\theta} d\theta &= \int_0^\Delta \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \frac{\theta^k}{k!} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \frac{\theta^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{h=1}^{+\infty} A^{h-1} \frac{\Delta^h}{h!} \\ &= A^{-1} \sum_{h=1}^{+\infty} A^h \frac{\Delta^h}{h!} = A^{-1} \left(-I_n + \sum_{h=0}^{+\infty} A^h \frac{\Delta^h}{h!} \right) = A^{-1} (e^{A\Delta} - I_n) \end{aligned}$$

Per cui, in tal caso:

$$A_d = e^{A\Delta}, \quad B_d = A^{-1} (A_d - I_n) B$$

E' bene sottolineare che, se il sistema a tempo continuo fosse sollecitato da un segnale in ingresso costante a tratti per cui

$$u(\tau) = u(k\Delta), \quad \tau \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$$

allora la discretizzazione sarebbe *esatta*, ossia lo stato del sistema a tempo discreto restituirebbe lo stato del sistema a tempo continuo negli istanti campionati.

3 Modi naturali di un sistema lineare stazionario

3.1 Decomposizione spettrale (autovalori distinti)

Consideriamo la matrice dinamica A di un sistema lineare stazionario (non importa se a tempo discreto o continuo). Gli *autovalori* della matrice sono le radici del *polinomio caratteristico* di A

$$d(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Questo polinomio ha grado n e, per il *teorema fondamentale dell'algebra*, avrà n radici nel campo complesso, di cui quelle non reali saranno a coppie complesse coniugate. Supponiamo che siano tutte distinte

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Siano u_1, \dots, u_n gli autovettori destri di A associati a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ossia

$$A u_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

per cui vale la relazione

$$AU = U\Lambda, \quad U = [u_1 \cdots u_n], \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice U è invertibile, sarà

$$U^{-1}A = \Lambda U^{-1}$$

che, scritta rinominando la matrice

$$V = U^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}, \quad v_i^T u_j = \delta_{ij}$$

fornisce la relazione degli autovettori sinistri v_i^T associati alle righe di V :

$$v_i^T A = \lambda_i v_i^T, \quad i = 1, \dots, n$$

Da cui segue la **decomposizione spettrale** della matrice A :

$$A = U \Lambda V = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v_i^T$$

Dalla decomposizione spettrale di A , si scrivono facilmente le decomposizioni spettrali della potenza di matrice A^k

$$A^k = U \Lambda^k V = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u_i v_i^T$$

e dell'esponenziale di matrice e^A :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^k}{k!} u_i v_i^T = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i} u_i v_i^T$$

3.2 Modi naturali

Utilizziamo la decomposizione spettrale per descrivere l'evoluzione libera di un sistema lineare stazionario, e supponiamo di avere n autovalori distinti. Quindi, scriviamo lo stato iniziale decomposto negli autovettori destri, ossia:

$$x(t_0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$$

I coefficienti α_j possono facilmente calcolarsi sfruttando la relazione di ortonormalità tra autovettori destri e sinistri

$$V = U^{-1} \implies v_i^T u_j = \delta_{ij}$$

Quindi

$$v_i^T x(t_0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_i^T u_j = \alpha_i$$

Da cui, a tempo discreto:

$$x_{\text{lib}}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t-t_0} u_i v_i^T x(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_i^{t-t_0} u_i v_i^T u_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^{t-t_0} u_i$$

e a tempo continuo:

$$x_{\text{lib}}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i v_i^T x(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i v_i^T u_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)} u_i$$

Ognuno degli n elementi della somma fornisce un **modo naturale** dell'evoluzione libera del sistema. Di seguito alcune importanti considerazioni sui modi naturali.

3.2.1 Modi naturali reali

Nel caso di autovalori reali, il modo naturale evolve lungo la direzione dell'autovettore u_i . L'analisi della sua stabilità consiste nel valutare se la sua evoluzione nel tempo resta limitata oppure no. Possiamo individuare le seguenti possibilità:

- **Stabilità asintotica.** Per i sistemi a tempo discreto (continuo) il modo naturale è *asintoticamente stabile* se l'autovalore ad esso associato è in modulo minore di 1, $|\lambda_i| < 1$ (minore di 0, $\lambda_i < 0$): in questo caso, il modo parte da $\alpha_i u_i$ per $t = t_0$, e converge esponenzialmente a zero per $t \mapsto +\infty$.
 - Nel caso *a tempo discreto*, per $-1 < \lambda_i < 0$ la convergenza non è monotona ma con oscillazioni; per $0 < \lambda_i < 1$ la convergenza è monotona, senza oscillazioni, per $\lambda_i = 0$ il modo è nullo per ogni $t \geq t_0$.
 - Nel caso *a tempo continuo*, per un modo asintoticamente stabile la convergenza a zero è sempre monotona, senza oscillazioni.
- **Stabilità semplice.** Per i sistemi a tempo discreto (continuo) il modo naturale è (*semplicemente*) *stabile* se l'autovalore ad esso associato è in modulo uguale a 1, $|\lambda_i| = 1$ (uguale a 0, $\lambda_i = 0$): in questo caso il modo resta limitato lungo la direzione dell'autovettore u_i , senza convergere a zero.
 - Nel caso *a tempo discreto*, per $\lambda_i = 1$, non c'è movimento, e il modo resta fisso al valore α_i lungo la direzione u_i ; per $\lambda_i = -1$, il modo oscilla su u_i tra i valori α_i e $-\alpha_i$ su u_i .
 - Nel caso *a tempo continuo*, per $\lambda_i = 0$, non c'è movimento, e il modo resta fisso al valore α_i lungo la direzione u_i .
- **Instabilità.** Per i sistemi a tempo discreto (continuo), il modo naturale è **instabile** se l'autovalore ad esso associato è in modulo maggiore di 1, $|\lambda_i| > 1$ (maggiore di 0, $\lambda_i > 0$): in questo caso, il modo parte da $\alpha_i u_i$ per $t = t_0$, e diverge a ∞ per $t \mapsto +\infty$.
 - Nel caso *a tempo discreto*, per $\lambda_i < -1$ la divergenza non è monotona ma con oscillazioni; per $\lambda_i > 1$ la divergenza è monotona a $+\infty$, senza oscillazioni.
 - Nel caso *a tempo continuo*, il modo instabile diverge sempre a $+\infty$ senza oscillazioni.

3.2.2 Modi naturali complessi coniugati

Nel caso di autovalori complessi coniugati, saranno complessi e coniugati anche gli autovettori destri e sinistri ad essi associati, per cui saranno complessi e coniugati anche i modi naturali ad

essi associati. Per questo motivo verranno analizzati a coppie (complesse coniugate). Per quel che riguarda la loro struttura, relativamente ai sistemi a tempo discreto, facciamo le seguenti posizioni:

$$\lambda_i^{1/2} = a_i e^{\pm j\omega_i}, \quad \alpha_i^{1/2} = \rho_i e^{\pm j\phi_i}, \quad u_i^{1/2} = u_{i,a} \pm j u_{i,b}$$

per cui

$$\begin{aligned} & \alpha_i^1 (\lambda_i^1)^{t-t_0} u_i^1 + \alpha_i^2 (\lambda_i^2)^{t-t_0} u_i^2 \\ &= \rho_i e^{j\phi_i} a_i^{t-t_0} e^{j\omega_i(t-t_0)} (u_{i,a} + j u_{i,b}) \\ & \quad + \rho_i e^{-j\phi_i} a_i^{t-t_0} e^{-j\omega_i(t-t_0)} (u_{i,a} - j u_{i,b}) \\ &= \rho_i a_i^{t-t_0} \left[(e^{j(\omega_i(t-t_0)+\phi_i)} + e^{-j(\omega_i(t-t_0)+\phi_i)}) u_{i,a} \right. \\ & \quad \left. + j (e^{j(\omega_i(t-t_0)+\phi_i)} - e^{-j(\omega_i(t-t_0)+\phi_i)}) u_{i,b} \right] \\ &= 2\rho_i a_i^{t-t_0} \left[\cos(\omega_i(t-t_0) + \phi_i) u_{i,a} - \sin(\omega_i(t-t_0) + \phi_i) u_{i,b} \right] \end{aligned}$$

Invece, per i sistemi a tempo continuo, poniamo

$$\lambda_i^{1/2} = a_i \pm j\omega_i, \quad \alpha_i^{1/2} = \rho_i e^{\pm j\phi_i}, \quad u_i^{1/2} = u_{i,a} \pm j u_{i,b}$$

per cui

$$\begin{aligned} & \alpha_i^1 e^{\lambda_i^1(t-t_0)} u_i^1 + \alpha_i^2 e^{\lambda_i^2(t-t_0)} u_i^2 \\ &= \rho_i e^{j\phi_i} e^{(a_i+j\omega_i)(t-t_0)} (u_{i,a} + j u_{i,b}) \\ & \quad + \rho_i e^{-j\phi_i} e^{(a_i-j\omega_i)(t-t_0)} (u_{i,a} - j u_{i,b}) \\ &= \rho_i e^{a_i(t-t_0)} \left[(e^{j(\omega_i(t-t_0)+\phi_i)} + e^{-j(\omega_i(t-t_0)+\phi_i)}) u_{i,a} \right. \\ & \quad \left. + j (e^{j(\omega_i(t-t_0)+\phi_i)} - e^{-j(\omega_i(t-t_0)+\phi_i)}) u_{i,b} \right] \\ &= 2\rho_i e^{a_i(t-t_0)} \left[\cos(\omega_i(t-t_0) + \phi_i) u_{i,a} - \sin(\omega_i(t-t_0) + \phi_i) u_{i,b} \right] \end{aligned}$$

In entrambi i casi si hanno oscillazioni di *pulsazione* ω (questa ω si riferisce alla fase degli autovalori nel caso di sistemi a tempo discreto, oppure alla parte immaginaria degli autovalori nel caso di sistemi a tempo continuo).

Dunque, riguardo alla stabilità possiamo avere come segue.

- **Stabilità asintotica.** Per i sistemi a tempo discreto (continuo) i modi naturali complessi e coniugati sono *asintoticamente stabili* se il modulo degli autovalori ad essi associati è minore di 1, $|\lambda_i^{1/2}| = a_i < 1$ (la parte reale degli autovalori ad essi associati è minore di 0, $\text{Re}(\lambda_i^{1/2}) = a_i < 0$). In questo caso i modi partono dalla posizione

$$2\rho_i (\cos(\phi_i) u_{i,a} - \sin(\phi_i) u_{i,b})$$

per $t = t_0$ e restano confinati nel piano individuato dalle direzioni di $u_{i,a}$ e $u_{i,b}$ convergendo asintoticamente a zero con un movimento *pseudoperiodico* a spirale.

- **Stabilità semplice.** Per i sistemi a tempo discreto (continuo) i modi naturali complessi e coniugati sono (*semplicemente*) *stabili* se il modulo degli autovalori ad essi associati è uguale

a 1, $|\lambda_i^{1/2}| = a_i = 1$ (la parte reale degli autovalori ad essi associati è uguale a 0, $\text{Re}(\lambda_i^{1/2}) = a_i = 0$). In questo caso i modi partono da $t = t_0$ dalla stessa posizione del caso precedente, ed evolvono sul piano individuato dalle direzioni di $u_{i,a}$ e $u_{i,b}$ con un movimento *periodico* ellittico:

$$2\rho_i \left[\cos(\omega_i(t - t_0) + \phi_i)u_{i,a} - \sin(\omega_i(t - t_0) + \phi_i)u_{i,b} \right]$$

- **Instabilità.** Per i sistemi a tempo discreto (continuo) i modi naturali complessi e coniugati sono *instabili* se il modulo degli autovalori ad essi associati è maggiore di 1, $|\lambda_i^{1/2}| = a_i > 1$ (la parte reale degli autovalori ad essi associati è maggiore di 0, $\text{Re}(\lambda_i^{1/2}) = a_i > 0$). In questo caso i modi partono da $t = t_0$ dalla stessa posizione dei casi precedenti, ed evolvono sul piano individuato dalle direzioni di $u_{i,a}$ e $u_{i,b}$ divergendo con un movimento pseudoperiodico.

3.2.3 Il caso di autovalori multipli

Nel caso di autovalori λ_i con molteplicità algebrica $m_i > 1$, si dimostra che ad essi possono essere associati modi naturali con leggi orarie del tipo

- a tempo discreto: $t^{k-1}\lambda_i^t$, $k \leq m_i$
- a tempo continuo: $t^{k-1}e^{\lambda_i t}$, $k \leq m_i$

Da cui segue che, nel caso di autovalori multipli, la stabilità (semplice) non è garantita dall'aver $|\lambda_i| = 1$ nel caso a tempo discreto, o $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ nel caso a tempo continuo; al contrario, la presenza dei modi di cui sopra con $k > 1$ porta *instabilità*.

3.2.4 Alcuni commenti

Commento. Nel caso in cui tutti i modi naturali siano asintoticamente stabili, l'evoluzione libera convergerà a zero esponenzialmente.

Commento. Nel caso di un sistema discretizzato, dalla decomposizione spettrale segue che gli autovalori coincidono con l'esponenziale degli autovalori del sistema a tempo continuo di partenza:

$$\sigma_{\text{tempo continuo}} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \implies \sigma_{\text{discretizzato}} = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\}$$

Da cui segue che, se il sistema a tempo continuo di partenza è stabile/stabile asintoticamente/instabile, altrettanto sarà il sistema discretizzato.

3.2.5 Modi naturali nel circuito RLC in serie

Consideriamo il circuito RLC in serie, la cui matrice dinamica è stata vista essere:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}$$

Da cui il polinomio caratteristico è:

$$d(\lambda) = \lambda \left(\lambda + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{LC} = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}$$

e gli autovalori sono

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

Dunque, a seconda dei valori di resistenza, capacità e induttanza possiamo avere diverse situazioni:

- $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. In questo caso la resistenza è sufficientemente grande da impedire l'innesco di oscillazioni. Infatti, la disuguaglianza garantisce che i due autovalori siano reali ed entrambi negativi. I modi naturali sono entrambi aperiodici e asintoticamente stabili;
- $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. In questo caso abbiamo due autovalori reali e coincidenti, entrambi negativi. I modi naturali sono entrambi aperiodici e asintoticamente stabili, con uno dei due che ha una legge oraria del tipo $te^{\lambda t}$;
- $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. In questo caso la resistenza non è sufficientemente grande da impedire l'innesco di oscillazioni. I due autovalori sono complessi coniugati, con parte reale negativa. Si ottiene un modo naturale pseudoperiodico asintoticamente stabile, con pulsazione

$$\omega = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$$

3.2.6 Eccitabilità dallo stato iniziale.

Il modo i -esimo è *eccitato dallo stato iniziale* $x(t_0)$ se è presente nell'evoluzione libera a partire da $x(t_0)$, ossia se

$$\alpha_i = v_i^T x(t_0) \neq 0$$

3.2.7 Eccitabilità per impulsi in ingresso

Consideriamo un ingresso impulsivo del tipo

$$u(t) = \delta(t - \bar{t})e_j$$

Questa notazione va bene sia per sistemi a tempo discreto che a tempo continuo. Se ora consideriamo la risposta forzata all'impulso per sistemi a tempo discreto, abbiamo, per la dinamica dello stato

$$x_{\text{for}} = \sum_{\tau=t_0}^t A^{t-\tau-1} B \delta(t - \bar{t})e_j = A^{t-\bar{t}-1} B_j$$

da cui, sfruttando la decomposizione spettrale e i modi naturali:

$$x_{\text{for}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t-\bar{t}-1} u_i v_i^T B_j$$

Analogamente, se avessimo considerato un sistema a tempo continuo, avremmo avuto, per un impulso in ingresso

$$x_{\text{for}} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-\bar{t})} u_i v_i^T B_j$$

In entrambi i casi, il modo naturale associato all'autovalore i -esimo è presente per impulsi in ingresso se $v_i^T B_j \neq 0$ per almeno un canale in ingresso, ossia

$$v_i^T B \neq 0$$

3.2.8 Osservabilità in uscita

Consideriamo l'evoluzione libera in uscita per sistemi a tempo discreti. Sfruttando la decomposizione spettrale e i modi naturali

$$y_{\text{lib}}(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t-t_0} C u_i v_i^T x(t_0)$$

Dunque, un modo naturale è osservabile in uscita se

$$C u_i \neq 0$$

Analogamente, la relazione esce fuori considerando i sistemi a tempo continuo.

4 Sistemi lineari stazionari a tempo continuo: approccio in frequenza

4.1 Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è lo strumento utilizzato per l'analisi dei sistemi lineari e stazionari a tempo continuo nel dominio delle frequenze. Essa è una trasformazione integrale che associa ad una funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ la seguente funzione complessa ad argomento complesso $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^n$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Esistono condizioni sufficienti affinché una data funzione ammetta trasformata di Laplace, ossia affinché esista un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ non vuoto all'interno del quale l'integrale di Laplace esista. Senza entrare nei dettagli tecnici, una delle condizioni sufficienti affinché la funzione $f(t)$ ammetta trasformata di Laplace è che sia di *ordine esponenziale*, ossia

$$\exists M > 0, \exists \gamma \in \mathbb{R} : \|f(t)\| \leq M e^{\gamma t}$$

In questi casi la trasformata di Laplace esiste $\forall s \in \mathbb{C}$ tale che $\text{Re}[s] > \gamma$. Sono chiaramente funzioni di ordine esponenziale le funzioni costanti, i polinomi, le esponenziali, le armoniche e i prodotti di tali funzioni.

La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà:

- *linearità:*

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

- *traslazione nel tempo:*

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s), \quad \tau \geq 0, \quad f(t) = 0, \text{ per } t < 0;$$

- *traslazione in frequenza:*

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a), \quad a \in \mathbb{R};$$

- *derivata:*

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^+);$$

- *integrale:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s};$$

- *convoluzione:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau\right] = F(s)G(s);$$

- *limiti notevoli (nel caso in cui i limiti sotto indicati esistano):*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

4.2 Trasformate di segnali

Di seguito sono riportate le trasformate dei segnali di ingresso maggiormente utilizzati:

- *impulso matematico:*

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1;$$

- *gradino:*

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s};$$

- *rampa lineare:*

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2};$$

- *ingresso canonico di ordine k:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{s^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N};$$

- *esponenziale:*

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a}, \quad a \in \mathbb{R};$$

- *seno*:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

- *coseno*:

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

- *ingresso canonico di ordine k modulato da un'esponenziale*:

$$\mathcal{L}\left[e^{at} \frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{(s-a)^{k+1}}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N};$$

- *seno modulato da un'esponenziale*:

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}, \quad a, \omega \in \mathbb{R};$$

- *coseno modulato da un'esponenziale*:

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos(\omega t)] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}, \quad a, \omega \in \mathbb{R}.$$

4.3 Risposta in frequenza di un sistema lineare stazionario a tempo continuo

Utilizzando le proprietà della trasformata di Laplace, è facile verificare che, nel dominio complesso, le equazioni implicite del sistema diventano le seguenti equazioni algebriche:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI_n - A)^{-1}x(t_0) + (sI_n - A)^{-1}BU(s), \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s), \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} X_{\text{lib}}(s) &= (sI_n - A)^{-1}x(t_0), & X_{\text{for}}(s) &= (sI_n - A)^{-1}BU(s), \\ Y_{\text{lib}}(s) &= C(sI_n - A)^{-1}x(t_0), & Y_{\text{for}}(s) &= C(sI_n - A)^{-1}BU(s) + DU(s), \end{aligned}$$

e la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento risulta, dunque:

$$W(s) = \mathcal{L}[W(t)] = C(sI_n - A)^{-1}B + D.$$

Da quanto scritto segue che la trasformata di Laplace dell'esponenziale di matrice è:

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI_n - A)^{-1}$$

ossia una funzione del tipo

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{K_{n-1}s^{n-1} + \dots + K_1s + K_0}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)}, \quad K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

con i **poli** dati dagli autovalori λ_i , ognuno contato con la sua molteplicità. Nel caso di tutti autovalori distinti, tale funzione può scriversi decomposta in *fratti semplici*

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{R_n}{s - \lambda_n}, \quad R_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

con i coefficienti matriciali R_i (nel caso di autovalori complessi coniugati, anch'essi diventano complessi coniugati) che prendono il nome di **residui** che si calcolano come

$$R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i)(sI_n - A)^{-1}$$

Nel caso di *fratti multipli* del tipo

$$(sI_n - A)^{-1} = \dots + \frac{R_i^1}{(s - \lambda_i)} + \frac{R_i^2}{(s - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{R_i^{n_i}}{(s - \lambda_i)^{n_i}} + \dots$$

i residui R_i^j si calcolano come

$$R_i^{n_i} = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i)^{n_i} (sI_n - A)^{-1}, \quad R_i^{n_i-1} = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d}{ds} [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI_n - A)^{-1}]$$

fino a

$$R_i^1 = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{(n_i - 1)!} \frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}} [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI_n - A)^{-1}]$$

Tenendo conto che $(sI_n - A)^{-1}$ è la trasformata di Laplace dell'esponenziale di matrice, nel caso di autovalori distinti, antitraformando lo sviluppo in fratti semplici avremo

$$x_{\text{lib}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_{\text{lib}}(s)] = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} R_i x(t_0)$$

da cui segue che

$$R_i = u_i v_i^T$$

Andando a considerare la trasformata di Laplace della risposta forzata dell'uscita, sfruttando la trasformata di Laplace di un prodotto di convoluzione:

$$\begin{aligned} Y_{\text{for}}(s) &= \mathcal{L}[y_{\text{for}}(t)] = \mathcal{L}\left[\int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)\right] \\ &= (C(sI_n - A)^{-1} B + D) U(s) = W(s) U(s) \end{aligned}$$

Osserviamo che:

- considerando come input in ingresso quelli descritti nel paragrafo precedente, la risposta forzata di un sistema, nel dominio di Laplace, è un rapporto proprio di polinomi (ossia il grado del numeratore minore o uguale al grado del denominatore). L'uguaglianza si ottiene solo per un ingresso impulsivo (che restituisce la funzione di trasferimento) e solo se nel sistema c'è la matrice del legame diretto D diversa da 0;

- considerando autovalori tutti distinti, dalla decomposizione in fratti semplici dell'esponenziale di matrice nel dominio di Laplace, la funzione di trasferimento si scrive come:

$$W(s) = \sum_{i=1}^n \frac{CR_i B}{s - \lambda_i} + D = \sum_{i=1}^n \frac{C u_i v_i^T B}{s - \lambda_i} + D$$

da cui segue che un modo naturale è presente come polo nella funzione di trasferimento solo se è *osservabile in uscita* ed *eccitabile per impulsi in ingresso*. Altrimenti si dice che c'è stata una *cancellazione polo/zero*. In questi casi, non si riesce ad eccitare tale modo con alcun ingresso, oppure non si riesce a vederlo in uscita, ma, comunque, è presente nell'evoluzione dello stato e andrebbe tenuto in conto, specie se instabile;

- Una volta calcolata la risposta (forzata o libera, dello stato o dell'uscita) nel dominio di Laplace, è necessario *antitrasformare* per tornare nel dominio del tempo. Tutte le risposte saranno (limitatamente ai segnali precedentemente trattati) rapporti di polinomi, con il grado del denominatore maggiore o uguale al grado del numeratore (l'uguaglianza si ha solo per la risposta forzata in uscita, e solo se la matrice del legame diretto $D \neq 0$ e se la funzione in ingresso è l'impulso di Dirac).

4.3.1 Esempio

Sia dato il seguente sistema lineare, a tempo continuo, stazionario:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad x(t) \in \mathbb{R}^3, \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ -1].$$

- i) Calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$, l'evoluzione libera dell'uscita è pari a

$$y_d(t) = \frac{1}{5} t e^{-2t}$$

- ii) calcolare la risposta forzata del sistema per un ingresso a gradino;
 iii) calcolare la risposta forzata del sistema per l'ingresso $u(t) = t^2$.

Svolgimento. i) Dal calcolo dell'evoluzione libera dell'uscita:

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{lib}}(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) = [1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 1 & 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} x(0) \\
 &= \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+4)} [1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} (s+2)^2 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ -(s+1) & -(s+1) & (s+1)^2 \end{bmatrix} x(0) \\
 &= \frac{[(s+2)^2 + s+1 \quad s+1 \quad -(s+1)^2]x(0)}{(s+1)(s+2)^2} \\
 &= \frac{(x_1(0) - x_3(0))s^2 + (5x_1(0) + x_2(0) - 2x_3(0))s + 5x_1(0) + x_2(0) - x_3(0)}{(s+1)(s+2)^2}
 \end{aligned}$$

Ponendo a confronto questa espressione con la trasformata di Laplace dell'uscita desiderata:

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{5} t e^{-2t} \right] = \frac{1}{5} \frac{1}{(s+2)^2},$$

e applicando il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} x_1(0) - x_3(0) = 0, \\ 5x_1(0) + x_2(0) - 2x_3(0) = \frac{1}{5}, \\ 5x_1(0) + x_2(0) - x_3(0) = \frac{1}{5}, \end{cases} \implies \begin{cases} x_3(0) = 0, \\ x_1(0) = x_3(0) = 0, \\ x_2(0) = \frac{1}{5}, \end{cases}$$

si ottiene che solo in corrispondenza di

$$x(0) = \frac{1}{5} (0 \ 1 \ 0)^T$$

l'evoluzione libera dell'uscita soddisfa la specifica al punto i) dell'esercizio.

ii) Dal calcolo della funzione di trasferimento $W(s)$:

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \begin{bmatrix} * & * & -(s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{s+1}{(s+2)^2}$$

Il calcolo della risposta forzata al gradino passa attraverso la decomposizione in fratti multipli:

$$Y_{\text{for}}(s) = -\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2^1}{s+2} + \frac{R_2^2}{(s+2)^2},$$

con

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s+1}{(s+2)^2} = -\frac{1}{4}, \\
 R_2^2 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow -2} -\frac{s+1}{s} = -\frac{1}{2}, \\
 R_2^1 &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 Y_{\text{for}}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[-\frac{s+1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Per cui:

$$y_{\text{for}}(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}.$$

iii) La risposta forzata per l'ingresso $u(t) = t^2$, nel dominio complesso, vale:

$$Y_{\text{for}}(s) = -\frac{s+1}{(s+2)^2} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{R_1^1}{s+2} + \frac{R_1^2}{(s+2)^2} + \frac{R_2^1}{s} + \frac{R_2^2}{s^2} + \frac{R_2^3}{s^3},$$

con

$$\begin{aligned} R_1^2 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow -2} -\frac{2(s+1)}{s^3} = -\frac{1}{4}, \\ R_1^1 &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 Y_{\text{for}}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[-\frac{2(s+1)}{s^3} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} -\frac{2(s-3(s+1))}{s^4} = -\frac{1}{8}, \\ R_2^3 &= \lim_{s \rightarrow 0} s^3 Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{2(s+1)}{(s+2)^2} = -\frac{1}{2}, \\ R_2^2 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^3 Y_{\text{for}}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[-\frac{2(s+1)}{(s+2)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{2(s+2-2(s+1))}{(s+2)^3} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{(s+2)^3} = 0, \\ R_2^1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[s^3 Y_{\text{for}}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{s}{(s+2)^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2-3s}{(s+2)^4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Antitrasformando, si ottiene la seguente risposta forzata al segnale in ingresso:

$$y_{\text{for}}(t) = -\frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}.$$

4.4 Transitorio e regime

Una decomposizione delle evoluzioni, alternativa a quella descritta dalle risposte in evoluzione libera e forzata, può avere luogo se esiste la **risposta a regime permanente**. Facendo riferimento all'uscita, essa esiste ed è definita come:

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y(t)$$

quando tale limite esiste ed è unico, per ogni stato iniziale x_0 . Dalla decomposizione spettrale segue che condizione sufficiente per l'esistenza della risposta a regime è che il sistema sia asintoticamente stabile. Tale condizione non è necessaria, in quanto, per garantire la sua esistenza, basta che l'evoluzione libera dell'uscita converga a zero per ogni stato iniziale, ossia è necessario che i modi non asintoticamente stabili non siano osservabili in uscita.

Sotto queste ipotesi, la risposta del sistema può decomporre nella sua risposta a regime $y_{\text{reg}}(t)$ e nel suo **transitorio**, definito come differenza:

$$y_{\text{tra}}(t) = y(t) - y_{\text{reg}}(t)$$

Analogamente può decomporre l'evoluzione dello stato nella sue componenti di regime e di transitorio. In questo caso l'asintotica stabilità è una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del regime permanente per l'evoluzione dello stato.

Si noti come, nel caso in cui esiste la risposta a regime permanente, vale il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - y_{\text{reg}}(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_{\text{for}}(t) - y_{\text{reg}}(t)\| = 0$$

ossia, la risposta a regime permanente può approssimarsi con la risposta forzata del sistema, supponendosi esaurito il transitorio.

Di seguito vediamo alcune risposte a regime particolarmente importanti. Senza perdita di generalità, andremo a valutare sistemi con ingressi e uscite scalari, per semplicità. L'ipotesi di fondo è che esista la risposta a regime permanente. Per semplicità di scrittura, supporremo $D = 0$.

4.4.1 Risposta a regime all'impulso

Considereremo un impulso centrato in t_0 , per cui supporremo che anche l'impulso sia applicato in un tempo infinitamente antecedente:

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t - \tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} W(t - t_0) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} W(\theta)$$

Andando a esplicitare la decomposizione spettrale dell'esponenziale di matrice:

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i \theta} C u_i v_i^T B = 0$$

per cui tutti gli n modi della risposta a regime andranno a zero asintoticamente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{reg}}(t) = 0$$

poiché sappiamo che il sistema è stabile asintoticamente (e, quindi, gli autovalori sono a parte reale negativa per garantire l'esistenza della risposta al regime). Dunque, la risposta a regime permanente al gradino è 0. Questo risultato è supportato dall'analogo calcolo nel dominio di Laplace. Infatti, poiché il limite per $t_0 \mapsto -\infty$ tende a un valore finito, la risposta a regime permanente può calcolarsi, in questo caso come limite per $t \mapsto +\infty$ della risposta forzata. Per cui ricordando che la trasformata di Laplace dell'impulso è 1, e che esiste l'uguaglianza (qualora esistano i limiti):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

avremo:

$$Y_{\text{for}}(s) = W(s) \cdot \mathcal{L}[\delta(t)] = W(s)$$

e, quindi:

$$y_{\text{reg}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{for}}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) = 0$$

4.4.2 Risposta a regime al gradino

Considereremo un gradino che ha inizio in t_0 , per cui supporremo che anche l'inizio dell'applicazione del gradino vada a $-\infty$. Per cui:

$$\begin{aligned} y_{\text{reg}}(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t - \tau) \delta_{-1}(\tau - t_0) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} W(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Andando a esplicitare la decomposizione spettrale dell'esponenziale di matrice avremo:

$$y_{\text{reg}}(t) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} d\theta \right) C u_i v_i^T B = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\lambda_i} C u_i v_i^T B$$

poiché sappiamo che il sistema è stabile asintoticamente. Dunque, la risposta a regime permanente al gradino è una costante.

Anche in questo caso, poiché la risposta a regime è costante, questo risultato è supportato dall'analogo calcolo nel dominio di Laplace. Infatti, ricordando che la trasformata di Laplace del gradino è $1/s$, avremo:

$$Y_{\text{for}}(s) = W(s) \cdot \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{W(s)}{s}$$

e, quindi:

$$y_{\text{reg}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{for}}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = W(s=0) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\lambda_i} C u_i v_i^T B$$

4.4.3 Risposta a regime a una rampa lineare

La rampa lineare è $u(t) = t$, per cui

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) \tau d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta)(t-\theta) d\theta$$

Andando a esplicitare la decomposizione spettrale dell'esponenziale di matrice:

$$y_{\text{reg}}(t) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} (t-\theta) d\theta \right) C u_i v_i^T B$$

Risolviamo l'integrale per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} (t-\theta) d\theta &= \frac{1}{\lambda_i} e^{\lambda_i \theta} (t-\theta) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} e^{\lambda_i \theta} d\theta \\ &= -\frac{t}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i^2} e^{\lambda_i \theta} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{t}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i^2} \end{aligned}$$

I limiti si semplificano per $t \mapsto +\infty$ grazie alla stailità asintotica dei modi naturali. Dunque, la risposta a regime permanente di una rampa lineare è una rampa, dunque un segnale che varia nel tempo.

4.4.4 Risposta a regime a un'esponenziale

Consideriamo un segnale esponenziale del tipo $u(t) = e^{at}$:

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) e^{a\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) e^{a(t-\theta)} d\theta = e^{at} \mathcal{L}[W(t)] \Big|_{s=a}$$

Dunque, se l'argomento dell'esponenziale è un numero reale, avremo che la risposta a regime è un'esponenziale che cresce/decrece con la stessa costante a , moltiplicata per la funzione di trasferimento trasformata con Laplace e calcolata in $s = a$. Ma la stessa formula vale anche per eventuali esponenziali complesse, come vedremo nella sottosezione seguente.

4.4.5 Risposta armonica

La risposta armonica consiste nella risposta a regime permanente per un segnale di ingresso armonico, ossia un seno o un coseno di pulsazione ω . Nel caso del coseno, possiamo sfruttare la scomposizione con esponenziali complesse:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

così che si possa applicare la risposta a regime permanente per ingressi esponenziali:

$$\begin{aligned} y_{\text{arm}}(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) \cos(\omega(t-\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{e^{j\omega(t-\theta)}}{2} d\theta + \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{e^{-j\omega(t-\theta)}}{2} d\theta = \frac{e^{j\omega t} W(j\omega)}{2} + \frac{e^{-j\omega t} W(-j\omega)}{2} \\ &= \frac{e^{j\omega t} |W(j\omega)| e^{j\angle W(j\omega)}}{2} + \frac{e^{-j\omega t} |W(j\omega)| e^{-j\angle W(j\omega)}}{2} = |W(j\omega)| \cos(\omega t + \angle W(j\omega)) \end{aligned}$$

E, analogamente, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(\omega t)$ sarà:

$$|W(j\omega)| \sin(\omega t + \angle W(j\omega))$$

Dunque, esaurito il transitorio, un sistema lineare eccitato da un armonica di pulsazione ω avrà, a regime, un armonica della stessa pulsazione, amplificata (o attenuata) del fattore $|W(j\omega)|$ e sfasata dell'angolo $\angle W(j\omega)$. La prossima sezione descrive un metodo per rappresentare in modo efficace e veloce la risposta armonica al variare della pulsazione.

4.5 Diagrammi di Bode

Si consideri un sistema lineare stazionario a tempo continuo, il cui legame ingresso/uscita sia descritto dalla funzione di trasferimento $W(s)$, che consiste in un rapporto di polinomi nella variabile complessa s ; in assenza di un legame diretto ingresso/uscita ($D = 0$), $W(s)$ è un rapporto strettamente proprio di polinomi. Porre in *forma canonica* la funzione di trasferimento equivale a scriverla, in modo univoco, come rapporto delle potenze dei seguenti fattori:

- i) *guadagno di Bode*: K . È la costante moltiplicativa risultante dalla scomposizione nei fattori canonici sopra descritti della funzione di trasferimento;
- ii) *termini monomi*: s . Corrispondono a zeri/poli nell'origine;
- iii) *termini binomi*: $1 \pm \tau s$, $\tau \in \mathbb{R}^+$. Corrispondono a zeri/poli reali; $\omega_t = \frac{1}{\tau}$ è detta *pulsazione di taglio* del termine binomio;
- iv) *termini trinomi*:

$$1 \pm \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad 0 \leq \zeta < 1, \quad \omega_n > 0$$

Corrispondono a coppie di zeri/poli complessi coniugati; ζ e ω_n sono, rispettivamente, lo *smorzamento* e la *pulsazione naturale* del termine trinomio.

I diagrammi di Bode sono le rappresentazioni in scala logaritmica del modulo (espresso linearmente in decibel) e in scala semilogaritmica della fase della funzione di trasferimento calcolata in $s = j\omega$, al variare della pulsazione $\omega \in (0, +\infty)$ (espressa in scala logaritmica). In virtù delle proprietà dei logaritmi e delle fasi, entrambi i diagrammi di Bode possono rappresentarsi come somma algebrica dei contributi dei singoli diagrammi dei fattori canonici sopra descritti: i contributi dei termini al numeratore si sommano, quelli dei termini al denominatore si sottraggono ed eventuali potenze di ordine 2, 3 o p , raddoppiano, triplicano o moltiplicano per un fattore p i contributi del termine. Di seguito sono descritte l'analisi e la rappresentazione dei diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi dei singoli fattori canonici. Sulle ascisse di entrambi sono riportate le pulsazioni in scala logaritmica; le ordinate dei primi sono espresse in decibel (si ricordi che $|M|_{\text{dB}} = 20 \log |M|$), le ordinate dei secondi in radianti. Si fa riferimento al termine *decade* per indicare il generico intervallo di ampiezza unitaria in scala logaritmica, ossia l'intervallo $[\omega_1, \omega_2]$ costituisce una decade se $\omega_2 = 10\omega_1$.

4.5.1 Guadagno di Bode K

In assenza di termini monomi il guadagno di Bode costituisce il guadagno alle basse frequenze, e si calcola come:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s).$$

Se c'è la potenza di un termine monomio al denominatore (sia s^p , $p > 0$), si ha un'amplificazione infinita alle basse frequenze, e il guadagno di Bode si calcola come:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^p W(s).$$

Se la potenza di un termine monomio è presente al numeratore, alle basse frequenze la risposta del sistema è nulla ($-\infty$ in dB), e il guadagno di Bode vale:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(s)}{s^p}.$$

Il guadagno di Bode produce nelle ampiezze un'amplificazione uniforme al variare della pulsazione ω , che si riflette sul diagramma dei moduli con una traslazione del grafico di una quantità pari a $20 \log |K|$. Per questo motivo la retta a $|K|_{\text{dB}}$ è utilizzata come riferimento per le ordinate nei diagrammi di Bode delle ampiezze, vedi Figura 4.5.1.1. Si noti che tale riferimento coincide con la retta coordinata delle ascisse per un'amplificazione unitaria: $K = 1$.

Per quel che riguarda la fase, il guadagno di Bode non dà alcun contributo se K è positivo: $\angle K = 0$; nel caso in cui K è negativo, sfasa uniformemente il diagramma di π radianti: $\angle K = \pi$. In questo caso, dunque, sono il segno del guadagno di Bode (e, vedremo, anche i termini monomi) a determinare il riferimento per le ordinate nei diagrammi di Bode delle fasi, vedi Figura 4.5.1.2. Tale riferimento coincide con la retta coordinata delle ascisse con un guadagno di Bode positivo.

4.5.2 Termine monomio

Il diagramma di Bode delle ampiezze è una retta con pendenza 20dB/dec, che taglia i 0dB in corrispondenza della pulsazione di 1 rad/sec; la fase è, invece, costante al variare di $\log(\omega)$ e vale $\pi/2$ radianti, vedi Figura 4.5.2.1:

$$|j\omega|_{\text{dB}} = 20 \log |j\omega| = 20 \log(\omega), \quad \angle(j\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

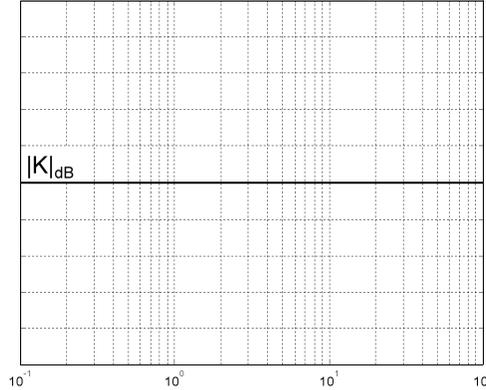


Figura 4.5.1.1 - Diagramma di Bode delle ampiezze del guadagno di Bode

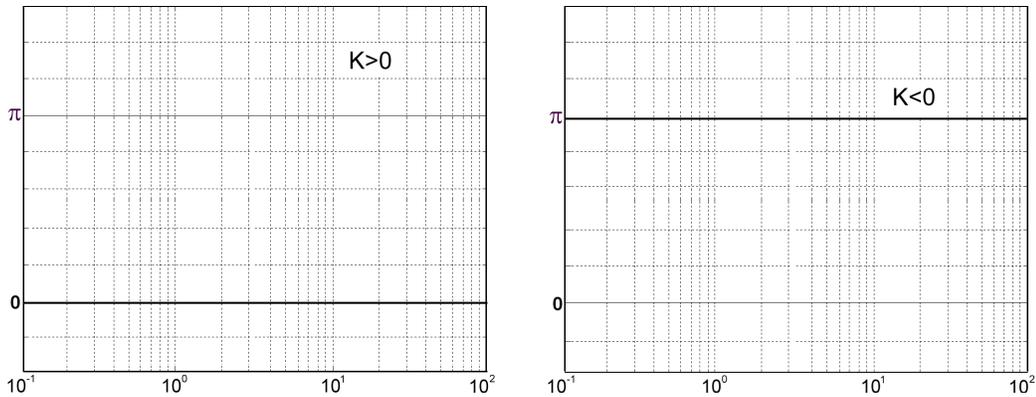


Figura 4.5.1.2 - Diagramma di Bode delle fasi del guadagno di Bode

4.5.3 Termine binomio

$$|1 \pm j\tau\omega|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \tau^2\omega^2}, \quad \angle(1 \pm j\tau\omega) = \pm \arctan(\tau\omega).$$

A differenza dei monomi, i diagrammi di Bode dei termini binomi e trinomi non hanno un andamento lineare rispetto a $\log \omega$. Per la loro rappresentazione è consigliabile svolgere l'analisi del loro comportamento asintotico, in base al quale è possibile approssimare i diagrammi con opportune spezzate lineari a tratti. Questi diagrammi, noti come *diagrammi asintotici*, sono lo strumento per disegnare a mano con buona approssimazione i veri diagrammi di Bode. I punti di non derivabilità sono detti *punti di rottura* del diagramma asintotico. Dall'analisi alle basse frequenze, per pulsazioni inferiori a quella di taglio ($\omega \ll \omega_t$):

$$1 + \tau^2\omega^2 \simeq 1 \quad \implies \quad |1 + j\tau\omega|_{dB} \simeq 20 \log(1) = 0dB,$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta costante e pari a 0dB; alle alte frequenze, per pulsazioni superiori a quella di taglio ($\omega \gg \omega_t$):

$$1 + \tau^2\omega^2 \simeq \tau^2\omega^2 \quad \implies \quad |1 + j\tau\omega|_{dB} \simeq 20 \log |\tau\omega| = 20(\log(\omega) - \log(\omega_t)),$$

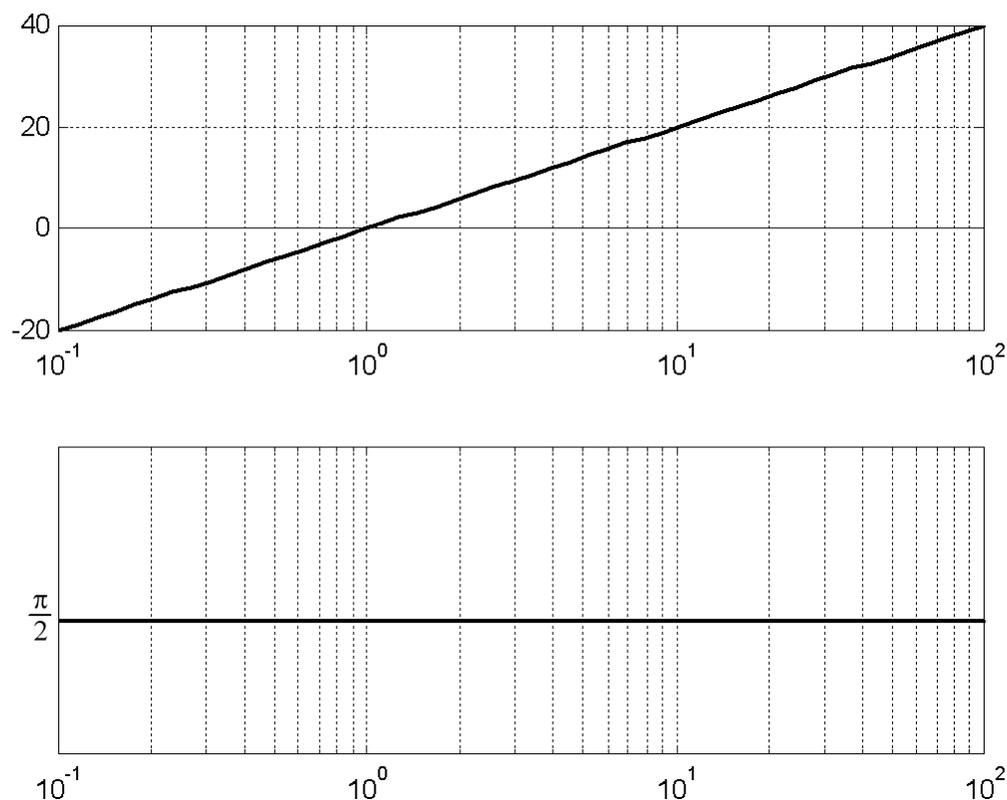


Figura 4.5.2.1 - Diagrammi di Bode di un termine monomio

il diagramma dei moduli si approssima con una retta di pendenza 20dB/dec, che taglia i 0dB in corrispondenza della pulsazione di taglio ω_t . Raccordando queste due rette nel loro punto di intersezione si disegna il diagramma asintotico, vedi Figura 4.5.3.1. Il massimo scostamento del diagramma di Bode dal diagramma asintotico si ottiene per la pulsazione di taglio ω_t , ed è pari a:

$$20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega_t^2} = 20 \log \sqrt{2} \simeq 3.01 \text{dB}.$$

Anche per quel che riguarda le fasi, si considera l'analisi asintotica del diagramma. Consideriamo il segno '+' nel termine binomio $1 + \tau s$. Alle basse frequenze ($\omega \ll \omega_t$), il termine binomio può confondersi con la sua parte reale, per cui la fase assume un andamento costante e pari a zero; alle alte frequenze ($\omega \gg \omega_t$), il termine binomio può confondersi con la sua parte immaginaria, per cui la fase assume un andamento costante e pari a $\pi/2$ radianti. In questo caso non c'è intersezione tra i due andamenti asintotici. Per ottenere un diagramma lineare a tratti che approssimi in modo esauriente il diagramma delle fasi, si sfruttano le caratteristiche di simmetria del grafico: il diagramma di Bode delle fasi in scala semilogaritmica gode di simmetria centrale rispetto al punto $(\omega_t, \pi/4)$. Una possibilità consiste nel raccordare i due andamenti asintotici con un segmento di pendenza $\pi/4$ rad/sec che passi per il centro di simmetria del diagramma. Tale segmento approssima il diagramma nell'intervallo di due decadi centrato nella pulsazione di taglio, vedi Figura 4.5.3.2.

Il massimo scostamento delle fasi dal diagramma asintotico si ha nei punti di rottura della

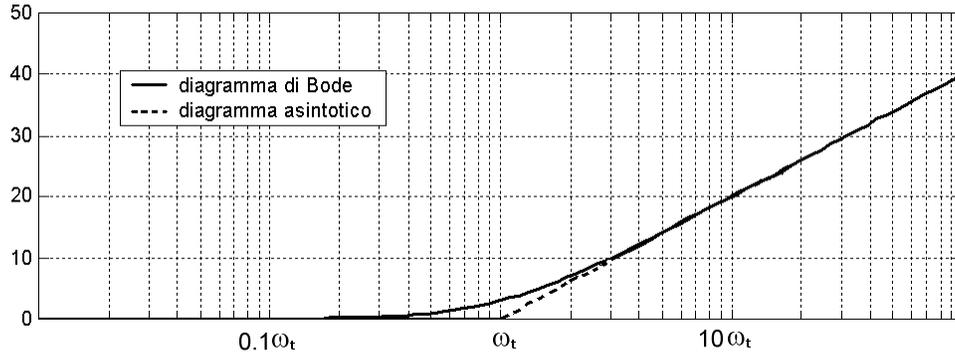


Figura 4.5.3.1 - Diagramma di Bode delle ampiezze di un termine binomio

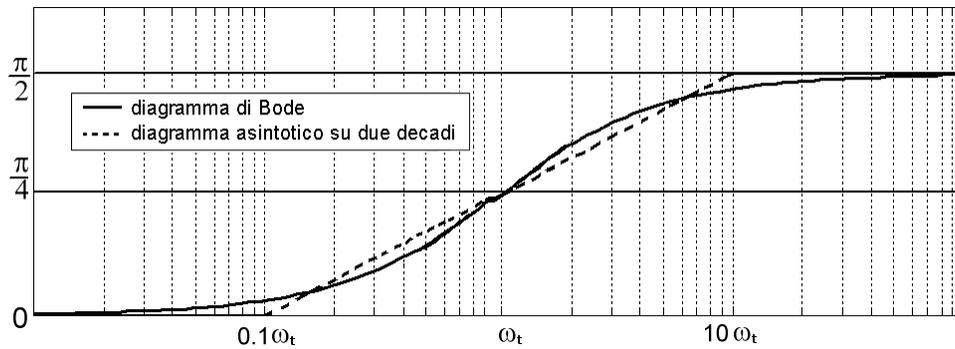


Figura 4.5.3.2 - Diagramma di Bode delle fasi del termine binomio $1 + \tau s$

spezzata ($0.1\omega_t$ e $10\omega_t$) e vale:

$$\begin{cases} \arctan(\tau \cdot 0.1\omega_t) = \arctan(0.1) \simeq 0.10 \text{ rad}, \\ \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau \cdot 10\omega_t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(10) \simeq 0.10 \text{ rad}, \end{cases}$$

ossia meno di 6 gradi (i due valori sono uguali, data la simmetria della curva).

Un diagramma asintotico alternativo consiste nel raccordare i due andamenti asintotici con la retta tangente la curva in $(\omega_t, \frac{\pi}{4})$. In questo modo migliora l'approssimazione nell'intorno della pulsazione di taglio, ma peggiora quella nei punti di rottura del diagramma asintotico.

Considerando il segno '-' nel termine binomio $1 - \tau s$, il diagramma dei moduli non cambia, mentre quello delle fasi è simmetrico rispetto all'asse delle pulsazioni. Cambia, infatti, il segno della parte immaginaria, per cui cambia il segno della fase, vedi Figura 4.5.3.3.

4.5.4 Termine trinomio

$$1 \pm \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad |\zeta| \leq 1, \quad \omega_n > 0.$$

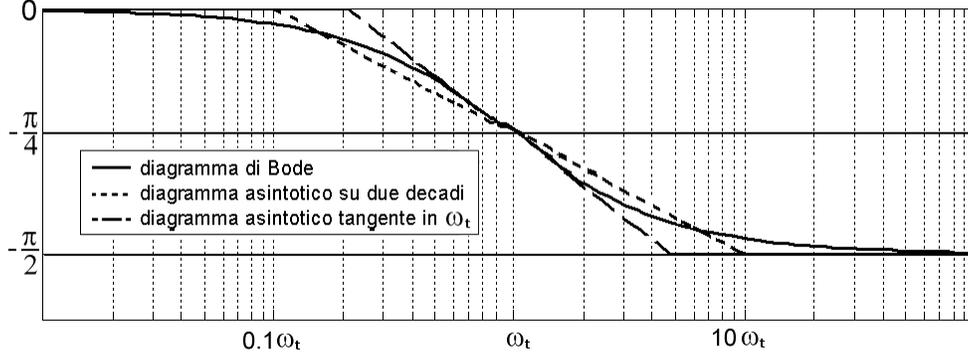


Figura 4.5.3.3 - Diagramma di Bode delle fasi di un termine binomio $1 - \tau s$

$$\left| 1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\angle \left(1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) = \pm \arctan \left(\frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

Anche per il termine trinomio è necessaria l'analisi asintotica per poter approssimare i diagrammi con opportune spezzate lineari a tratti. Alle basse frequenze, ossia per pulsazioni inferiori a quella naturale ($\omega \ll \omega_n$):

$$1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \simeq 1 \implies \left| 1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} \simeq 20 \log(1) = 0\text{dB},$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta costante e pari a 0dB; alle alte frequenze, per pulsazioni superiori a quella naturale ($\omega \gg \omega_n$):

$$1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \implies \left| 1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} \simeq 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = 40(\log \omega - \log \omega_n),$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta di pendenza 40dB/dec, che taglia i 0dB nella pulsazione naturale ω_n . Raccordando queste due rette nel loro punto di intersezione, si ottiene il diagramma asintotico. Lo scostamento, espresso in decibel, per $\omega = \omega_n$ è pari a:

$$20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega_n^2}{\omega_n^2}} = 20 \log |2\zeta|,$$

da cui si evince che:

- quando il termine trinomio si scompone nel quadrato di un binomio ($\zeta = 1$), tale scostamento vale $20 \log(2) \simeq 6.02\text{dB}$, vedi Figura 4.5.4.1;
- per valori di ζ maggiori di $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} < \zeta \leq 1$), lo scostamento è positivo e si annulla per $\zeta = 1/2$. Si noti che l'annullamento nel punto di rottura non determina l'uguaglianza tra i due diagrammi, pur rendendo il diagramma asintotico molto prossimo a quello di Bode

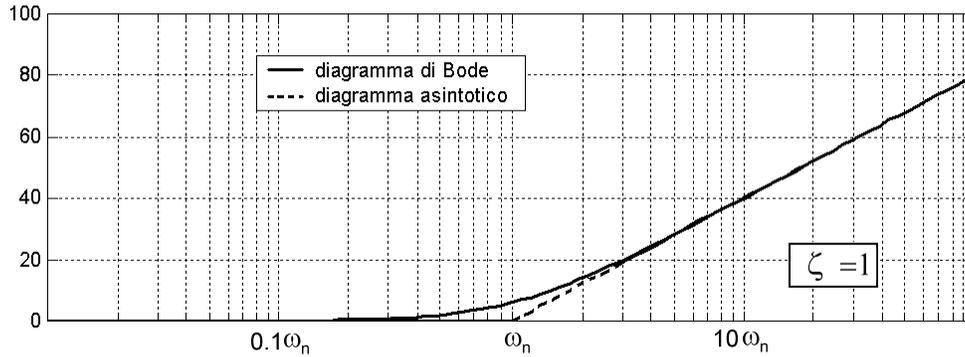


Figura 4.5.4.1 - Diagramma di Bode del modulo di un trinomio: $\zeta = 1$

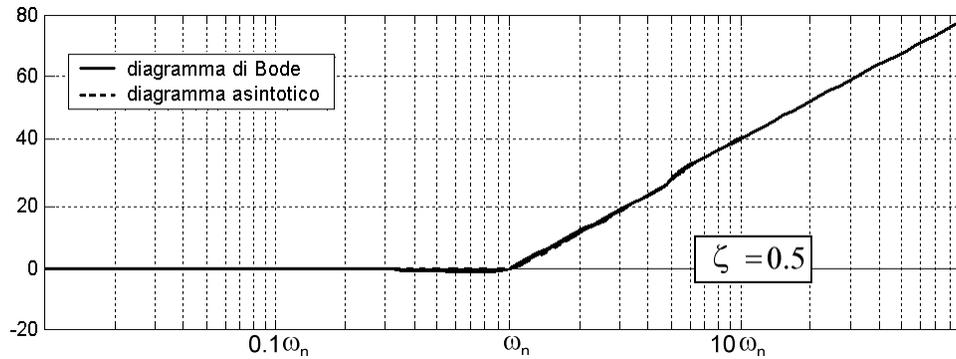


Figura 4.5.4.2 - Diagramma di Bode del modulo di un trinomio: $\zeta = 0.5$

- per valori di ζ inferiori a $1/2$ ($0 < \zeta \leq \frac{1}{2}$), il diagramma di Bode presenta un picco di risonanza in prossimità di ω_n , di cui il diagramma asintotico non tiene conto (per essere precisi si parla di *antirisonanza* se il termine trinomio è al numeratore, in quanto, in quel caso, c'è un'attenuazione delle ampiezze). Per determinare la *pulsazione di risonanza* ω_r è necessario calcolare il minimo del modulo del termine trinomio che risulta essere pari a:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad 0 \leq \zeta < \frac{1}{2},$$

cui corrisponde:

$$\left| 1 \pm \frac{2j\zeta\omega_r}{\omega_n} - \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} \right| = 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Come si può notare, la pulsazione di risonanza precede sempre quella naturale ($\omega_r \leq \omega_n$); al decrescere di ζ il picco di risonanza è sempre più accentuato e la pulsazione di risonanza tende ad avvicinarsi a quella naturale: di conseguenza, il diagramma asintotico è sempre meno adatto ad approssimare il diagramma di Bode nell'intorno di ω_n al decrescere di ζ . In Figura 4.5.4.3 è disegnato il modulo di un termine trinomio con $\zeta = 0.1$: con questo smorzamento le pulsazioni naturali e di risonanza sono sostanzialmente indistinguibili, infatti:

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2(0.1)^2} \cdot \omega_n \simeq 0.97\omega_n.$$

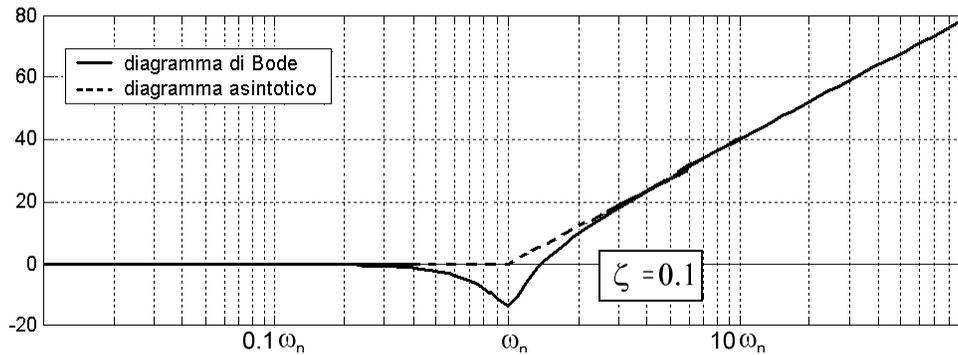


Figura 4.5.4.3 - Diagramma di Bode del modulo di un trinomio: $\zeta=0.1$

- per $\zeta = 0$, in corrispondenza della pulsazione naturale, che coincide con quella di risonanza, c'è un asintoto verticale, di cui il diagramma asintotico non tiene conto e, dunque, non è più idoneo a descrivere l'andamento delle ampiezze nell'intorno di ω_n . Se il termine trinomio è al numeratore (come si è supposto in questo contesto) l'asintoto produce attenuazione infinita, ossia il sistema ha una risposta nulla se eccitato con un'armonica di pulsazione ω_n , vedi Figura 4.5.4.4.

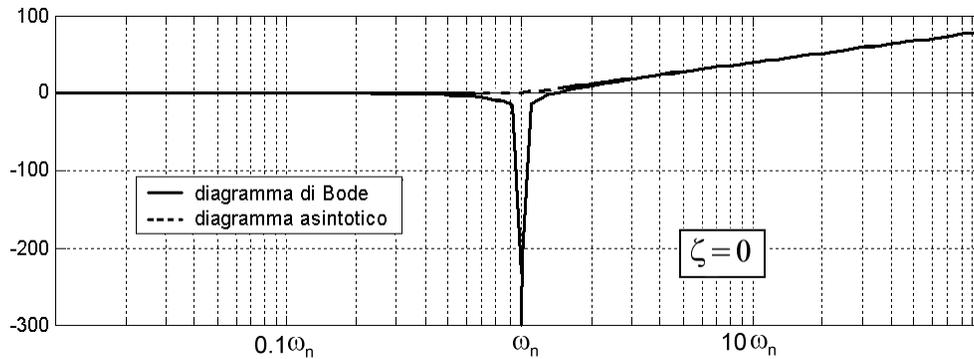


Figura 4.5.4.4 - Diagramma di Bode del modulo di un trinomio: $\zeta=0$

- Al contrario, se il termine trinomio è al denominatore, l'asintoto produce un'amplificazione infinita se eccitato con'armonica di pulsazione ω_n (il diagramma di Figura 4.5.4.4 va simmetrizzato rispetto all'asse delle pulsazioni).

Per quel che riguarda l'analisi asintotica del diagramma delle fasi, consideriamo il segno '+' davanti a ζ . Alle basse frequenze ($\omega \ll \omega_n$) il trinomio si approssima con la sua parte reale, per cui la fase ha un andamento costante e pari a zero; alle alte frequenze ($\omega \gg \omega_n$) il trinomio si confonde con $-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} < 0$, per cui la fase ha un andamento costante e pari a π radianti (si assume il segno '+' perché, per ω che passa da 0 a $+\infty$, il trinomio è un vettore del piano complesso che ruota in senso antiorario). Analogamente al termine binomio non c'è intersezione tra i due asintoti e i diagrammi asintotici si ottengono sfruttando le proprietà di simmetria del grafico: il diagramma di Bode delle fasi in scala semilogaritmica gode di simmetria centrale rispetto al punto $(\omega_n, \frac{\pi}{2})$.

Per raccordare gli andamenti asintotici, una tecnica consiste nel raccordare i due asintoti con un segmento di pendenza $\frac{\pi}{2}$ rad/dec che passi per il centro di simmetria del diagramma. Tale segmento approssima il diagramma nell'intervallo di due decadi centrato nella pulsazione naturale. Questa approssimazione è buona per valori dello smorzamento prossimi in modulo all'unità ($\zeta \simeq 1$): è tanto più efficace quanto più il termine trinomio si approssima con il quadrato di un binomio. In Figura 4.5.4.5 si riporta il diagramma delle fasi per $\zeta = 1$, mentre in Figura 4.5.4.6 si riporta il diagramma delle fasi per $\zeta = 0.5$.

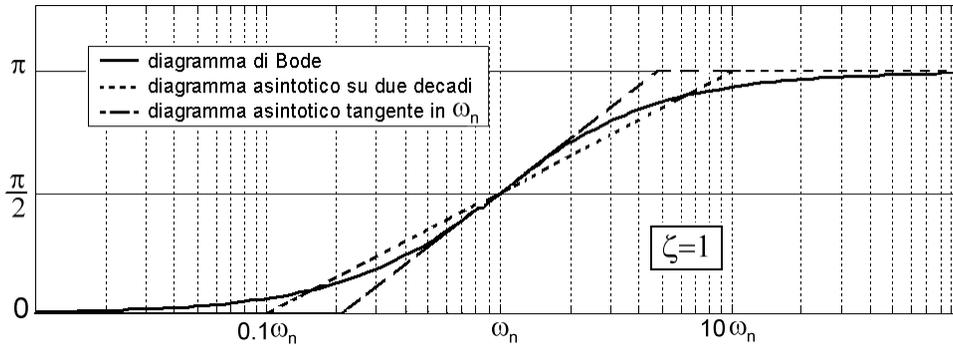


Figura 4.5.4.5 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio: $\zeta = 1$

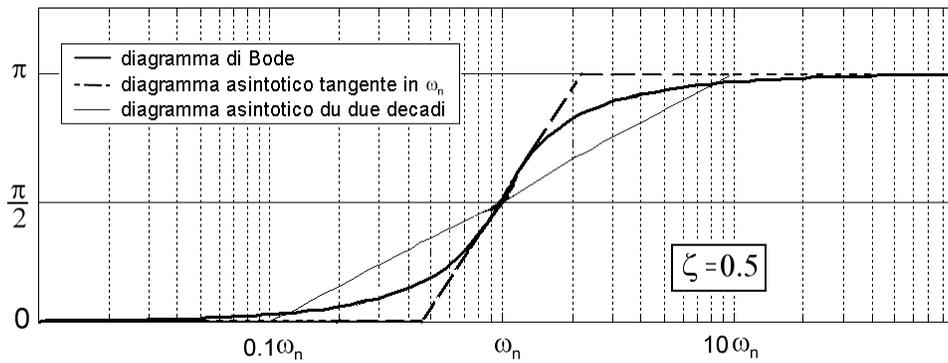


Figura 4.5.4.6 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio: $\zeta = 0.5$

Per valori dello smorzamento che tendono a zero, la parte immaginaria del termine trinomio diventa trascurabile rispetto alla sua parte reale, cosicché il raccordo tra 0 e π diventa sempre più corto e l'approssimazione con una retta di pendenza $\pi/2$ /decade diventa sempre meno attendibile, vedi Figura 4.5.4.7 dove si riporta il caso per $\zeta = 0.1$.

Infine, il diagramma delle fasi assume l'andamento a gradino per $\zeta \mapsto 0$, come si nota in Figura 4.5.4.8. In questo caso non servono approssimazioni per rappresentare il diagramma di Bode.

Analogamente al termine binomio, quando ζ è negativo il diagramma dei moduli del termine trinomio non cambia, mentre quello delle fasi è simmetrico rispetto all'asse delle pulsazioni, in quanto cambia il segno della parte immaginaria, vedi Figura 4.5.4.9.

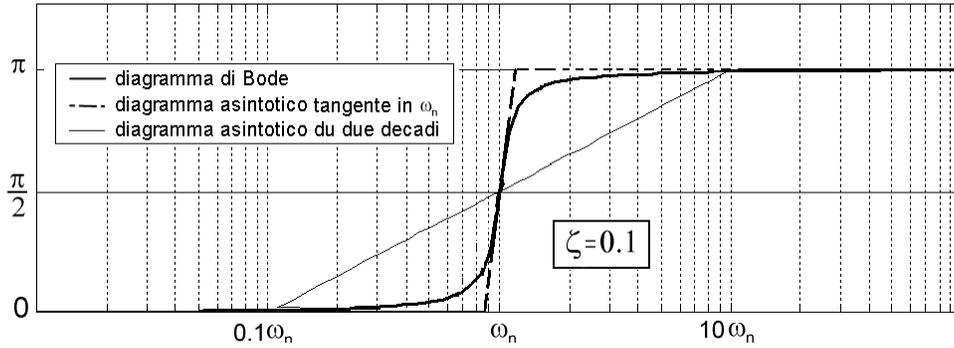


Figura 4.5.4.7 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio: $\zeta = 0.1$

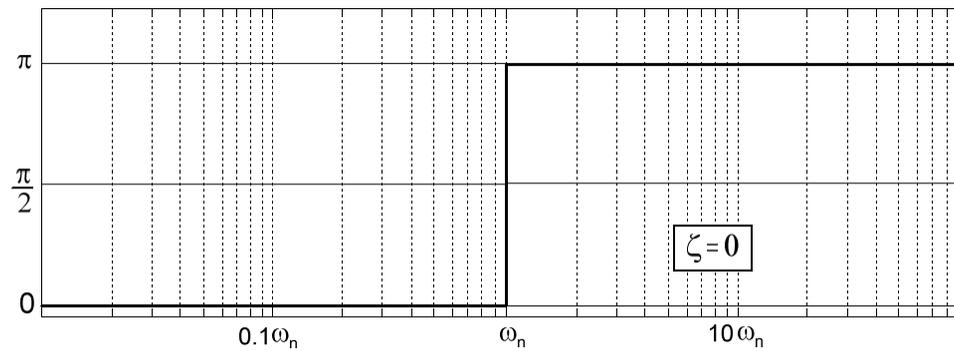


Figura 4.5.4.8 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio: $\zeta = 0$

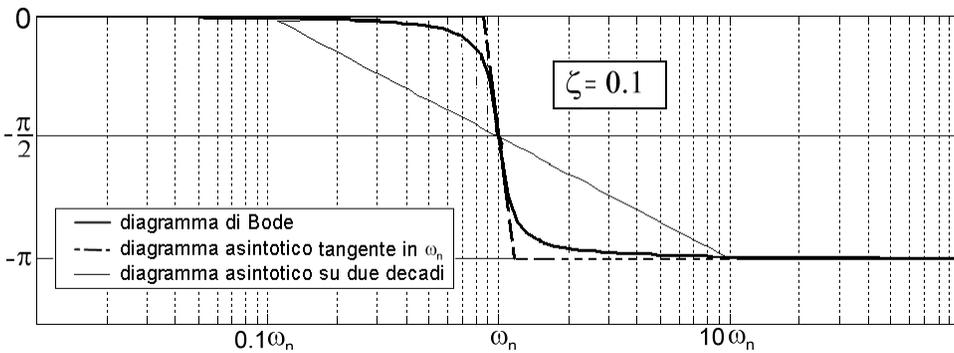


Figura 4.5.4.9 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio col segno '-' davanti a $\zeta = 0.1$

4.5.5 Esempio di diagramma di Bode con termini monomi e binomi

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{10^6}{s(s+10)^2(s-400)^2}$$

- i) Calcolare per quale pulsazione si ha un'attenuazione di 100dB;
- ii) calcolare per quali pulsazioni si ha uno sfasamento di $-\pi$ radianti.

Riscrivendo in forma canonica i termini binomi:

$$(s + 10)^2 = 100(1 + \tau_1 s)^2, \quad (s - 400)^2 = 16 \cdot 10^4(1 - \tau_2 s)^2,$$

con

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.1 \text{sec}, & \omega_{t_1} &= 10 \text{rad/sec}, \\ \tau_2 &= 2.5 \cdot 10^{-3} \text{sec}, & \omega_{t_2} &= 400 \text{rad/sec}, \end{aligned}$$

la funzione di trasferimento diventa:

$$W(s) = \frac{K}{s(1 + \tau_1 s)^2(1 - \tau_2 s)^2},$$

con il guadagno di Bode $K = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) = \frac{1}{16}$.

Descrizione dei diagrammi asintotici. Non essendoci termini trinomi, i diagrammi di Bode possono confondersi, con buona approssimazione, con quelli asintotici.

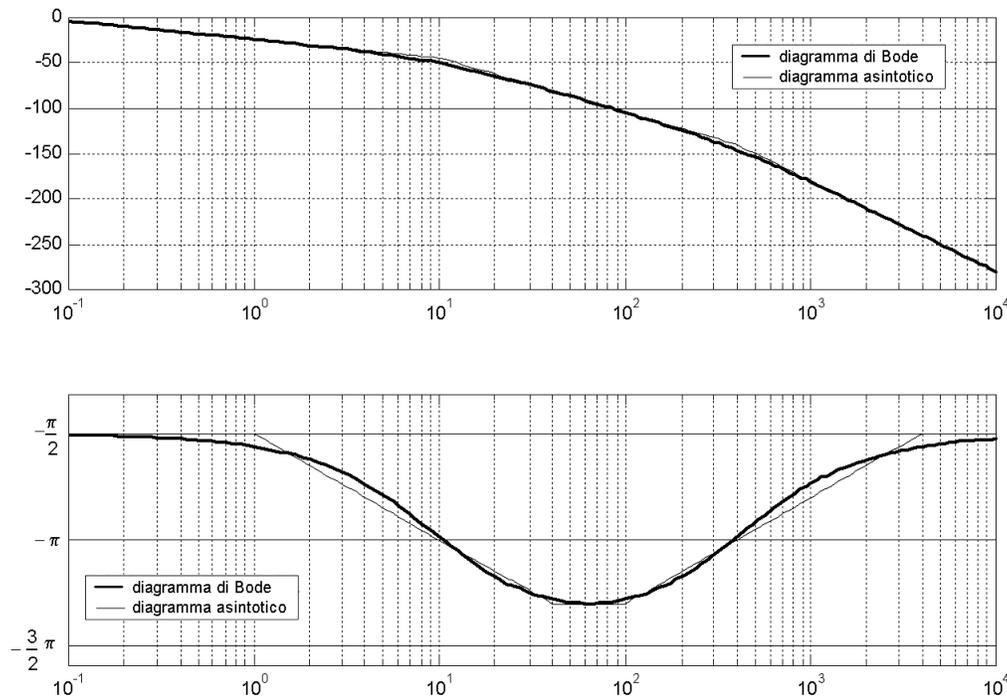


Figura 4.5.5.1 - Diagrammi di Bode

Ampiezza. La presenza del termine monomio al denominatore determina la pendenza del diagramma delle ampiezze alle basse frequenze, che si confonde con l'andamento di una retta inclinata di -20dB/dec e passante per il punto di ascissa $\omega = 1$ rad/sec e ordinata $|K|_{dB} \simeq -24.08$ dB. Tale

pendenza resta tale fino alla più piccola pulsazione di taglio: $\omega_{t_1} = 10\text{rad/sec}$. Per valori di ω maggiori di ω_{t_1} , si fa sentire il primo dei due termini binomi al denominatore, per cui la pendenza diminuisce di altri 40dB/dec, portandosi a -60dB/dec . Tale rimane fino alla maggiore delle pulsazioni di taglio, $\omega_{t_2} = 400\text{rad/sec}$, oltre la quale la pendenza diminuisce di altri 40dB/dec, portandosi a -100dB/dec . Riassumendo quanto scritto sulle pendenze del diagramma asintotico:

$$\begin{aligned} \omega < 10, & & -20\text{dB/dec}, \\ 10 \leq \omega < 400, & & -60\text{dB/dec}, \\ \omega \geq 400, & & -100\text{dB/dec}. \end{aligned}$$

Fasi. La presenza del termine monomio al denominatore trasla tutto il diagramma delle fasi di $-\frac{\pi}{2}$ radianti, valore a cui rimane costante per frequenze inferiori a 1rad/sec, una decade prima di ω_{t_1} , la minore delle pulsazioni di taglio. Quindi le fasi decrescono con una pendenza di $-\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$ fino a pulsazioni inferiori a 40rad/sec, una decade prima di ω_{t_2} , la maggiore delle pulsazioni di taglio, oltre la quale i contributi dei due termini binomi si bilanciano e le fasi si assestano a pendenza nulla nell'intervallo [40, 100]. Per pulsazioni maggiori di 100rad/sec (una decade dopo ω_{t_1}) il primo termine binomio cessa di influenzare la pendenza, per cui il diagramma sale di $\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$ fino a $\omega = 4000\text{rad/sec}$ (una decade dopo ω_{t_2}), oltre cui le fasi tornano costanti al valore di $-\frac{\pi}{2}$ radianti. Riassumendo quanto scritto sulle pendenze del diagramma asintotico:

$$\begin{aligned} \omega < 1, & & 0\text{rad/dec}, \\ 1 \leq \omega < 40, & & -(\pi/2)\text{rad/dec}, \\ 40 \leq \omega < 100, & & 0\text{rad/dec}, \\ 100 \leq \omega < 4000, & & +(\pi/2)\text{rad/dec}, \\ \omega \geq 4000, & & 0\text{rad/dec}. \end{aligned}$$

- i) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle ampiezze si nota che un'attenuazione di 100dB si ottiene per pulsazioni superiori a $\omega_{t_1} = 10\text{rad/sec}$ e inferiori a $\omega_{t_2} = 400\text{rad/sec}$, per cui sono plausibili le seguenti semplificazioni:

$$|1 + j\tau_1\omega| \simeq |j\tau_1\omega| = \tau_1\omega, \quad |1 - j\tau_2\omega| \simeq 1.$$

Analisi quantitativa: attenuazione di 100dB significa:

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = -100 \Rightarrow 20 \log |W(j\omega)| = -100 \Rightarrow |W(j\omega)| = 10^{-5},$$

da cui

$$|W(j\omega)| \simeq \frac{1}{16|j\omega| \cdot |j\tau_1\omega|^2} = 10^{-5} \implies \omega^3 = \frac{1}{16 \cdot 10^{-7}},$$

e quindi $\omega = \bar{\omega} \simeq 85.50\text{rad/sec}$. Come verifica della validità delle approssimazioni assunte, si calcolano in $\bar{\omega}$ gli errori commessi nell'approssimazione dei due termini binomi:

$$\begin{aligned} \left| (1 + j\tau_1\bar{\omega})^2 \right|_{\text{dB}} - \left| (j\tau_1\bar{\omega})^2 \right|_{\text{dB}} &\simeq 20 \log(74.10) - 20 \log(73.10) \simeq 0.12\text{dB}, \\ \left| (1 + j\tau_2\bar{\omega})^2 \right|_{\text{dB}} &\simeq 20 \log(1.05) \simeq 0.39\text{dB}, \end{aligned}$$

per cui:

$$|W(j\bar{\omega})|_{\text{dB}} \simeq -100 + 0.12 - 0.39 \simeq -100.27\text{dB},$$

ossia un errore inferiore allo 0.3%.

- ii) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle fasi si nota che vi sono due attraversamenti a $-\pi$ radianti. Anche in questo caso è possibile introdurre delle approssimazioni per semplificare i conti. Dai diagrammi in figura 2.1.18 segue che la minore delle pulsazioni a $-\pi$ radianti cade ben prima che il binomio caratterizzato dalla pulsazione di taglio $\omega_{t_2} = 400\text{rad/sec}$ possa influenzare le fasi, per cui, in prossimità della pulsazione di primo attraversamento a $-\pi$ radianti:

$$\angle(1 - j\tau_2\omega)^2 \simeq 0,$$

da cui

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &\simeq -\frac{\pi}{2} - 2\angle(1 + j\tau_1\omega) = -\pi \implies \angle(1 + j\tau_1\omega) = \frac{\pi}{4} \\ \implies \tau_1\omega &= 1 \implies \omega = \omega_1^* \simeq \omega_{t_1} = 10\text{rad/sec}. \end{aligned}$$

Viceversa, la maggiore delle pulsazioni di attraversamento a $-\pi$ radianti si incontra per pulsazioni maggiori di una decade di ω_{t_1} , per cui il termine binomio ad essa associato può immaginarsi stabilizzato a π radianti:

$$\angle(1 + j\tau_1\omega)^2 \simeq \pi,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &\simeq -\frac{\pi}{2} - \pi - 2\angle(1 - j\tau_2\omega) = -\pi \implies \angle(1 - j\tau_2\omega) = -\frac{\pi}{4} \\ \implies \tau_2\omega &= 1 \implies \omega = \omega_2^* \simeq \omega_{t_2} = 400\text{rad/sec}. \end{aligned}$$

Analisi quantitativa: per valutare la bontà delle approssimazioni assunte, si calcolano gli errori di approssimazione in corrispondenza delle pulsazioni di attraversamento a $-\pi$ radianti:

$$\begin{aligned} \angle(1 - j\tau_2\omega_1^*)^2 &= 2\angle\left(1 - \frac{j}{40}\right) \simeq -5.00 \cdot 10^{-2}\text{rad}, \\ \angle(1 + j\tau_1\omega_2^*)^2 &= 2\angle(1 + j40) \simeq 3.09\text{rad}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\angle W(j\omega_1^*) \simeq -\pi + 5.00 \cdot 10^{-2} \simeq -3.09\text{rad}, \quad \angle W(j\omega_2^*) \simeq -\pi + (\pi - 3.09) \simeq -3.09\text{rad}.$$

In entrambi i casi si commette un errore di valutazione di circa 0.05 radianti, inferiore ai 3 gradi.

4.5.6 Esempio di diagramma di Bode con termine trinomio smorzato

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{2000(10 - s)^2}{(s + 100)(s + 500)(s^2 + 2s + 4)}.$$

- i) Calcolare per quale pulsazione si ha un'attenuazione di 20dB;

ii) calcolare per quale pulsazione si ha uno sfasamento di $-\pi$ radianti.

Svolgimento. Come primo passo è necessario riscrivere i termini binomi in forma canonica:

$$(10 - s)^2 = 100 \left(1 - \frac{s}{10}\right)^2 = 100(1 - \tau_1 s)^2,$$

$$s + 100 = 100 \left(1 + \frac{s}{100}\right) = 100(1 + \tau_2 s),$$

$$s + 500 = 500 \left(1 + \frac{s}{500}\right) = 500(1 + \tau_3 s),$$

con

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.1 \text{sec}, & \omega_{t_1} &= 10 \text{rad/sec}, \\ \tau_2 &= 0.01 \text{sec}, & \omega_{t_2} &= 100 \text{rad/sec}, \\ \tau_3 &= 0.002 \text{sec}, & \omega_{t_3} &= 500 \text{rad/sec}. \end{aligned}$$

Il termine trinomio ha radici complesse e coniugate. Scrivendolo in forma canonica:

$$s^2 + 2s + 4 = 4 \left(1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}\right) = 4 \left(1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right),$$

con $\omega_n = 2 \text{rad/sec}$ e $\zeta = 0.5$, la funzione di trasferimento diventa:

$$W(s) = \frac{2000 \cdot 100(1 - \tau_1 s)^2}{100(1 + \tau_2 s) \cdot 500(1 + \tau_3 s) \cdot 4 \left(1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{(1 - \tau_1 s)^2}{(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s) \left(1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)},$$

con un guadagno di Bode unitario: $K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = 1$.

Descrizione dei diagrammi asintotici. Lo smorzamento del termine trinomio vale 0.5: i diagrammi asintotici delle ampiezze e delle fasi approssimano bene quelli di Bode, come si può osservare dal grafico di Figura 4.5.6.1.

Ampiezze. Non essendoci termini monomi, l'amplificazione alle basse frequenze è pari al guadagno di Bode e vale 0dB. Questa situazione persiste per pulsazioni inferiori alla più piccola pulsazione di taglio, che in questo caso coincide con la pulsazione naturale $\omega_n = 2 \text{rad/sec}$. Quindi, per valori della pulsazione superiori, il termine trinomio produce una pendenza di -40dB/dec fino alla pulsazione di taglio del binomio al numeratore: $\omega_{t_1} = 10 \text{rad/sec}$. Per pulsazioni superiori, il binomio al quadrato del numeratore bilancia il trinomio del denominatore, per cui si torna ad una pendenza nulla fino alla più piccola pulsazione di taglio successiva, $\omega_{t_2} = 100 \text{rad/sec}$, quando il termine binomio al denominatore fa nuovamente pendere il diagramma asintotico di -20dB/dec. Infine, per pulsazioni maggiori della pulsazione di taglio $\omega_{t_3} = 500 \text{rad/sec}$, il diagramma acquista la definitiva pendenza di -40dB/dec. Riassumendo quanto scritto riguardo alle pendenze del diagramma asintotico dei moduli:

$$\begin{aligned} \omega < 2, & & 0 \text{dB/dec} \\ 2 \leq \omega < 10, & & -40 \text{dB/dec} \\ 10 \leq \omega < 100, & & 0 \text{dB/dec.} \\ 100 \leq \omega < 500, & & -20 \text{dB/dec,} \\ \omega \geq 500, & & -40 \text{dB/dec.} \end{aligned}$$

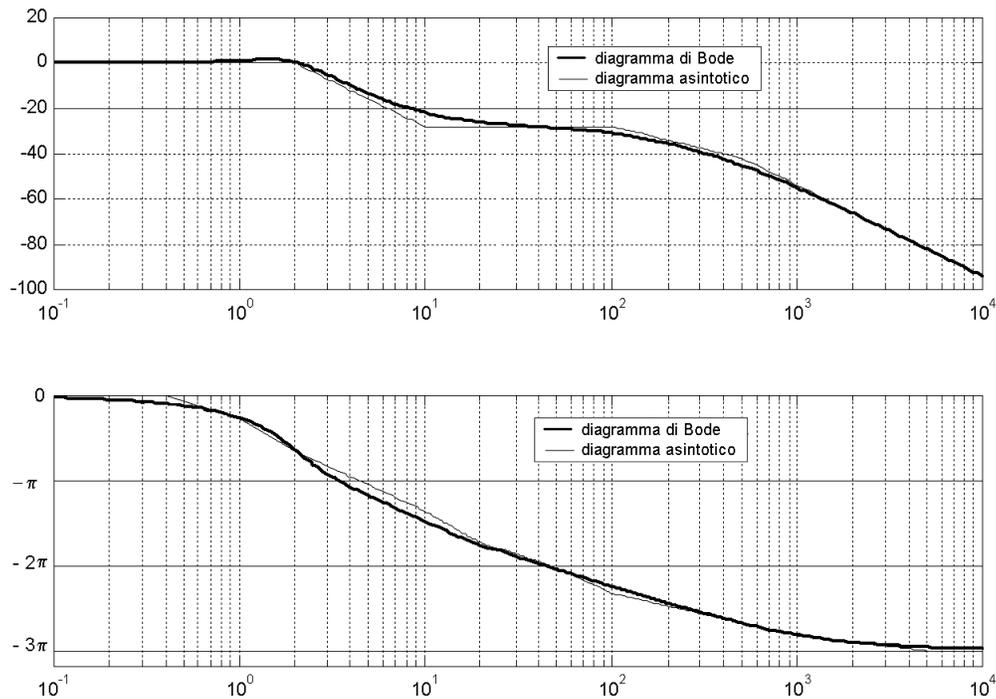


Figura 4.5.6.1 - Diagramma di Bode

Fasi. Non essendoci termini monomi, né guadagni di Bode negativi, non ci sono sfasamenti uniformi rispetto alle pulsazioni. Il diagramma asintotico del termine trinomio prevederà il raccordo tra 0 e π una decade prima e una decade dopo ω_n , ossia i punti di rottura del diagramma asintotico del termine trinomio sono 0.2rad/sec e 20rad/sec . Per basse frequenze, ossia per pulsazioni inferiori alla più piccola pulsazione di taglio (pari a 0.2rad/sec), il diagramma asintotico è costante e pari a zero. Quindi, il termine trinomio determina una pendenza di $-\pi$ su due decadi finché non interviene il binomio al numeratore, una decade prima della sua pulsazione di taglio ($\omega = 1\text{rad/sec}$), che diminuisce la pendenza delle fasi di altri $\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$, portandola a $-3\pi/2\text{rad/dec}$. Tale pendenza persiste fino $\omega = 20\text{rad/sec}$, in corrispondenza della seconda pulsazione di taglio del termine trinomio. Oltre tale pulsazione cessa l'influenza del termine trinomio sulle pendenze e inizia quella del termine binomio associato a ω_{t_2} in ragione di una diminuzione di $\frac{\pi}{4}\text{rad/dec}$, per cui il diagramma delle fasi si porta alla pendenza complessiva di $-\frac{3}{4}\pi\text{rad/dec}$. Quindi diminuisce ulteriormente portandosi a $-\pi\text{rad/dec}$ per $\omega > 50\text{rad/sec}$, quando l'ultimo termine binomio fa sentire il suo peso. La pendenza si porta a $-\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$ per $\omega > 100\text{rad/sec}$, a $-\frac{\pi}{4}\text{rad/dec}$ per $\omega > 1000\text{rad/sec}$ e, infine, il diagramma delle fasi annulla la propria pendenza per $\omega > 5000\text{rad/sec}$, quando le pulsazioni sono maggiori di una decade oltre la più grande pulsazione di taglio. Riassumendo l'andamento delle

pendenze:

$\omega < 0.4,$	0rad/dec,
$0.4 \leq \omega < 1,$	$-\pi$ rad/dec,
$1 \leq \omega < 10,$	$-3\pi/2$ rad/dec,
$10 \leq \omega < 50,$	$-(3\pi/4)$ rad/dec,
$50 \leq \omega < 100,$	$-\pi$ rad/dec,
$100 \leq \omega < 1000,$	$-(\pi/2)$ rad/dec,
$1000 \leq \omega < 5000,$	$-(\pi/4)$ rad/dec,
$\omega \geq 5000$	0rad/dec.

- i) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle ampiezze si nota che un'attenuazione di 20dB si ottiene per pulsazioni inferiori ai 10rad/sec, per cui è plausibile trascurare per il contributo dei due termini binomi

$$1 + \frac{s}{100}, \quad 1 + \frac{s}{500}.$$

Analisi quantitativa: attenuazione di 20dB significa:

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \quad \Longrightarrow \quad 20 \log |W(j\omega)| = -20 \quad \Longrightarrow \quad |W(j\omega)| = \frac{1}{10}.$$

Utilizzando le semplificazioni di cui sopra:

$$\begin{aligned} |W(j\omega)| &\simeq \frac{|1-j\tau_1\omega|^2}{\left|1 + \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right|} = \frac{1}{10} \\ \Longrightarrow \quad 10(1 + \tau_1^2\omega^2) &= \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}} \\ \Longrightarrow \quad 100\left(1 + \frac{\omega^2}{100}\right)^2 &= \left(1 - \frac{\omega^2}{4}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4} \\ \Longrightarrow \quad 100 + 2\omega^2 + \frac{\omega^4}{100} &= 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{16} + \frac{\omega^2}{4} \\ \Longrightarrow \quad 21\omega^4 - 900\omega^2 - 39600 &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \omega^2 \simeq 69.85 \text{ rad}^2/\text{sec}^2 &\Longrightarrow \quad \omega = \bar{\omega} \simeq 8.36 \text{ rad/sec.} \end{aligned}$$

Come verifica della validità delle approssimazioni assunte, si determina il contributo dei termini binomi trascurati in corrispondenza della pulsazione $\bar{\omega}$:

$$|1 + j\tau_2\bar{\omega}|_{\text{dB}} \simeq 3.02 \cdot 10^{-2} \text{ dB}, \quad |1 + j\tau_3\bar{\omega}|_{\text{dB}} \simeq 1.21 \cdot 10^{-3} \text{ dB}.$$

Per $\omega = \bar{\omega}$, dunque, il valore delle ampiezze in dB è:

$$|W(j\bar{\omega})|_{\text{dB}} = -20 - |1 + j\tau_2\bar{\omega}|_{\text{dB}} - |1 + j\tau_3\bar{\omega}|_{\text{dB}} \simeq -20.03 \text{ dB},$$

e si commette un errore inferiore allo 0.2%.

- ii) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle fasi si nota che uno sfasamento di $-\pi$ radianti si ottiene per pulsazioni inferiori ai 10rad/sec, per cui, anche in questo caso, è plausibile trascurare i due termini binomi al denominatore.

Analisi quantitativa:

$$\begin{aligned}\angle W(j\omega) &\simeq \angle \left(\frac{(1-j\tau_1\omega)^2}{1+\frac{2j\zeta\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) = -\pi \\ \implies \operatorname{Im} \left[(1-j\tau_1\omega)^2 \left(1 - \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \right] &= 0 \\ \implies -(1-\tau_1^2\omega^2) \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right) - 2\tau_1\omega \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) &= 0 \\ \implies -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{100} \right) - \frac{1}{5} \left(1 - \frac{\omega^2}{4} \right) &= 0 \\ \implies -100 + \omega^2 - 40 + 10\omega^2 &= 0 \\ \implies \omega^2 = \frac{140}{11} \implies \omega = \omega^* \simeq 3.57 \text{rad/sec.}\end{aligned}$$

Anche per le fasi, è possibile valutare la bontà delle approssimazioni assunte calcolando i contributi dei termini binomi trascurati nella pulsazione ω^* :

$$\angle(1+j\tau_2\omega^*) \simeq 3.57 \cdot 10^{-2} \text{rad}, \quad \angle(1+j\tau_3\omega^*) \simeq 7.13 \cdot 10^{-3} \text{rad}.$$

In corrispondenza di ω^* , dunque, la fase vale:

$$\angle W(j\omega^*) = -\pi - \angle(1+j\tau_2\omega^*) - \angle(1+j\tau_3\omega^*) \simeq -3.18 \text{rad/sec},$$

ossia si ottengono $-\pi$ radianti a meno di una quantità inferiore a 0.05 rad (meno di 3 gradi).

4.5.7 Esempio di diagramma di Bode con termine trinomio non smorzato

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1440(2-5s)}{(4+5s)^2(36+s^2)}.$$

- i) Calcolare per quale pulsazione si ha un'attenuazione di 40/dec;
- ii) calcolare per quale pulsazione si ha uno sfasamento di $-\pi$ radianti.

Svolgimento. Sono presenti due termini binomi, di cui uno al quadrato, ed un termine trinomio. Posti in forma canonica:

$$\begin{aligned}2-5s &= 2(1-\tau_1s), & \tau_1 &= 2.5 \text{ sec}, & \omega_{t_1} &= 0.4 \text{ rad/sec}, \\ (4+5s)^2 &= 16(1+\tau_2s)^2, & \tau_2 &= 1.25 \text{ sec}, & \omega_{t_2} &= 0.8 \text{ rad/sec}, \\ 36+s^2 &= 36 \left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right), & \zeta &= 0, & \omega_n &= 6 \text{ rad/sec},\end{aligned}$$

la funzione di trasferimento diventa:

$$W(s) = \frac{K(1-\tau_1s)}{(1+\tau_2s)^2 \left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)},$$

con il guadagno di Bode $K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = 5$.

Descrizione dei diagrammi asintotici. La presenza del termine trinomio non smorzato ($\zeta = 0$) fa sì che il diagramma asintotico delle ampiezze perda validità nell'intorno della pulsazione di risonanza che, in questo caso, coincide con quella naturale ω_n . Per le fasi, invece, il termine trinomio non smorzato determina uno sfasamento istantaneo di π in corrispondenza di ω_n .

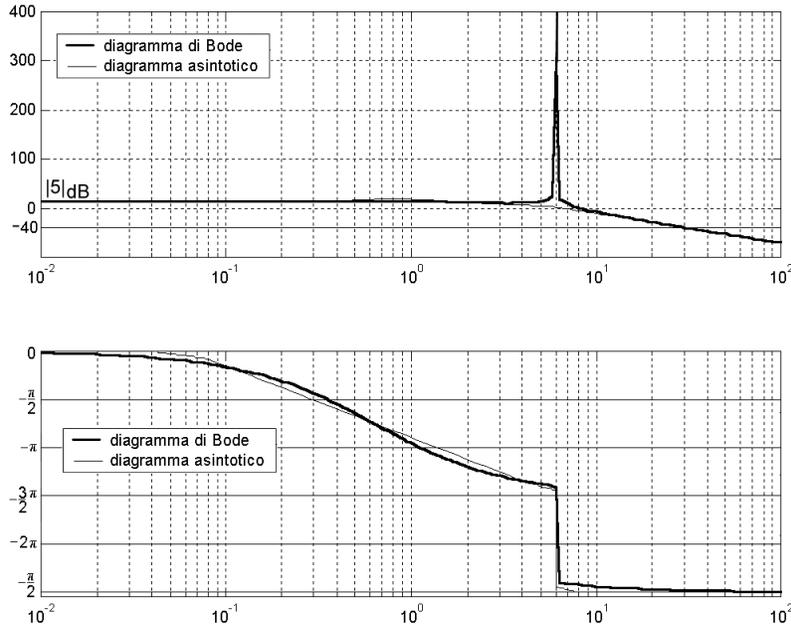


Figura 4.5.7.1 - Diagramma di Bode

Ampiezze. Il guadagno di Bode K determina il riferimento per l'asse delle ascisse nel diagramma delle ampiezze, ossia il diagramma asintotico è costante e pari a $|K|_{dB} \simeq 13.98dB$ fino alla pulsazione di taglio $\omega_{t_1} = 0.4rad/sec$, in corrispondenza della quale il diagramma asintotico sale di $20dB/dec$ fino a incontrare $\omega_{t_2} = 0.8rad/sec$. Quindi, la pendenza cambia segno portandosi a $-20dB/dec$ fino alla pulsazione naturale $\omega_n = 6rad/sec$, in corrispondenza della quale diminuisce ulteriormente a $-60dB/dec$. È bene notare, però, che il diagramma di Bode presenta un asintoto verticale in corrispondenza della pulsazione naturale ω_n , discostandosi, dunque, sensibilmente dal diagramma asintotico in quell'intorno. Riassumendo, le pendenze del diagramma asintotico assumono i valori:

$$\begin{aligned}
 \omega < 0.4, & & 0dB/dec; \\
 0.4 \leq \omega < 0.8, & & +20dB/dec; \\
 0.8 \leq \omega < 6, & & -20dB/dec, \\
 \omega \geq 6 & & -60dB/dec;
 \end{aligned}$$

Fasi. Il guadagno di Bode è positivo e non ci sono termini monomi: il diagramma asintotico delle fasi è uniformemente nullo fino alla pulsazione $0.04rad/sec$, una decade prima di quella di taglio ω_{t_1} , in corrispondenza della quale il diagramma acquista una pendenza negativa di $-\frac{\pi}{4}rad/dec$ fino

a 0.08rad/sec, una decade prima di ω_{t_2} . Quindi la pendenza assume il valore di $-\frac{3}{4}\pi$ rad/dec fino a 4rad/sec, una decade dopo ω_{t_1} , in corrispondenza della quale risale a $-\frac{\pi}{2}$ rad/dec. Nell'intervallo [4, 8] la pendenza non cambia; la presenza del termine trinomio non smorzato, con pulsazione naturale $\omega_n = 6$ rad/sec all'interno del suddetto intervallo determina, però, una discontinuità nel diagramma, in ragione di uno sfasamento a gradino di $-\pi$ radianti in corrispondenza di ω_n , ossia la fase in quel punto passa dal valore:

$$\angle W(j6^-) = \angle(1 - j\tau_1 6) - 2\angle(1 + j\tau_2 6) \simeq -4.38\text{rad},$$

al valore:

$$\angle W(j6^+) = \angle W(j6^-) - \pi \simeq -7.52\text{rad} = -1.24\text{rad}.$$

Quindi, per pulsazioni maggiori di 8rad/sec, la fase si assesta al valore di $-\frac{\pi}{2}$ radianti annullando la sua pendenza. Riassumendo l'andamento delle pendenze:

$\omega < 0.04,$	0rad/dec,
$0.04 \leq \omega < 0.08,$	$-(\pi/4)$ rad/dec,
$0.08 \leq \omega < 4,$	$-(3\pi/4)$ rad/dec,
$4 \leq \omega < 8,$	$-(\pi/2)$ rad/dec,
$\omega \geq 8,$	0rad/dec.

- i) **Analisi qualitativa:** si noti che un'attenuazione di 40dB si ottiene per pulsazioni maggiori di 6rad/sec per cui, in prossimità della pulsazione di attraversamento a -40 dB, tutti i termini della funzione di trasferimento possono confondersi, con buona approssimazione, con il loro andamento asintotico alle alte frequenze. Dunque:

$$|1 - j\tau_1\omega| \simeq \tau_1\omega, \quad |(1 + j\tau_2\omega)^2| \simeq \tau_2^2\omega^2, \quad \left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right| \simeq \frac{\omega^2}{\omega_n^2}.$$

Analisi quantitativa: attenuazione di 40dB significa

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = -40 \Rightarrow 20 \log |W(j\omega)| = -40 \Rightarrow |W(j\omega)| = 10^{-2}.$$

Utilizzando le semplificazioni sopra esposte:

$$|W(j\omega)| \simeq \frac{K\tau_1\omega}{\tau_2^2\omega^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{1}{100} \implies \frac{288}{\omega^3} = \frac{1}{100} \implies \omega = \bar{\omega} \simeq 30.65\text{rad/sec}.$$

Volendo controllare quanto si è perso con le semplificazioni:

$$|W(j\bar{\omega})|_{\text{dB}} = |5|_{\text{dB}} + |1 - j\tau_1\bar{\omega}|_{\text{dB}} - 2|1 + j\tau_2\bar{\omega}|_{\text{dB}} - \left|1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_n^2}\right|_{\text{dB}} \simeq -39.67\text{dB},$$

ossia si commette un errore inferiore allo 0.9%.

- ii) **Analisi qualitativa:** il diagramma delle fasi attraversa la retta a $-\pi$ radianti in corrispondenza di una pulsazione $\omega^* < \omega_n$, dunque il termine trinomio non contribuisce al calcolo

(e questa non è un'approssimazione!). Non sono consigliabili semplificazioni per i termini binomi.

Analisi quantitativa:

$$\begin{aligned}\angle W(j\omega) &= \angle \left(\frac{1-j\tau_1\omega}{(1+j\tau_2\omega)^2} \right) = \angle \left((1-j\tau_1\omega)(1-j\tau_2\omega)^2 \right) = -\pi \\ \implies \operatorname{Im} \left[(1-j\tau_1\omega)(1-j\tau_2\omega)^2 \right] &= 0 \\ \implies -2\tau_2\omega - \tau_1\omega(1-\tau_2^2\omega^2) &= 0 \\ \implies \tau_1\tau_2^2\omega^2 = \tau_1 + 2\tau_2 &\implies \omega = \omega^* \simeq 1.13 \text{rad/sec.}\end{aligned}$$

5 Punti di equilibrio e Stabilità

Da un punto di vista applicativo non sempre è necessaria la conoscenza analitica o numerica dell'evoluzione dello stato e dell'uscita di un sistema, ma ci si può limitare più semplicemente all'analisi di alcuni aspetti qualitativi riguardanti le soluzioni delle equazioni dinamiche che descrivono in modo implicito le variabili del sistema. La conoscenza dei punti di equilibrio e l'analisi della loro stabilità rientrano nel set di specifiche sopra esposte, e costituiscono il punto di partenza per ogni analisi più approfondita, ovvero per la sintesi di opportune leggi di controllo.

5.1 Punti di equilibrio

La ricerca dei punti di equilibrio coinvolge il comportamento in evoluzione libera del sistema, ossia senza ingressi che lo forzano. Definiamo **punto di equilibrio** ogni stato $x_e \in \mathbb{R}^n$ del sistema per cui

$$x_e = \varphi(t, t_0, x_e, 0|_{[t_0, t)}) \quad \forall t \geq t_0$$

In altri termini, se il sistema parte da quello stato, la sua traiettoria coincide con il punto di equilibrio stesso (non c'è movimento). Nel caso di sistemi a tempo continuo stazionari che siano descritti da una equazione differenziale ordinaria del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

i punti di equilibrio sono i punti che annullano la derivata (il movimento), per cui si cercano come soluzioni del sistema algebrico (non lineare) di equazioni

$$f(x) = 0$$

Nel caso di sistemi a tempo discreto stazionari che siano descritti da una equazione alle differenze del tipo

$$x(t+1) = g(x(t)), \quad f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

i punti di equilibrio sono i punti che annullano il movimento, per cui si cercano come soluzioni del sistema algebrico (non lineare) di equazioni

$$x = f(x)$$

In entrambi i casi, si possono avere diverse possibilità:

- nessuna soluzione (il sistema non ammette punti di equilibrio);
- una soluzione unica (il sistema ammette un unico punto di equilibrio, in questi casi (a volte) chiamato *punto di lavoro*);
- due soluzioni distinte (il sistema ammette 2 punti di equilibrio, in questi casi si parla di bistabilità; è il caso di un sistema che ammette 2 punti di lavoro distinti);
- un numero finito di soluzioni distinte (il sistema ammette un numero finito di punti di equilibrio, in questi casi si parla di multistabilità);
- infinite soluzioni distribuite in modo continuo (il sistema ammette punti di equilibrio non isolati, che appartengono a una curva o a una superficie o a un *manifold* a più dimensioni)

5.1.1 Punti di equilibrio per sistemi lineari stazionari

Consideriamo un sistema lineare stazionario a tempo continuo. Per definizione, i punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema algebrico lineare di equazioni

$$Ax = 0$$

ossia i punti di equilibrio sono il nullo della matrice A . Da cui segue l'importante proprietà che esiste un unico punto di equilibrio se, e solo se, la matrice A ha rango pieno ossia se, e solo se, non esistono autovalori nulli per A . E, in tal caso, l'unico punto di equilibrio è l'origine. In caso contrario, l'insieme dei punti di equilibrio sarà infinito, e costituito dallo spazio delle soluzioni di $Ax = 0$ (non esistono punti di equilibrio isolati). L'origine, in ogni caso, è sempre un punto di equilibrio.

Nel caso di sistemi lineari stazionari a tempo discreto, per definizione, i punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$(I - A)x = 0$$

Per cui, *mutatis mutandis* si ripetono le stesse considerazioni svolte per il caso a tempo continuo: esiste un unico punto di equilibrio se, e solo se, la matrice $I - A$ ha rango pieno ossia se, e solo se, non esistono autovalori nulli per $I - A$ ossia se, e solo se, non esistono autovalori in modulo pari a 1 per A . E, in tal caso, l'unico punto di equilibrio è l'origine. In caso contrario, l'insieme dei punti di equilibrio sarà infinito, e costituito dallo spazio delle soluzioni di $(I - A)x = 0$ (non esistono punti di equilibrio isolati). L'origine, in ogni caso, è sempre un punto di equilibrio.

5.2 Stabilità

Nelle definizioni che seguono si fa riferimento all'*intorno* di un punto \bar{x} di raggio $\rho > 0$, $I_\rho(\bar{x})$, come l'insieme dei punti la cui distanza da \bar{x} è minore di ρ :

$$I_\rho(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \rho\}.$$

Un punto di equilibrio x_e è **stabile** se, comunque si fissi un intorno di raggio ε piccolo a piacere del punto di equilibrio $I_\varepsilon(x_e)$, esiste un opportuno intorno di raggio δ del punto di equilibrio $I_\delta(x_e)$, tale che per ogni stato iniziale $x_0 \in I_\delta(x_e)$, l'evoluzione libera dello stato è contenuta in $I_\varepsilon(x_e)$, ossia:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) : \quad \|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad \|x_{\text{lib}}(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si parla di **stabilità asintotica** se, oltre alla stabilità, il punto di equilibrio è **attraattivo**, ossia esiste un intorno di raggio η del punto di equilibrio $I_\eta(x_e)$ tale che, per ogni stato iniziale $x_0 \in I_\eta(x_e)$, l'evoluzione libera del sistema converga a x_e , ossia:

$$\exists \eta > 0 : \|x_0 - x_e\| < \eta \implies \|x_{\text{lib}}(t) - x_e\| \mapsto 0.$$

Per come è definita l'attrattività, solo i punti isolati possono essere asintoticamente stabili. Infatti, se il punto di equilibrio x_e appartenesse a una curva di soluzioni, per quanto piccolo si possa scegliere $I_\varepsilon(x_e)$, esisterebbe sempre almeno un altro punto di equilibrio distinto in $I_\varepsilon(x_e)$ e se si partisse da quel punto non si convergerebbe a x_e (perché non ci si muoverebbe).

Si parla di **stabilità esponenziale** quando la stabilità asintotica implica il ritorno al punto di equilibrio con "velocità esponenziale", ossia se $\exists \alpha > 0$ tale che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) : \|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon) \implies \|x_{\text{lib}}(t) - x_e\| < \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Un punto di equilibrio è stabile asintoticamente **globalmente** se

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n : \|x_{\text{lib}}(t) - x_e\| \mapsto 0$$

Altrimenti la stabilità asintotica è solo **locale**. Si noti che la stabilità asintotica di un punto di equilibrio x_e può essere globale solo se x_e è l'unico punto di equilibrio del sistema. Altrimenti, ipotizzando che ci sia un altro punto di equilibrio distinto, potrei sempre partire da quel punto e non convergerei a x_e (perché non mi muoverei).

Uno dei criteri maggiormente usati nella Teoria dei Sistemi per valutare la stabilità di un punto di equilibrio è il **criterio di Lyapunov**.

5.2.1 Stabilità per sistemi lineari stazionari

Nel caso di sistemi lineari stazionari possono aversi solo due situazioni per i punti di equilibrio: ne esiste uno solo, ed è l'origine; oppure ne esistono infiniti, non isolati, e sono uno spazio vettoriale ($\mathcal{N}(A)$ o $\mathcal{N}(I-A)$ per i sistemi a tempo continuo o a tempo discreto). Nel secondo caso, la stabilità di un qualunque punto di equilibrio implica ed è implicata dalla stabilità dell'origine. Infatti, se x_e è un punto di equilibrio (e, quindi, $x_e = \Phi(t)x_e$) allora $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ tale che,

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \implies \|\Phi(t)(x_0 - x_e)\| < \varepsilon$$

Il che implica equivale a dire che l'origine è stabile (basta definire lo scostamento dall'origine $z_0 = x_0 - x_e$. Per questo motivo, nel caso di sistemi lineari stazionari si parla di stabilità del sistema (la stabilità di ogni punto di equilibrio implica ed è implicata dalla stabilità di ogni altro) o di stabilità nell'origine (perché la stabilità nell'origine implica ed è implicata dalla stabilità di ogni altro punto).

Infine, per quanto detto sui punti di equilibrio, un sistema lineare stazionario può essere stabile asintoticamente solo se l'origine è l'unico punto di equilibrio. Se ciò accade, dunque, si avrà stabilità asintotica globale.

Consideriamo adesso un sistema a tempo continuo e scriviamo l'evoluzione libera decomposta nei suoi modi naturali, supponendo di averne n distinti:

$$x_{\text{lib}}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i^T x(0)$$

Segue subito che:

- si ha *instabilità* se, e solo se, vi è almeno un autovalore a parte reale positiva (c'è almeno un modo naturale instabile);
- si ha *stabilità* se, e solo se, non vi sono autovalori a parte reale positiva (non vi sono modi naturali instabili);
- si ha *stabilità asintotica* se, e solo se, tutti gli autovalori sono a parte reale negativa (tutti i modi naturali sono stabili asintoticamente).

Nel caso vi siano anche autovalori multipli (molteplicità algebrica maggiore di uno), le condizioni di stabilità precedentemente esposte cambiano come segue:

- si ha *instabilità* se, e solo se:
 - c'è almeno un autovalore a parte reale positiva, oppure
 - c'è almeno un modo naturale del tipo $t^k e^{\lambda_i t}$ (autovalore multiplo con parte reale nulla);
- si ha *stabilità* se, e solo se:
 - non ci sono autovalori a parte reale positiva, e
 - tutti gli autovalori multipli del tipo $t^k e^{\lambda_i t}$ sono a parte reale negativa;
- si ha *stabilità asintotica* se, e solo se, tutti gli autovalori sono a parte reale negativa.

Il ragionamento si ripete identico per i sistemi a tempo discreto, con la sola differenza che gli autovalori devono soddisfare la condizione di essere in modulo minori di 1 (invece che in parte reale minori di 0).

Nel caso a tempo discreto si evince facilmente che la stabilità asintotica implica quella esponenziale. Ma lo stesso si può dire per i sistemi a tempo discreto, visto che

$$|\lambda|^t = e^{\log(|\lambda|^t)} = e^{\log(|\lambda|) \cdot t}$$

Dunque, per i sistemi a tempo continuo, la stabilità esponenziale è controllata dall'autovalore più lento, ossia da quello a parte reale più grande (ma sempre negativa), e la sua velocità di discesa esponenziale è

$$\alpha = -\max\{\operatorname{Re}(\lambda_i)\}$$

Analogamente, per i sistemi a tempo discreto, la stabilità esponenziale è controllata dall'autovalore più lento, ossia da quello in modulo più grande (ma sempre minore di 1), e la sua velocità di discesa esponenziale è

$$\alpha = -\max\{\log(|\lambda_i|)\}$$

5.3 Stabilità esterna

Accanto a queste condizioni di stabilità, che riguardano solo l'evoluzione libera dello stato (e che per questo motivo sono anche dette di *stabilità interna*), ve ne sono altre che coinvolgono anche l'ingresso e l'uscita del sistema. Più precisamente, un sistema lineare stazionario si dice **stabile**

esternamente se, comunque si scelgano lo stato iniziale e un ingresso limitato, l'uscita del sistema è anch'essa limitata, ossia:

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u(\cdot) : \quad \|u(t)\| < M < +\infty, \quad \forall t \geq t_0, \\ \implies \quad \exists N(x_0, M) : \quad \|y(t)\| < N < +\infty, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Una condizione di stabilità esterna più debole coinvolge solo la risposta forzata e afferma che un sistema è **stabile esternamente dallo stato zero** se, comunque si scelga un ingresso limitato, la risposta forzata in uscita è anch'essa limitata, ossia:

$$\begin{aligned} \forall u(\cdot) : \quad \|u(t)\| < M < +\infty, \quad \forall t \geq t_0, \\ \implies \quad \exists N(M) : \quad \|y_{\text{for}}(t)\| < N < +\infty, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Per come sono state definite tali condizioni di stabilità esterna sono note in letteratura con l'acronimo inglese BIBO (**B**ounded **I**ntput, **B**ounded **O**utput).

Scendendo nel dettaglio dei sistemi lineari stazionari, si dimostra che:

- si ha *stabilità esterna* se, e solo se, le seguenti due condizioni sono verificate:
 - i modi naturali osservabili in uscita sono stabili;
 - i modi naturali osservabili in uscita ed eccitabili per impulsi in ingresso sono stabili asintoticamente;
- si ha *stabilità esterna dallo stato zero* se, e solo se, i modi naturali osservabili in uscita ed eccitabili per impulsi in ingresso sono stabili asintoticamente.

Osservazione. Si noti che la stabilità asintotica implica la stabilità esterna, ma non è vero il viceversa, in quanto potrebbero esserci modi instabili non osservabili in uscita o non eccitabili per impulsi in ingresso (questi modi corrispondono alle cancellazioni polo/zero della funzione di trasferimento).

5.4 Stabilità per sistemi lineari stazionari a tempo continuo: il criterio di Routh

Da quanto esposto è facile intuire che l'analisi della stabilità per un sistema lineare stazionario si riduce al problema numerico del calcolo degli zeri del polinomio caratteristico (autovalori della matrice A) per la stabilità interna. In realtà, ciò che è richiesto non è tanto la conoscenza esatta (o approssimata) degli autovalori/poli di cui sopra, quanto la loro appartenenza ad opportuni domini del piano complesso: il semipiano reale negativo per i sistemi a tempo continuo oppure il cerchio unitario per i sistemi a tempo discreto. Di seguito valuteremo un criterio che risponda al primo quesito, ossia se tutti gli zeri di un polinomio sono a parte reale negativa. Inoltre, tale criterio risponderà anche a quesiti più complessi: talvolta si è interessati a garantire una dinamica particolarmente veloce, e si considera il semipiano a parte reale minore di un opportuno coefficiente negativo; oppure si è preoccupati delle oscillazioni prodotte dalle coppie di poli complessi coniugati, e si considera un dominio del semipiano reale negativo, che limiti opportunamente il coefficiente di smorzamento delle coppie complesse coniugate. Per rispondere a tutti questi quesiti, si introduce il seguente criterio che riguarda l'analisi del segno delle radici di un polinomio.

Criterio di Routh – Sia

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0,$$

un polinomio di grado n ($\alpha_n \neq 0$). Si costruisca la tabella:

n	a_n^0	a_{n-2}^0	a_{n-4}^0	a_{n-6}^0	\dots
$n-1$	a_{n-1}^1	a_{n-3}^1	a_{n-5}^1	a_{n-7}^1	\dots
$n-2$	a_{n-2}^2	a_{n-4}^2	a_{n-6}^2	\dots	
$n-3$	a_{n-3}^3	a_{n-5}^3	a_{n-7}^3	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots			
3	a_3^{n-3}	a_1^{n-3}			
2	a_2^{n-2}	a_0^{n-2}			
1	a_1^{n-1}				
0	a_0^n				

nel seguente modo:

- i) $a_i^0 = \alpha_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i = n, n-2, n-4, \dots;$
- ii) $a_i^1 = \alpha_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i = n-1, n-3, n-5, \dots;$
- iii) $a_i^j = -\frac{b_i^j}{a_{n+1-j}^{j-1}}, \quad b_i^j = \begin{vmatrix} a_{n+2-j}^{j-2} & a_i^{j-2} \\ a_{n+1-j}^{j-1} & a_{i-1}^{j-1} \end{vmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i = n-j, n-j-2, \dots.$

Se è possibile completare la tabella (ossia se gli elementi della prima colonna sono tutti non nulli), si può escludere che vi siano radici a parte reale nulla per il polinomio. Quindi, si considera il segno degli elementi della prima colonna. Il numero delle **variazioni** di segno tra elementi adiacenti determina il numero di radici a parte reale positiva del polinomio.

$$\begin{array}{c} a_n^0 \\ a_{n-1}^1 \\ a_{n-2}^2 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \\ a_0^n \end{array}$$

Applicando il criterio di Routh al polinomio caratteristico o al denominatore della funzione di trasferimento $W(s)$, è possibile, dunque, discutere la stabilità (interna e/o esterna) del sistema.

A riguardo di tale criterio, inoltre, è possibile dimostrare le seguenti proposizioni:

- condizione necessaria affinché il sistema sia asintoticamente stabile (tutti gli elementi in prima colonna non nulli e concordi di segno) è che tutti i coefficienti del polinomio siano concordi di segno;
- nella costruzione della tabella è possibile (per semplificare i conti) moltiplicare tutti gli elementi di una colonna per uno stesso coefficiente positivo.

Esempio. Applichiamo il Criterio di Routh al polinomio

$$d(\lambda) = \lambda^8 - \lambda^7 + \lambda^5 - \lambda^2 + 1.$$

La tabella di Routh associata al polinomio $d(\lambda)$ è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccccc} 8 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 0 & 0 & \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 1 & \\ 5 & 1 & -1 & 1 & & \\ 4 & 1 & -2 & 1 & & \\ 3 & 1 & 0 & & & \\ 2 & -2 & 1 & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & & & \\ 0 & 1 & & & & \end{array}$$

Si può applicare il criterio di Routh, poiché la tabella può scriversi completamente, infatti non presenta zeri in prima colonna, che (trasposta) è pari a:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & & -1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -2 & & \frac{1}{2} & & 1 \\ & V & & V & & P & & P & & P & & V & & V & & P \end{array}$$

Vi sono 4 variazioni in prima colonna, per cui il polinomio caratteristico ha 4 radici a parte reale positiva e 4 radici a parte reale negativa: il sistema è instabile.

5.4.1 Il caso di uno zero in prima colonna nella tabella di Routh

Nel caso in cui, nella realizzazione della tabella, ci si imbatte in un elemento nullo in prima colonna, chiaramente la tabella, così come è stata definita, non può completarsi. Si supponga che non tutti gli elementi della riga con lo zero in prima posizione siano nulli. In questi casi, si può procedere in due modi alternativi:

- si sostituisce al posto dell'elemento nullo la quantità infinitesima $\varepsilon > 0$. Si completa la tabella in funzione del parametro ε e si traggono le opportune conclusioni a tabella ultimata, come descritto dal criterio di Routh; questo approccio porta agli stessi risultati anche supponendo $\varepsilon < 0$, ossia il numero delle variazioni in prima colonna è invariante rispetto al segno di ε ;
- si moltiplica il polinomio di partenza per un secondo polinomio, le cui radici siano non nulle e note, almeno nel segno (è preferibile, inoltre, che il grado sia piccolo, per non appesantire i conti); dopo aver calcolato i coefficienti del polinomio prodotto, se ne scrive la tabella di Routh e si traggono le opportune conclusioni, analizzando permanenze e variazioni in prima colonna. Ovviamente, dalle radici del polinomio prodotto devono essere escluse quelle fittizie

del secondo polinomio. Le controindicazioni a questo approccio (euristico) sono che, se pur improbabile, non vi è certezza che non si ripresenti uno zero in prima colonna nella costruzione della nuova tabella.

Esempio. Applichiamo il Criterio di Routh al polinomio

$$d(s) = s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 2.$$

La costruzione della tabella di Routh associata al polinomio $d(s)$ si interrompe in corrispondenza della riga 3:

$$\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & \end{array}$$

Poiché la riga 3 non è tutta nulla, è possibile completare la tabella sostituendo allo zero in prima posizione la quantità infinitesima $\varepsilon > 0$:

$$\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & \varepsilon & -1 & \\ 2 & \frac{1}{\varepsilon} & 2 & \\ 1 & -1 & & \\ 0 & 2 & & \end{array}$$

Si noti che nella realizzazione della tabella si è tenuto conto che la quantità ε è infinitesima, per cui:

$$a_2^3 = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad a_1^4 = -1 - 2\varepsilon^2 = -1.$$

Riscrivendo, trasposta, la prima colonna:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \varepsilon & \frac{1}{\varepsilon} & -1 & 2 \\ P & P & P & V & V & \end{array}$$

si ottengono 2 variazioni e 3 permanenze, per cui vi sono 2 poli a parte reale positiva e 3 a parte reale negativa: il sistema è instabile, perché i due poli a parte reale positiva corrispondono ad una coppia di modi instabili (osservabili in uscita ed eccitabili per impulsi in ingresso). Se si fosse scelto il parametro $\varepsilon < 0$, il risultato non sarebbe cambiato, come è giusto che sia:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \varepsilon & \frac{1}{\varepsilon} & -1 & 2 \\ P & V & P & P & V & \end{array}$$

Si ottengono sempre 2 variazioni e 3 permanenze.

Il medesimo risultato può essere raggiunto anche in altro modo, moltiplicando il polinomio $d(s)$ per il polinomio fittizio $s + 1$:

$$\tilde{d}(s) = d(s)(s + 1) = s^6 + 2s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 2,$$

e, quindi, se ne costruisce la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cccc}
 6 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
 5 & 2 & 2 & 3 & \\
 4 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & \\
 3 & & & & \\
 2 & & & & \\
 1 & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{c|cccc}
 6 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
 5 & 2 & 2 & 3 & \\
 4 & 2 & 1 & 4 & \\
 3 & 1 & -1 & & \\
 2 & 3 & 4 & & \\
 1 & -\frac{7}{3} & & & \\
 0 & 4 & & &
 \end{array}$$

Dal calcolo delle variazioni e delle permanenze in prima colonna:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & -\frac{7}{3} & 4 & \\
 P & P & P & P & V & V & &
 \end{array}$$

vi sono 2 variazioni e 4 permanenze, da cui 2 radici a parte reale positiva e 4 radici a parte reale negativa; di queste 4, però, una non va considerata, perché radice del polinomio $s + 1$, cosicché si ottiene lo stesso numero di variazioni precedentemente determinato.

5.4.2 Il caso di una riga tutta nulla nella tabella di Routh

Se costruendo la tabella di Routh, tutti gli elementi di una riga sono nulli, si utilizza il seguente algoritmo:

- i) la riga tutta nulla è necessariamente una riga dispari e il polinomio $p(\lambda)$ si fattorizza nel prodotto $p_1(\lambda)p_2(\lambda)$, con i polinomi $p_1(\lambda)$ e $p_2(\lambda)$ descritti nei punti successivi;
- ii) l'analisi riguardante la parte reale delle radici di $p_1(\lambda)$ si effettua applicando il criterio di Routh alla prima colonna della tabella incompleta: tante radici a parte reale positiva quante sono le variazioni e tante radici a parte reale negativa quante sono le permanenze;
- iii) il polinomio $p_2(\lambda)$ si scrive utilizzando i coefficienti della riga immediatamente precedente la riga tutta nulla, ed è un polinomio di sole potenze pari; ad esempio, supponendo di avere la seguente situazione nella tabella:

$$\begin{array}{c|cccc}
 6 & a_6^{n-6} & a_4^{n-6} & a_2^{n-6} & a_0^{n-6} \\
 5 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

si scrive il polinomio

$$p_2(\lambda) = a_6^{n-6}\lambda^6 + a_4^{n-6}\lambda^4 + a_2^{n-6}\lambda^2 + a_0^{n-6};$$

- iv) si calcola la derivata $\frac{dp_2}{d\lambda} = \tilde{p}(\lambda)$;
- v) si sostituisce nella tabella di Routh la riga tutta nulla con i coefficienti del polinomio $\tilde{p}(\lambda)$;
- vi) si completa la tabella e si considerano le variazioni di segno degli elementi in prima colonna, relativamente alla seconda parte della tabella;

- vii) ad ogni variazione corrisponde una coppia di radici di segno opposto e a parte reale non nulla, quindi una a parte reale positiva ed una a parte reale negativa;
- viii) se il numero delle radici di $p_1(\lambda)$ e di $p_2(\lambda)$ non raggiunge n , le restanti radici del polinomio sono a parte reale nulla.

Esempio. Applichiamo il Criterio di Routh al polinomio

$$d(\lambda) = \lambda^7 + 3\lambda^6 + 2\lambda^5 + 6\lambda^4 + 5\lambda^3 + 15\lambda^2 + 4\lambda + 12.$$

La costruzione della tabella di Routh associata al polinomio $d(\lambda)$ si interrompe in corrispondenza della riga 5:

$$\begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 6 & 15 & 12 \\ 5 & & & & \end{array} \implies \begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

La presenza di una riga a coefficienti tutti nulli impedisce il completamento della tabella. Applicando il criterio di Routh alla tabella incompleta, si ottiene una permanenza, che corrisponde ad una radice a parte reale negativa. Quindi si scrive il polinomio a potenze pari, i cui coefficienti sono dati dalla riga 6 e se ne calcola la derivata:

$$d_2(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 \implies d_2'(\lambda) = 6\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda.$$

Si sostituiscono alla riga 5 (tutta nulla) i coefficienti del polinomio $d_2'(s)$, completando la tabella:

$$\begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & \\ 4 & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} & 4 & \\ 3 & & & & \\ 2 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \implies \begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & \\ 4 & 1 & 5 & 6 & \\ 3 & -11 & -13 & & \\ 2 & \frac{42}{11} & 6 & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \implies \begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & \\ 4 & 1 & 5 & 6 & \\ 3 & -11 & -13 & & \\ 2 & 7 & 11 & & \\ 1 & \frac{30}{7} & & & \\ 0 & 11 & & & \end{array}$$

e si calcolano variazioni e permanenze in prima colonna, a partire dalla riga 5:

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 1 & -11 & 7 & \frac{30}{7} & 11 \\ & P & V & V & P & P \end{array}$$

Le 2 variazioni indicano che vi sono 2 radici a parte reale positiva e 2 a parte reale negativa; complessivamente vi sono, dunque, 3 radici a parte reale negativa e 2 a parte reale positiva. Le restanti 2 radici sono a parte reale nulla. Il sistema è instabile.

5.4.3 Scelta della regione per le radici

Come precedentemente accennato, un'altra opportunità che fornisce il criterio di Routh consiste nel verificare l'appartenenza delle radici di un polinomio a particolari regioni del piano. Si supponga, ad esempio, di essere interessati a radici che abbiano la parte reale minore di un coefficiente negativo fissato; questa condizione è importante qualora, oltre alla stabilità asintotica, si vogliano dare

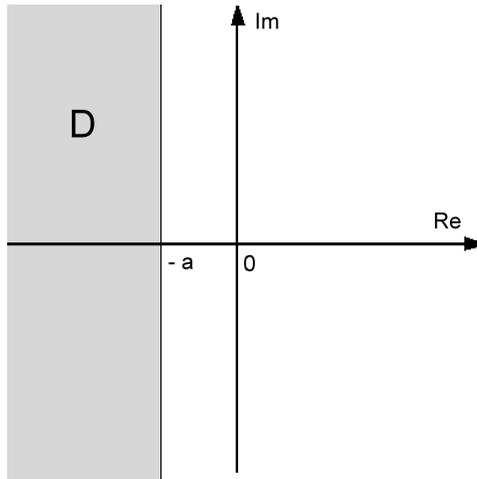


Figura 5.4.3.1 - Regione del piano complesso a parte reale minore di $-a$

specifiche anche sulla velocità di convergenza: più a sinistra del semipiano reale negativo si trovano le radici del polinomio caratteristico e più veloce è la convergenza a zero per l'evoluzione libera del sistema. Siano, dunque, D la regione indicata in Figura 5.4.3.1, delimitata dalla retta di ascissa $-a$, con $a \in \mathbb{R}^+$, e $p(\lambda)$ il polinomio, le cui radici si desidera che appartengano al dominio D .

Se con λ_i^* , $i = 1, \dots, n$ si indicano le radici del polinomio $p(\lambda)$, allora $\lambda_i^* + a$, $i = 1, \dots, n$ sono le radici del polinomio $\tilde{p}(\lambda) = p(\lambda - a)$. Infatti:

$$\tilde{p}(\lambda_i^* + a) = p(\lambda_i^* + a - a) = p(\lambda_i^*) = 0.$$

Dunque, applicare il criterio di Routh al polinomio $\tilde{p}(\lambda)$, ossia vedere quante radici di $\tilde{p}(\lambda)$ sono a parte reale negativa, equivale a conoscere il numero di radici del polinomio $p(\lambda)$ che appartengono a D :

$$\operatorname{Re}(\lambda_i^* + a) < 0 \quad \implies \quad \operatorname{Re}(\lambda_i^*) < -a.$$

Esempio. Calcolare per quali valori del parametro reale k i poli del polinomio caratteristico hanno parte reale minore di $-\frac{1}{3}$.

$$d(s) = s^2 + s + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo il polinomio $\tilde{d}(s) = d\left(s - \frac{1}{3}\right)$:

$$\tilde{d}(s) = \left(s - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(s - \frac{1}{3}\right) + k = s^2 + \frac{1}{3}s + k - \frac{2}{9},$$

la cui tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & k - \frac{2}{9} \\ 1 & \frac{1}{3} & \\ 0 & k - \frac{2}{9} & \end{array}$$

Affinché tutti i poli della funzione di trasferimento siano a parte reale minore di $-\frac{1}{3}$ non devono esserci variazioni nella tabella, per cui deve essere

$$k - \frac{2}{9} > 0 \quad \Longrightarrow \quad k > \frac{2}{9}.$$

Un'altra specifica da soddisfare consiste nel limitare le “caratteristiche complesse” delle radici del polinomio analizzato: se, ad esempio, si tratta del polinomio caratteristico, la presenza di una coppia di autovalori complessi coniugati ($\lambda_{1/2} = -\alpha \pm j\omega$, con $\alpha, \omega \in \mathbb{R}^+$) determina la presenza di modi pseudoperiodici e, quindi, di oscillazioni di pulsazione pari al modulo della parte immaginaria degli autovalori; pur se la coppia è stabile asintoticamente l'innescò di oscillazioni dà luogo a frizioni indesiderate tra le parti del sistema, tanto più dannose quanto maggiore è la loro frequenza: è perciò preferibile che le (eventuali) coppie di modi complessi coniugati siano associate ad autovalori con ω molto bassa. Se tali modi sono osservabili in uscita ed eccitabili per impulsi in ingresso, la funzione di trasferimento $W(s)$ ha al denominatore il fattore

$$(s + \alpha - j\omega)(s + \alpha + j\omega) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2 = |z|^2 \left(1 + \frac{2\alpha s}{|z|^2} + \frac{s^2}{|z|^2} \right),$$

con $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ il modulo degli autovalori. In questo caso, dunque, la presenza di una parte immaginaria dominante ($\omega \gg \alpha$) implica uno smorzamento $\zeta = \frac{\alpha}{|z|}$ molto basso, il che produce indesiderati effetti di risonanza in prossimità della pulsazione $\omega_n = |z|$. Posto $\bar{\zeta}$ lo smorzamento limite ammissibile, è individuato l'angolo $\bar{\varphi} = \arcsin \bar{\zeta}$ che delimita la regione D in Figura 6.4.2 delle coppie di punti complessi coniugati stabili ($\text{Re}(z) < 0$) e con smorzamento $\zeta > \bar{\zeta}$. Si noti che:

$$\lambda_i^* = -\alpha + j\omega \in D \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \arctan \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) > \bar{\varphi}.$$

Sia, dunque, $p(\lambda)$ il polinomio le cui radici si richiede che appartengano al dominio D di Figura 6.4.2. Fissato l'angolo $\bar{\varphi}$, si consideri il seguente polinomio:

$$\tilde{p}(\lambda) = p(\lambda e^{j\bar{\varphi}})p(\lambda e^{-j\bar{\varphi}}).$$

Per costruzione esso è a coefficienti reali e, inoltre, se λ_i^* è una radice di $p(\lambda)$, allora $\lambda_i^* e^{\pm j\bar{\varphi}}$ sono radici di $\tilde{p}(\lambda)$. Infatti:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\lambda_i^* e^{j\bar{\varphi}}) &= p(\lambda_i^* e^{j\bar{\varphi}} e^{j\bar{\varphi}})p(\lambda_i^* e^{j\bar{\varphi}} e^{-j\bar{\varphi}}) = p(\lambda_i^* e^{2j\bar{\varphi}})p(\lambda_i^*) = 0, \\ \tilde{p}(\lambda_i^* e^{-j\bar{\varphi}}) &= p(\lambda_i^* e^{-j\bar{\varphi}} e^{j\bar{\varphi}})p(\lambda_i^* e^{-j\bar{\varphi}} e^{-j\bar{\varphi}}) = p(\lambda_i^*)p(\lambda_i^* e^{-2j\bar{\varphi}}) = 0. \end{aligned}$$

Allora, applicare il criterio di Routh al polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ equivale a stabilire se le radici di $p(\lambda)$ appartengano a D :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\lambda_i^* e^{-j\bar{\varphi}}) < 0 &\Rightarrow \text{Re} [(-\alpha + j\omega) e^{-j\bar{\varphi}}] < 0 \\ \Rightarrow -\alpha \cos \bar{\varphi} + \omega \sin \bar{\varphi} < 0 &\Rightarrow \tan \varphi > \tan \bar{\varphi} \Rightarrow \varphi > \bar{\varphi}, \end{aligned}$$

Se le specifiche di controllo prevedono una limitazione sia sulla parte reale delle radici, sia sullo smorzamento di eventuali coppie complesse coniugate, ossia si richiede l'appartenenza ad un dominio del tipo descritto in Figura 3.1.4, è possibile applicare entrambi i procedimenti precedentemente descritti.

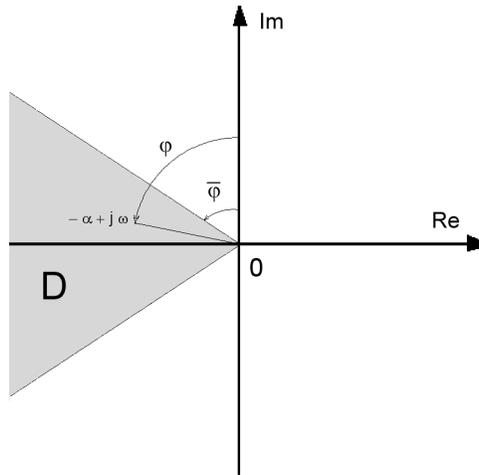


Figura 5.4.3.2 - Radici complesse con smorzamento maggiore di $\bar{\zeta} = \sin \bar{\varphi}$

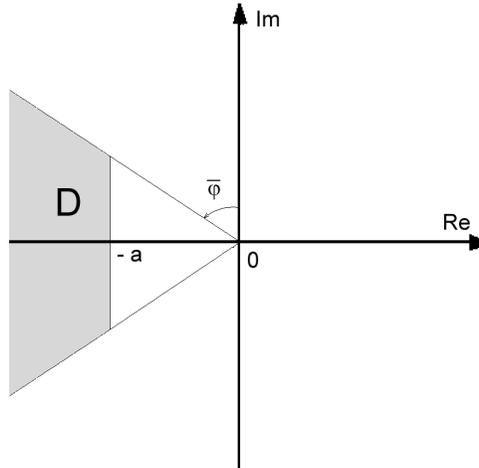


Figura 5.4.3.4 - Dominio che limita parte reale e smorzamento delle radici

Esempio. Stabilire se le radici del polinomio

$$d(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6$$

sono tutte a parte reale < -1 e con smorzamento maggiore di $\frac{1}{2}$.

In accordo con le specifiche dell'esercizio si impone l'appartenenza delle radici ad una regione del piano complesso del tipo in Figura 5.4.3.4, con:

$$a = 1, \quad \bar{\varphi} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Per verificare la condizione sulla parte reale delle radici, si costruisce la tabella di Routh per il polinomio:

$$\tilde{d}(\lambda) = d(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^3 + 5(\lambda - 1)^2 + 9(\lambda - 1) + 6 = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

Ci sono 3 permanenze, dunque tutte le radici del polinomio hanno parte reale minore di -1 . Per controllare la condizione sullo smorzamento, si scrive il polinomio

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\lambda) &= d(\lambda e^{j\frac{\pi}{6}}) d(\lambda e^{-j\frac{\pi}{6}}) = (\lambda^3 e^{j\frac{\pi}{2}} + 5\lambda^2 e^{j\frac{\pi}{3}} + 9\lambda e^{j\frac{\pi}{6}} + 6) (\lambda^3 e^{-j\frac{\pi}{2}} + 5\lambda^2 e^{-j\frac{\pi}{3}} + 9\lambda e^{-j\frac{\pi}{6}} + 6) \\ &= \lambda^6 + 10\lambda^5 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 18\lambda^4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 25\lambda^4 + 12\lambda^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + 90\lambda^3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 60\lambda^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 81\lambda^2 + 108\lambda \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 36 \\ &= \lambda^6 + 5\sqrt{3}\lambda^5 + 34\lambda^4 + 45\sqrt{3}\lambda^3 + 111\lambda^2 + 54\sqrt{3}\lambda + 36, \end{aligned}$$

e se ne costruisce la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 34 & 111 & 36 \\ 5 & 5\sqrt{3} & 45\sqrt{3} & 54\sqrt{3} & \\ 4 & & & & \\ 3 & & & & \\ 2 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} 6 & 1 & 34 & 111 & 36 \\ 5 & 5 & 45 & 54 & \\ 4 & 25 & \frac{501}{5} & 36 & \\ 3 & \frac{624}{25} & \frac{1170}{25} & & \\ 2 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 34 & 111 & 36 \\ 5 & 5 & 45 & 54 & \\ 4 & 25 & \frac{501}{5} & 36 & \\ 3 & 8 & 15 & & \\ 2 & \frac{2133}{40} & 36 & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} 6 & 1 & 34 & 111 & 36 \\ 5 & 5 & 45 & 54 & \\ 4 & 25 & \frac{501}{5} & 36 & \\ 3 & 8 & 15 & & \\ 2 & 237 & 160 & & \\ 1 & \frac{2275}{237} & & & \\ 0 & 160 & & & \end{array}$$

Dall'analisi delle variazioni:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 5 & 25 & 8 & 237 & \frac{2275}{237} & 160 \\ P & P & P & P & P & P & P \end{array}$$

tutte le radici cadono all'interno della regione desiderata.

6 Stabilità per sistemi lineari stazionari a retroazione a tempo continuo

Lo schema generico di un sistema di controllo **a controreazione** (o a **feedback**) per un sistema lineare stazionario a tempo continuo è quello descritto in Figura 6.1.

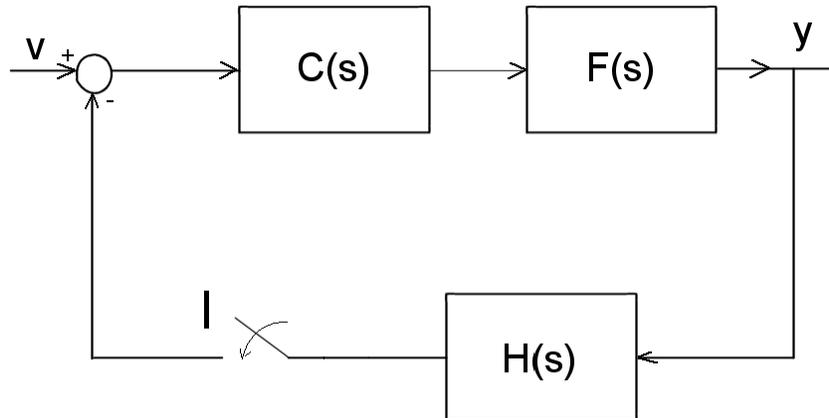


Figura 6.1 - Schema di controllo a controreazione

I 3 blocchi individuano i 3 sistemi dinamici costituenti il sistema di regolazione a ciclo chiuso, individuati dalla loro funzione di trasferimento. $F(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema fisico da controllare. $y(t)$ è l'uscita misurata che entra in feedback nel sistema di controllo; tale segnale potrebbe avere necessità di essere trasdotto: il controllore, che sia analogico o digitale, ha bisogno di un segnale elettrico, mentre l'uscita misurata potrebbe essere un angolo, una posizione, una velocità, ecc, per cui entra nel controllore attraverso un sistema di misurazione/trasduzione eventualmente dinamico, la cui funzione di trasferimento è $H(s)$. $v(t)$ è il segnale d'ingresso al controllore, generalmente un segnale di riferimento che viene confrontato con il segnale di uscita trasdotto: dunque, in ingresso al controllore entra la differenza tra l'ingresso desiderato e quello misurato, ossia l'errore. Il controllore è qui rappresentato dalla funzione di trasferimento $C(s)$, per cui lo si suppone analogico (a tempo continuo); nel caso in cui, invece, fosse un controllore digitale, i segnali a tempo continuo dovranno essere preventivamente campionati e, di contro, il segnale in uscita al controllore dovrà essere attuato attraverso un dispositivo che trasformi un segnale di controllo in un'azione elettrica o meccanica (o di qualunque altra natura necessaria per realizzare l'azione di controllo).

Si parla di *catena aperta* o *sistema a ciclo aperto* quando si suppone che l'interruttore I sia aperto, cosicché la funzione di trasferimento che esprime la relazione tra l'ingresso di riferimento e l'uscita misurata è:

$$W_{AP}(s) = F(s)C(s)$$

E' bene notare che, nel caso generico di sistemi a più ingressi e più uscite, le funzioni di trasferimento sono matrici, per cui il prodotto è *non* commutativo. Si parla di *catena chiusa* o *sistema a ciclo chiuso* quando l'interruttore è chiuso, per cui la funzione di trasferimento tra l'ingresso di riferimento e l'uscita misurata è:

$$W_{CH}(s) = (I + F(s)C(s)H(s))^{-1}F(s)C(s) = (I + W_{AP}(s)H(s))^{-1}W_{AP}(s)$$

6.1 Feedback a retroazione unitaria

Una delle specifiche più importanti per un sistema di controllo è che il sistema a ciclo chiuso sia stabile, possibilmente asintoticamente. A tale scopo è utile notare che la stabilità di un generico

sistema a controreazione descritto dalla Figura 6.1.1 (sinistra) è equivalente alla stabilità del sistema ad **anello unitario**, in cui il sistema di trasduzione è riportato in anello aperto, vedi Figura 6.1.1 (destra). Ovviamente, tale schema vale ipotizzando che l'ingresso di riferimento $v(t)$ e l'uscita misurata $y(t)$ abbiano le stesse dimensioni, ossia $p = q$.

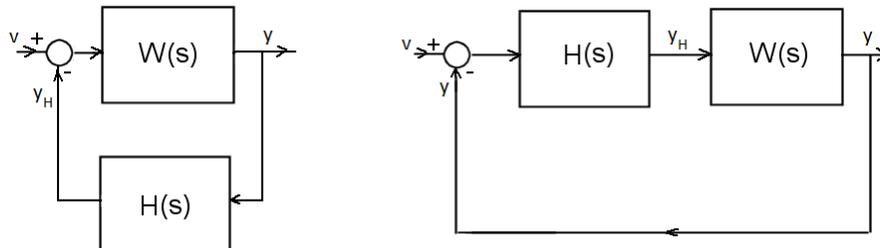


Figura 6.1.1 - Sistema a controreazione

Tale asserzione è facile da verificare nel dominio del tempo. Infatti, supponiamo che il sistema a catena aperta e il sistema di trasduzione siano descritti dalle equazioni (si faccia riferimento alla Figura 6.1.1 a sinistra):

$$\mathcal{S}_W = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(v(t) - y_H(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \mathcal{S}_H = \begin{cases} \dot{\zeta}(t) = F\zeta(t) + Gy(t) \\ y_H(t) = P\zeta(t) \end{cases}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\zeta(t) \in \mathbb{R}^m$ gli stati del sistema da controllare e del trasduttore, rispettivamente, e $y_H(t)$ il segnale in uscita al trasduttore. Da cui, a ciclo chiuso, abbiamo

$$\mathcal{S}_{CH} = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - BP\zeta(t) + Bv(t) \\ \dot{\zeta}(t) = GCx(t) + F\zeta(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

la cui matrice dinamica è, a blocchi

$$A_{CH} = \begin{bmatrix} A & -BP \\ GC & F \end{bmatrix}$$

Se ripetiamo lo stesso ragionamento per il sistema a controreazione unitaria descritto in Figura 6.1.1 a destra, abbiamo

$$\mathcal{S}_W = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + By_H(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \mathcal{S}_H = \begin{cases} \dot{\zeta}(t) = F\zeta(t) + G(v(t) - y(t)) \\ y_H(t) = P\zeta(t) \end{cases}$$

da cui, a ciclo chiuso, abbiamo

$$\mathcal{S}'_{CH} = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BP\zeta(t) \\ \dot{\zeta}(t) = -GCx(t) + F\zeta(t) + Gv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

la cui matrice dinamica è, a blocchi

$$A'_{CH} = \begin{bmatrix} A & BP \\ -GC & F \end{bmatrix}$$

Si dimostra che gli autovalori delle due matrici A_{CH} e A'_{CH} sono gli stessi (è facile verificarlo per il caso scalare $n = m = 1$), per cui lo studio della stabilità dei due sistemi descritti nei due schemi di Figura 6.1.1 è equivalente. Per questo motivo, senza perdita di generalità, potremo studiare la stabilità di sistemi a controreazione unitaria riportando il modulo di trasduzione in catena aperta. Lo schema di riferimento per questi sistemi è quello di Figura 6.1.2, in cui il sistema di trasduzione $H(s)$ è inglobato nella risposta in catena aperta.

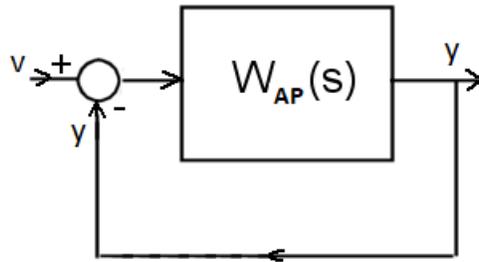


Figura 6.1.2 - Sistema a controreazione unitaria

6.2 Stabilità dei sistemi a controreazione unitaria: il Criterio di Nyquist per sistemi Single Input Single Output (SISO)

Le equazioni differenziali che descrivono i sistemi a ciclo aperto e a ciclo chiuso del sistema a controreazione unitaria del tipo in Figura 6.1.2 sono:

$$\mathcal{S}_{AP} = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(v(t) - y(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_{CH} = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BC)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Per cui, il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso diventa, applicando il Teorema di Binet sul determinante di un prodotto di matrici:

$$\begin{aligned} d_{CH}(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A + BC) = \det\left((\lambda I_n - A)(I_n + (\lambda I_n - A)^{-1}BC)\right) \\ &= \det(\lambda I_n - A) \cdot \det(I_n + (\lambda I_n - A)^{-1}BC) = d_{AP}(\lambda) \cdot \det(I_n + (\lambda I_n - A)^{-1}BC) \end{aligned}$$

Applicando la seguente proprietà dei determinanti:

$$\det(I_m + QP) = \det(I_m + PQ), \quad P \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

si ricava la formula che lega i polinomi caratteristici a ciclo aperto e a ciclo chiuso alla funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$\frac{d_{CH}(\lambda)}{d_{AP}(\lambda)} = \det(I_p + C(\lambda I_n - A)^{-1}B) = \det(I_p + W_{AP}(\lambda))$$

Nel caso semplificativo di sistemi a un solo ingresso e una sola uscita (Single Input Single Output, SISO), la formula precedente si semplifica in

$$\frac{d_{\text{CH}}(\lambda)}{d_{\text{AP}}(\lambda)} = 1 + W_{\text{AP}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Valutiamo cosa accade alle singole parti della formula quando considero $\lambda = j\omega$ e faccio variare ω da $-\infty$ a $+\infty$ (ossia mi sto muovendo lungo l'asse immaginario del piano complesso). I polinomi caratteristici sono, appunto, polinomi del tipo

$$d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ radici del polinomio. Se denotiamo con $\Delta_\varphi(\cdot)$ la variazione totale di fase per ω che si muove lungo il percorso sopraindicato, avremo:

$$\Delta_\varphi \left(\frac{d_{\text{CH}}(j\omega)}{d_{\text{AP}}(j\omega)} \right) = \Delta_\varphi(d_{\text{CH}}(j\omega)) - \Delta_\varphi(d_{\text{AP}}(j\omega)) = \Delta_\varphi(1 + W_{\text{AP}}(j\omega))$$

6.2.1 Assenza di radici a parte reale nulla nel polinomio a ciclo aperto

Consideriamo ora il singolo binomio $\lambda - \lambda_i$. Allora è facile verificare che

$$\Delta_\varphi(j\omega - \lambda_i) = \begin{cases} -\pi, & \text{Re}(\lambda_i) > 0 \\ +\pi, & \text{Re}(\lambda_i) < 0 \end{cases}$$

Nel caso in cui $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ non si può sciogliere la riserva sul segno della variazione di π , per cui per il momento escludiamo questo caso. Dunque, ipotizzando N_{CH} e N_{AP} il numero di radici a parte reale positiva dei polinomi caratteristici dei sistemi a ciclo chiuso e aperto, avremo:

$$\Delta_\varphi(d_{\text{CH}}(j\omega)) = -\pi N_{\text{CH}} + \pi(n - N_{\text{CH}}) \quad \Delta_\varphi(d_{\text{AP}}(j\omega)) = -\pi N_{\text{AP}} + \pi(n - N_{\text{AP}})$$

da cui

$$\Delta_\varphi \left(\frac{d_{\text{CH}}(j\omega)}{d_{\text{AP}}(j\omega)} \right) = -\pi N_{\text{CH}} + \pi(n - N_{\text{CH}}) - (-\pi N_{\text{AP}} + \pi(n - N_{\text{AP}})) = 2\pi(N_{\text{AP}} - N_{\text{CH}})$$

Quindi, tenendo conto della formula iniziale e che $\mathcal{N}_0 = \Delta_\varphi(\cdot)/(2\pi)$ è il numero di giri (contati positivamente in senso antiorario) che si compie attorno all'origine quando ω va da $-\infty$ a $+\infty$, avremo:

$$N_{\text{CH}} = N_{\text{AP}} - \mathcal{N}_0(1 + W_{\text{AP}}(j\omega))$$

Se trasliamo di -1 la curva relativa a $1 + W_{\text{AP}}(j\omega)$ possiamo ragionare in termini di \mathcal{N}_{-1} ossia di giri che la curva $W_{\text{AP}}(j\omega)$ compie attorno al punto $-1 + j0$ (curva che prende il nome di **diagramma polare** della funzione di trasferimento), il che ci porta alla formulazione finale del **Criterio di Nyquist**: *dato un sistema a controreazione unitaria, nel caso di assenza di radici a parte reale nulla per il polinomio caratteristico del sistema a ciclo aperto, il numero di radici a parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso è uguale al numero di radici a parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema a ciclo aperto - il numero di giri (positivi in*

senso antiorario) che la funzione di trasferimento a ciclo aperto $W_{AP}(j\omega)$ compie attorno al punto $-1 + j0$ per ω che si muove da $-\infty$ a $+\infty$

$$N_{CH} = N_{AP} - \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega))$$

Un modo per contare il numero di giri del diagramma polare (o di una generica curva chiusa orientata) attorno ad un punto consiste nel considerare le intersezioni della curva con una semiretta uscente dal punto. Le intersezioni sono positive se concordi con il verso antiorario di rotazione, altrimenti sono negative: la somma algebrica delle intersezioni restituisce il numero di giri. Si noti che ai fini del conteggio non ha importanza la direzione della semiretta uscente.

Qualora il diagramma polare passasse per il punto $-1 + j0$, vuol dire che il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso ha almeno una radice a parte reale nulla. In questi casi si segue la seguente procedura:

- 1) si deforma il diagramma polare in modo da lasciare $-1 + j0$ a sinistra dell'intersezione del semiasse reale negativo, concordemente con il verso crescente delle pulsazioni. Applicando il criterio di Nyquist in questo modo si ottiene il numero delle radici a parte reale positiva;
- 2) quindi, si deforma il diagramma polare in modo da lasciare $-1 + j0$ a destra dell'intersezione del semiasse reale negativo, concordemente con il verso crescente delle pulsazioni. Applicando il criterio di Nyquist in questo modo si ottiene il numero delle radici a parte reale positiva o nulla;
- 3) dalla loro differenza si ricava anche il numero delle radici del polinomio caratteristico a ciclo chiuso a parte reale nulla.

6.2.2 Diagrammi polari

Per l'applicazione del Criterio di Nyquist è, dunque, fondamentale tracciare il **diagramma polare** della funzione di trasferimento, ossia la rappresentazione parametrica nel piano complesso della funzione di trasferimento $W(s)$, calcolata in $s = j\omega$, al variare della pulsazione $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Tale diagramma è orientato nel senso crescente delle pulsazioni. In particolare, la funzione di trasferimento può essere interpretata come quella funzione complessa ad argomento complesso che trasforma la curva $s = j\omega$, asse immaginario del piano di complesso, nella curva $W(j\omega)$, il diagramma polare appunto. Riguardo alle proprietà di una generica trasformazione di variabile complessa, si riporta la seguente proposizione: *una trasformazione di variabile complessa applicata ad una curva del piano di complesso che non contiene (eventuali) singolarità della trasformazione è una curva chiusa.* per cui è possibile fare le seguenti considerazioni:

- la funzione di trasferimento è un rapporto proprio di polinomi, per cui i suoi punti di singolarità sono costituiti dai poli;
- il diagramma polare è una curva chiusa del piano complesso se l'asse immaginario non passa per i poli della funzione di trasferimento, ossia se l'insieme dei poli di $W(s)$ non contiene numeri complessi puramente immaginari;
- il diagramma polare è una curva chiusa se il denominatore non presenta termini monomi o trinomi non smorzati ($\zeta = 0$).

Per disegnare i diagrammi polari, è consigliabile utilizzare il seguente approccio:

- 1) si utilizzano i diagrammi di Bode per tracciare la curva relativa alle pulsazioni positive: $\omega \in (0, +\infty)$;
- 2) poiché la funzione di trasferimento è a coefficienti reali, si ha che $W(-j\omega)$ è uguale al complesso coniugato di $W(j\omega)$:

$$W(-j\omega) = W(j\omega)^*$$

Dunque, per disegnare il diagramma polare in corrispondenza delle pulsazioni negative, si simmetrizza rispetto all'asse reale la curva tracciata per pulsazioni positive;

- 3) a meno di particolari specifiche, non è necessario disegnare il diagramma polare facendo particolare attenzione alla metrica adottata: ciò che conta nel disegno è indicare gli attraversamenti degli assi coordinati e i giri che il diagramma fa attorno ad alcuni punti del piano complesso.

6.2.3 Esempi di diagrammi polari senza poli immaginari

Partiamo da un caso estremamente semplice:

$$W_{AP}(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

Dai diagrammi di Bode segue che per $\omega = 0^+$ le ampiezze valgono 1 con fase nulla; al crescere di ω le ampiezze si riducono in modo monotono verso 0, e le fasi decrescono in modo monotono verso $-\pi/2$. Per cui il diagramma polare per le ω positive è quello descritto in Figura 6.2.3.1. Aggiungendo la parte simmetrica rispetto all'asse reale, otteniamo il diagramma polare completo in Figura 6.2.3.2. Applicando il criterio di Nyquist (il punto rosso nelle Figure 6.2.3.1 e 6.2.3.2 indica il punto $-1 + j0$), abbiamo

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 0$$

Dunque, stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso.

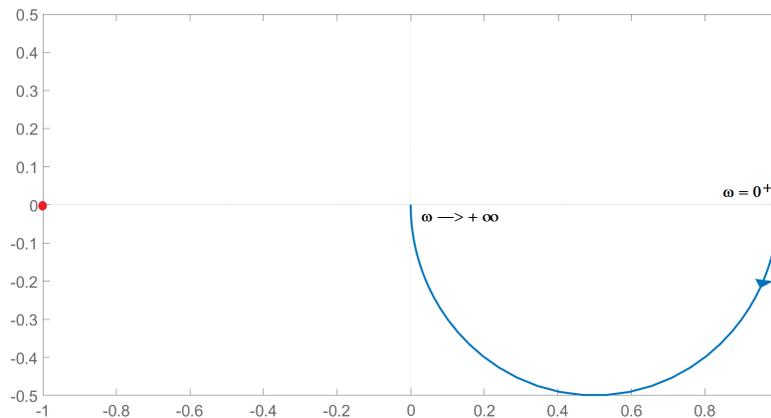


Figura 6.2.3.1 - Diagramma polare di $\frac{1}{1+\tau s}$ per pulsazioni positive

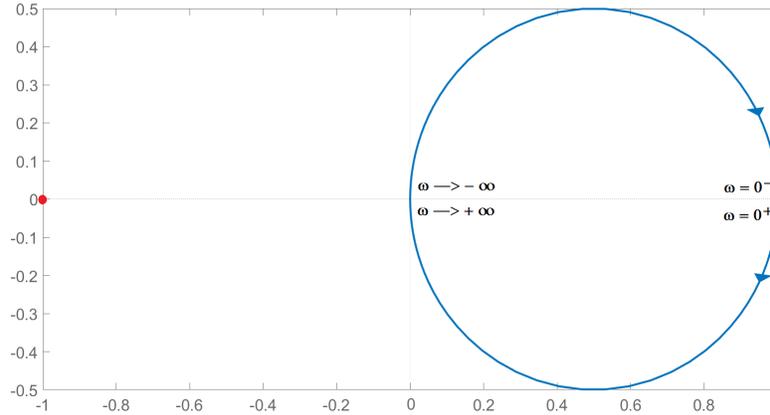


Figura 6.2.3.2 - Diagramma polare di $\frac{1}{1+\tau s}$

Se avessimo considerato

$$W_{AP}(s) = \frac{1}{1 - \tau s}$$

il diagramma polare sarebbe stato speculare rispetto all'asse dei reali (perché le fasi aumentano di $\pi/2$ invece di diminuire $-\pi/2$). Da cui, applicando il criterio di Nyquist

$$N_{AP} = 1, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 1$$

Dunque, instabilità del sistema a ciclo chiuso, con 1 polo a parte reale positiva.

Consideriamo ora un termine trinomio al denominatore, del tipo:

$$W_{AP}(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \zeta = 0.1$$

Dai diagrammi di Bode segue che per $\omega = 0^+$ le ampiezze valgono 1 con fase nulla; al crescere di ω , poiché $\zeta = 0.1 < 0.5$, le ampiezze aumentano raggiungendo un massimo in corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega_n$, per poi andare definitivamente a 0; invece, le fasi decrescono in modo monotono verso $-\pi$. Per cui il diagramma polare per le ω positive è quello descritto in Figura 6.2.2.3. Aggiungendo la parte simmetrica rispetto all'asse reale, otteniamo il diagramma polare completo in Figura 6.2.2.4. Applicando il criterio di Nyquist, abbiamo

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 0$$

Dunque, stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso.

Se avessimo considerato

$$W_{AP}(s) = \frac{1}{1 - \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

il diagramma polare sarebbe stato speculare rispetto all'asse dei reali (perché le fasi aumentano di π invece di diminuire di $-\pi$). Da cui, applicando il criterio di Nyquist

$$N_{AP} = 2, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 2$$

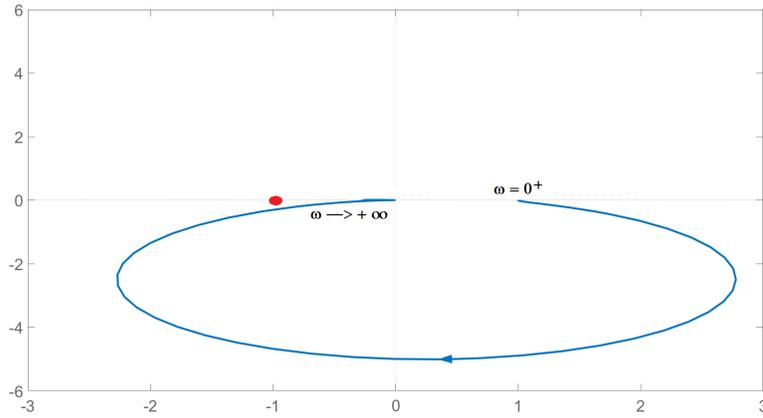


Figura 6.2.3.3 - Diagramma polare di $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$ per pulsazioni positive

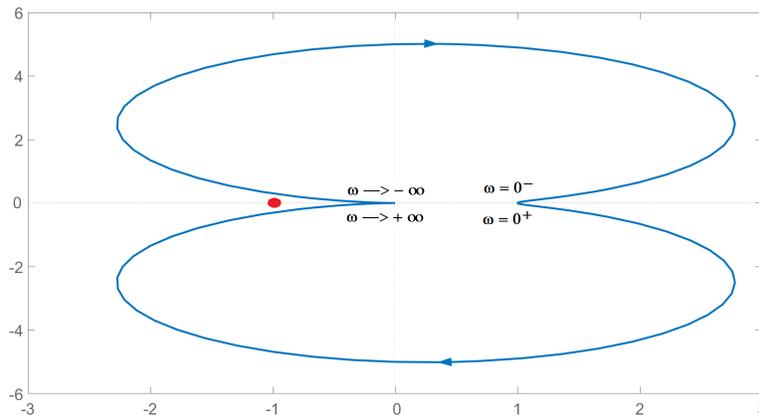


Figura 6.2.3.4 - Diagramma polare di $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

Dunque, instabilità del sistema a ciclo chiuso, con 2 poli a parte reale positiva.

Esempio del paragrafo 4.5.6. Riportiamo per comodità la funzione di trasferimento di cui abbiamo disegnato i diagrammi di Bode nel paragrafo 4.5.6

$$W_{AP}(s) = \frac{2000(10 - s)^2}{(s + 100)(s + 500)(s^2 + 2s + 4)}.$$

Per $\omega \mapsto 0^+$ il diagramma parte dal punto $(1, 0)$, sul semiasse reale positivo del piano complesso. I moduli decrescono dal valore iniziale fino a zero ($-\infty$ in dB). La fase decresce passando per $-\frac{\pi}{2}$ radianti (primo attraversamento del semiasse immaginario negativo), per $-\pi$ radianti, per $-\frac{3}{2}\pi$ radianti (attraversamento del semiasse immaginario positivo), per -2π radianti (secondo attraver-

samento del semiasse reale positivo), per $-\frac{5}{2}\pi$ radianti (secondo attraversamento del semiasse immaginario negativo) e, infine, si assesta asintoticamente a -3π radianti, ossia il diagramma termina nell'origine (modulo pari a zero) tangendo il semiasse reale negativo (fase pari a $-\pi$ radianti), vedi Figura 6.2.3.5. Simmetrizzando la curva rispetto all'asse reale, si tiene conto anche delle pulsazioni negative e si ottiene il diagramma polare completo, Figura 6.2.3.6.

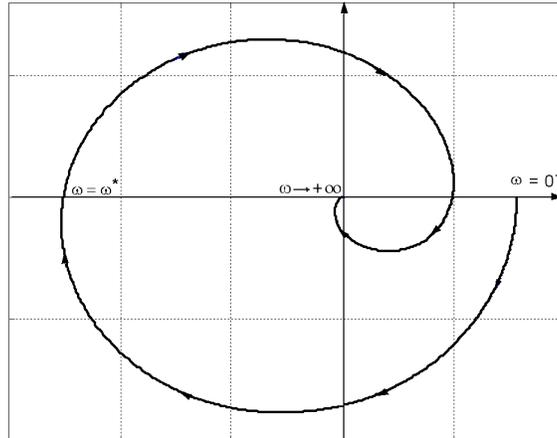


Figura 6.2.3.5 - Diagramma polare per pulsazioni positive

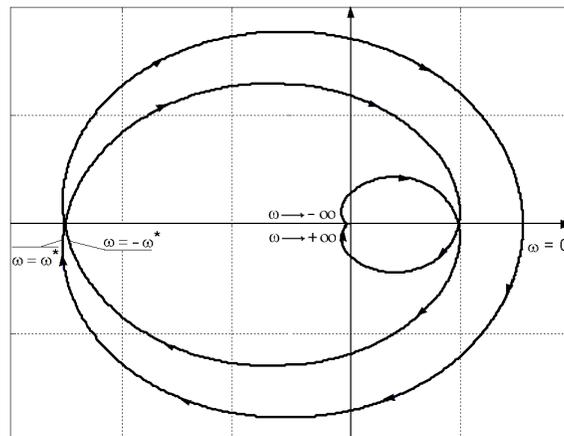


Figura 6.2.3.6 - Diagramma polare

Dal diagramma polare segue che è importante conoscere se il punto $-1 + j0$ è interno o esterno al diagramma polare. Se fosse interno avremmo che il diagramma polare fa 2 giri in senso orario, dunque

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = -2 \quad \implies \quad N_{CH} = 0 - (-2) = 2$$

Il sistema a ciclo chiuso non sarebbe stabile, perché avrebbe due poli a parte reale positiva. Invece,

se il punto $-1 + j0$ fosse esterno, avremmo 0 giri del diagramma polare intorno a $-1 + j0$, per cui:

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 0$$

e il sistema a ciclo chiuso sarebbe asintoticamente stabile.

Da quanto scritto segue che è fondamentale capire quanto vale il modulo della W_{AP} in corrispondenza della pulsazione di attraversamento a $-\pi$. Guardando i diagrammi di Bode di Figura 4.5.6.1, tale attraversamento si ha per un $\omega^* \in [3, 4]$ rad/sec, con le ampiezze attenuate di circa 10dB, ossia:

$$|W_{AP}(j\omega^*)| < 1$$

il che assicura che il punto $-1 + j0$ è esterno al diagramma polare, il che implica stabilità asintotica.

6.2.4 Presenza di radici a parte reale nulla nel polinomio a ciclo aperto

Nel caso di poli puramente immaginari, il diagramma polare, così come è stato definito, non è chiuso. Per poter avere un diagramma chiuso è necessario, dunque, modificare il percorso dell'asse immaginario. Si scelga come percorso alternativo il *percorso uncinato*, che lascia le singolarità a sinistra (in Figura 6.2.4.1 si suppone la presenza di 3 poli puramente immaginari, di cui uno nell'origine). Tale percorso, in prossimità delle singolarità, si scosta da quello dell'asse immaginario su archi di curva di raggio infinitesimo, cosicché la chiusura del diagramma avvenga su archi di curva di raggio grande a piacere. Si parla, in questo caso di *chiusura all'infinito*: essa deve essere percorsa in modo che si lasci la singolarità (l'infinito nel diagramma polare) a sinistra, per cui deve essere sempre percorsa in *senso orario*. Utilizzando tale percorso uncinato si ottengono una o più chiusure all'infinito, in modo da poter nuovamente calcolare il numero di giri attorno al punto $-1 + j0$.

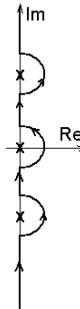


Figura 6.2.4.1 - Percorso a uncino

Esempio del paragrafo 4.5.5. Riportiamo per comodità la funzione di trasferimento di cui abbiamo disegnato i diagrammi di Bode nel paragrafo 4.5.5:

$$W_{AP}(s) = \frac{10^6}{s(s+10)^2(s-400)^2}$$

La funzione di trasferimento ha un polo nell'origine, per cui il diagramma polare non è una curva chiusa. Per valori di $\omega \mapsto 0^+$, l'ampiezza è infinita e la fase è $-\frac{\pi}{2}$ radianti: il diagramma polare parte

tangendo all'infinito il semiasse immaginario negativo. Quindi, con un decrescente andamento dei moduli, si sposta dal terzo al secondo quadrante del piano complesso, tagliando una prima volta il semiasse reale negativo. Nel secondo quadrante la fase continua a decrescere fino a un valore minimo, maggiore comunque di $-\frac{3}{2}\pi$ radianti. Quindi inverte il proprio andamento, aumentando fino a tagliare una seconda volta il semiasse reale negativo, proseguendo, di nuovo nel terzo quadrante, verso l'origine degli assi, tangendo asintoticamente il semiasse immaginario negativo per $\omega \mapsto +\infty$, Figura 6.2.4.2. Il diagramma si completa aggiungendo il percorso parametrizzato dalle pulsazioni negative (Figura 6.2.4.3). La presenza di un polo nell'origine determina un diagramma polare non chiuso. Per ottenere un diagramma chiuso, si effettua la chiusura all'infinito della curva in senso orario, raccordando il punto a pulsazione $\omega = 0^-$ con quello a pulsazione $\omega = 0^+$ utilizzando un arco con raggio di curvatura grande a piacere, Figura 6.2.4.4.

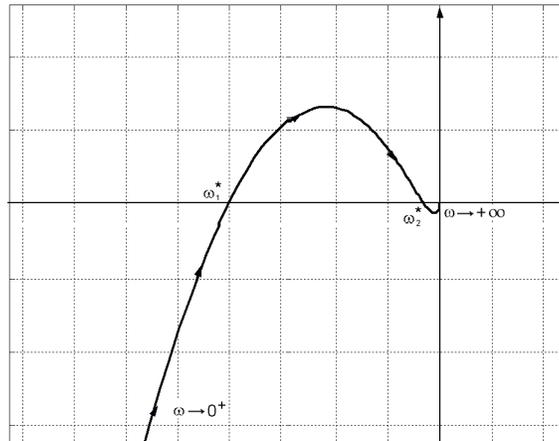


Figura 6,2.4.2 - Diagramma polare, pulsazioni positive

Dal diagramma polare chiuso segue che si possono avere 3 possibilità per il punto $-1 + j0$:

1) esterno alla curva. In questo caso $\mathcal{N}_{-1} = 0$ e accade se

$$|W(j\omega_1^*)| < 1$$

2) interno alla curva, tra i punti P_1 e P_2 . In questo caso $\mathcal{N}_{-1} = -2$ e accade se

$$|W(j\omega_2^*)| < 1 < |W(j\omega_1^*)|$$

3) interno alla curva, tra il punto P_2 e l'origine. In questo caso $\mathcal{N}_{-1} = 0$ e accade se

$$|W(j\omega_2^*)| > 1$$

Guardando i diagrammi di Bode di Figura 4.5.5.1, abbiamo che il primo attraversamento a $-\pi$ c'è per $\omega_1^* \simeq 10\text{rad/sec}$, a cui corrisponde un'attenuazione di circa 50dB; il secondo attraversamento si ottiene per $\omega_2^* \simeq 400\text{rad/sec}$, a cui corrisponde un'attenuazione di circa 150dB. Riassumendo:

$$|W(j\omega_2^*)| < |W(j\omega_1^*)| < 1$$

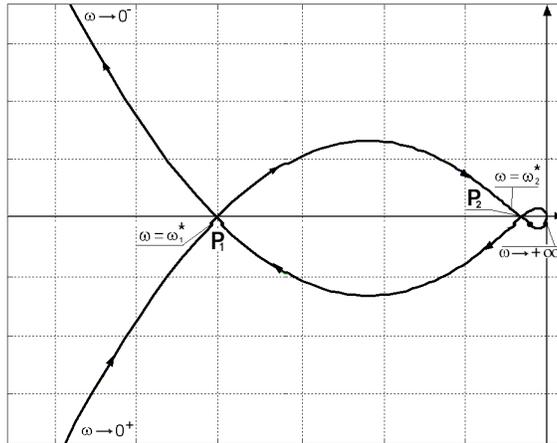


Figura 6.2.4.3 - Diagramma polare completo

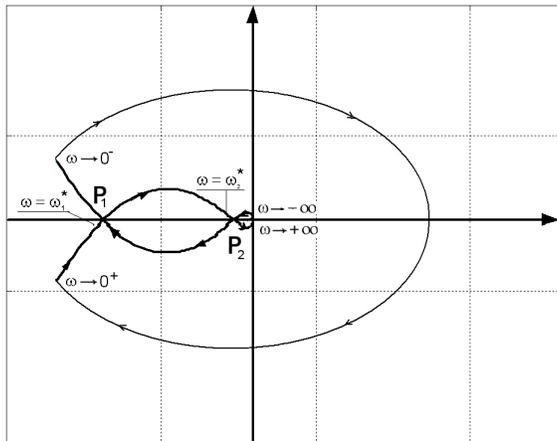


Figura 6.2.4.4 - Diagramma polare, chiusura all'infinito

il che porta alla conclusione che

$$N_{AP} = 2, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 2$$

Il sistema è instabile con 2 poli a parte reale positiva.

Esempio del paragrafo 4.5.7. Riportiamo per comodità la funzione di trasferimento, di cui abbiamo disegnato i diagrammi di Bode nel paragrafo 4.5.7.

$$W(s) = \frac{1440(2 - 5s)}{(4 + 5s)^2(36 + s^2)}$$

La funzione di trasferimento ha una coppia di poli puramente immaginari (termine trinomio non smorzato $s^2 + 36$), per cui vi sono due chiusure all'infinito. Per $\omega \mapsto 0^+$, il diagramma polare

parte dal punto $(5, 0)$ del semiasse reale positivo. Quindi con lievi variazioni del modulo, il diagramma ruota in senso orario attraversando il quarto, il terzo e il secondo quadrante. In prossimità della pulsazione di risonanza il modulo diverge all'infinito, generando così un asintoto obliquo nel diagramma polare, Figura 6.2.4.5.

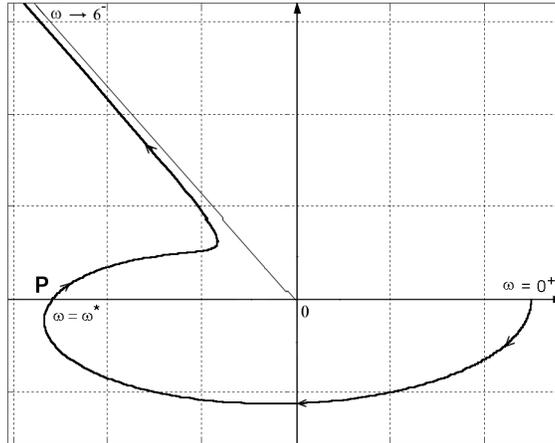


Figura 6.2.4.5 - Diagramma polare per $0 < \omega < 6$.

Nel passare oltre la pulsazione di risonanza, il diagramma delle fasi subisce uno sfasamento a gradino di $-\pi$ radianti: il diagramma polare, dunque, riprende con ampiezza infinita dall'altro capo dell'asintoto. Per pulsazioni maggiori di 6 rad/sec , al crescere di ω , il modulo tende rapidamente a zero e le fasi convergono asintoticamente a $-\frac{\pi}{2}$ radianti, cosicché il diagramma polare converge nell'origine degli assi, tangendo il semiasse immaginario negativo, Figura 6.2.4.6.

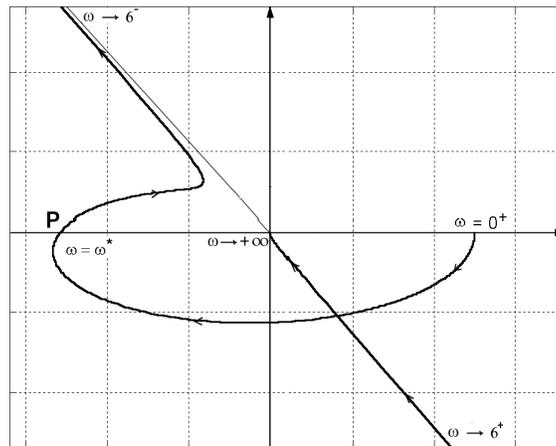


Figura 6.2.4.6 - Diagramma polare per pulsazioni positive.

Per ottenere una curva chiusa, il percorso uncinato aggira le singolarità raccordando i punti a

pulsazione 6^- e 6^+ con una chiusura all'infinito percorsa in senso orario, Figura 6.2.4.7.

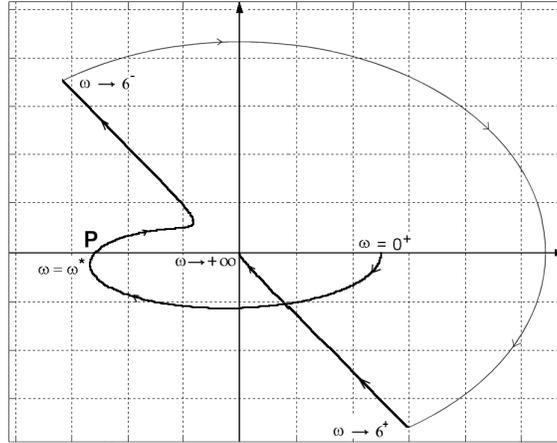


Figura 6.2.4.7 - Diagramma polare, prima chiusura all'infinito.

Per ottenere la curva polare rispetto alle pulsazioni negative, si simmetrizza il diagramma di Figura 6.2.4.7 rispetto all'asse reale. La seconda chiusura all'infinito si ottiene in corrispondenza della pulsazione $\omega = -6\text{rad/sec}$, Figura 6.2.4.8.

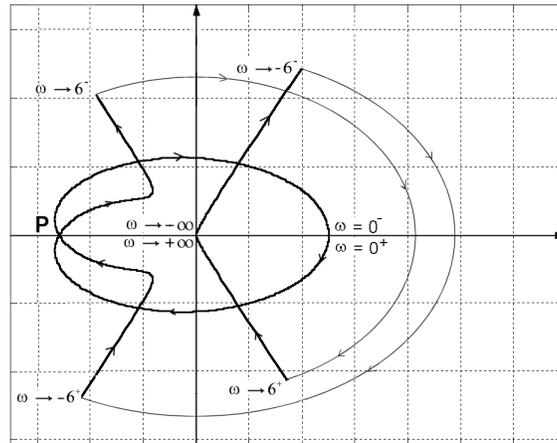


Figura 6.2.4.8 - Diagramma polare, seconda chiusura all'infinito

Dal diagramma polare segue che il punto $-1 + j0$ può essere interno o esterno, a seconda che $|W(j\omega^*)|$ sia maggiore o minore di 1. Dal diagramma di Bode di Figura 4.5.7.1 segue che l'attraversamento a $-\pi$ si ha in corrispondenza di una pulsazione $\omega^* \simeq 1\text{rad/sec}$, a cui corrisponde un'amplificazione di poco superiore ai 5dB. Da cui segue che il punto $-1 + j0$ è interno, e quindi, applicando il Criterio di Nyquist:

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = -2 \quad \implies \quad N_{CH} = 2$$

Il sistema a ciclo chiuso è instabile, con 2 poli a parte reale positiva.

6.3 Margini di stabilità

È interessante, ai fini della stabilità, valutarne l'analisi al variare dei parametri che costituiscono la funzione di trasferimento. In particolare, è significativo il caso in cui il solo parametro che varia è il guadagno di Bode in catena aperta. Questa situazione rappresenta, ad esempio, un sistema a controreazione, la cui azione di controllo (la funzione di trasferimento $C(s)$ in Figura 6.1) sia rappresentata dal solo guadagno K . Analizzando il diagramma polare della funzione di trasferimento a catena aperta, all'aumentare del guadagno K la curva si "espande" mantenendo inalterate le forme, in quanto è solo l'ampiezza del raggio vettore che cresce uniformemente per ogni valore delle fasi. Ragionando in altri termini, si può pensare di tenere fisso il diagramma (costruito, ad esempio, per $K = 1$) riducendo la scala degli assi coordinati al crescere di K .

Un sistema a controreazione di questo tipo si dice **a stabilità regolare** se esiste un solo valore critico positivo del parametro K al crescere del quale si perde la stabilità (questa classe di sistemi ha sicuri riscontri nella realtà, in quanto è plausibile la perdita di stabilità al crescere del guadagno in catena aperta). Un esempio significativo per questa classe di sistemi è costituito da un sistema già stabile in catena aperta ($P_{AP} = 0$), con il diagramma polare che ha un solo attraversamento a $-\pi$: la stabilità è garantita se il punto $-1 + j0$ è esterno al diagramma, ossia se il guadagno in catena aperta è così contenuto da far sì che in corrispondenza della pulsazione ω^* di intersezione con il semiasse reale negativo, la funzione di trasferimento sia in modulo < 1 . Sia $W_{AP}(s) = KF(s)$. Allora:

$$|W_{AP}(j\omega^*)| < 1, \quad \implies \quad K < K^* = \frac{1}{|F(j\omega^*)|}$$

Per i sistemi a stabilità regolare è possibile stabilire anche dei margini a garanzia della stabilità del sistema a ciclo chiuso in presenza di eventuali variazioni o incertezze sugli altri parametri che costituiscono la funzione di trasferimento. Si definisce **margine di guadagno** la grandezza (vedi Figura 6.3.1):

$$m_g = \frac{1}{|W_{AP}(j\omega^*)|}, \quad \text{con} \quad \angle W_{AP}(j\omega^*) = -\pi$$

Come si può notare, il margine di guadagno è > 1 se, e solo se, il sistema a ciclo chiuso è stabile e al crescere di tale margine l'intersezione del diagramma polare con il semiasse reale negativo si allontana progressivamente dal punto critico $-1 + j0$, cosicché la condizione di stabilità è robusta rispetto ad eventuali incertezze sul modello. Altra osservazione è che per valori di $K > 0$, la pulsazione ω^* non varia al variare di K perché non variano le fasi: ovviamente, varierà il modulo della funzione di trasferimento in catena aperta valutato in ω^* . Per come è definito, il margine di guadagno può essere facilmente individuato anche sui diagrammi di Bode, Figura 6.3.2:

$$|m_g|_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{|W_{AP}(j\omega^*)|} = -|W_{AP}(j\omega^*)|_{\text{dB}}$$

Un modo alternativo per assegnare un margine di stabilità per i sistemi a stabilità regolare consiste nel considerare l'angolo individuato dal semiasse reale negativo e la semiretta uscente dall'origine e passante per il punto del diagramma polare di modulo unitario, Figura 6.3.3. Tale angolo, detto *margine di fase*, si definisce come segue:

$$m_\varphi = \angle W(j\bar{\omega}) + \pi, \quad \text{con} \quad |W(j\bar{\omega})| = 1,$$

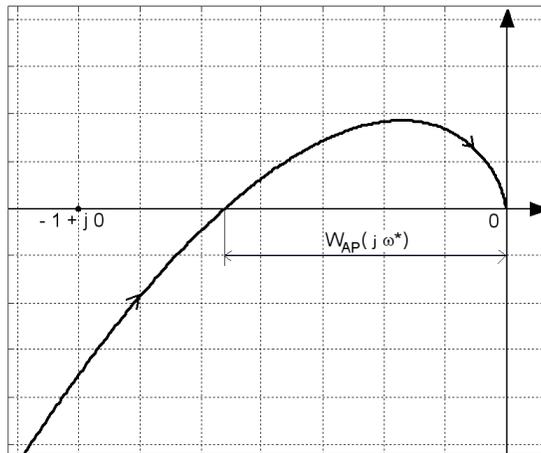


Figura 6.3.1 - Margine di guadagno sul diagramma polare

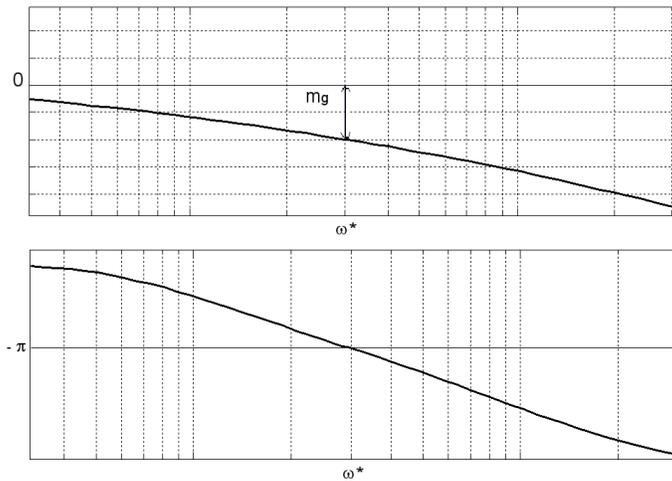


Figura 6.3.2 - Margine di guadagno sui diagrammi di Bode

ed è positivo (a meno di multipli di 2π) se il sistema a ciclo chiuso è stabile. Anche il margine di fase è facilmente individuabile sui diagrammi di Bode, vedi Figura 6.3.4.

Esempio dal paragrafo 4.5.6. Consideriamo la funzione di trasferimento di cui abbiamo disegnato i diagrammi di Bode nel paragrafo 4.5.6

$$W_{AP}(s) = K \cdot \frac{2000(10 - s)^2}{(s + 100)(s + 500)(s^2 + 2s + 4)}$$

e di cui abbiamo analizzato la stabilità nel paragrafo 6.2.3. K è il guadagno relativo al controllore $C(s) = K$. Si tratta chiaramente di un sistema a stabilità regolare, perché si perde la stabilità al

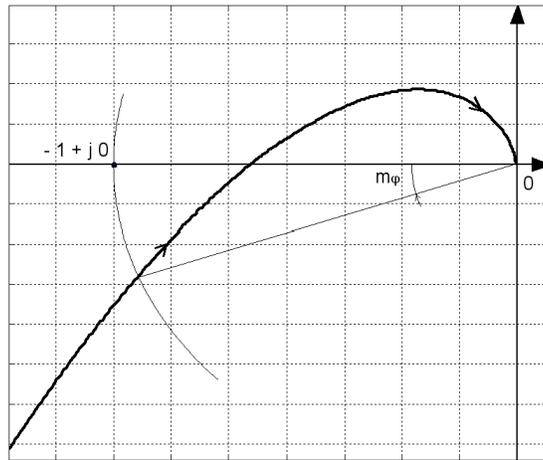


Figura 6.3.3 - Margine di fase sul diagramma polare

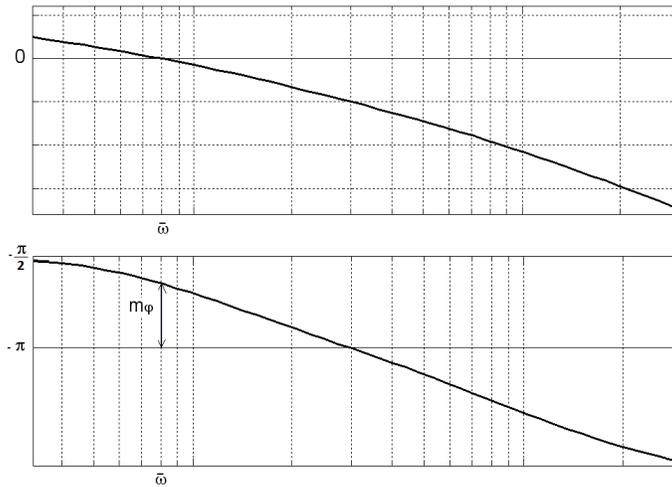


Figura 6.3.4 - Margine di fase sui diagrammi di Bode

crescere del guadagno K in catena aperta. Supponiamo si voglia settare K in modo da garantire un margine di guadagno $|m_g|_{\text{dB}} > 10\text{dB}$. Quindi:

$$|m_g|_{\text{dB}} = -|K|_{\text{dB}} - |W(j\omega^*)|_{\text{dB}} > 10\text{dB} \quad \implies \quad |K|_{\text{dB}} < -|W(j\omega^*)|_{\text{dB}} - 10\text{dB}$$

Dai diagrammi di Bode di Figura 4.5.6.1 esce fuori che $|W(j\omega^*)|_{\text{dB}} \simeq -10\text{dB}$ (o comunque $|W(j\omega^*)|_{\text{dB}} > 0\text{dB}$) per cui, in via approssimativa possiamo scegliere

$$|K|_{\text{dB}} < 0\text{dB}$$

da cui $K < 1$; oppure, in via cautelativa, imponiamo

$$|K|_{\text{dB}} < -10\text{dB}$$

da cui

$$20 \log(K) < -10 \quad \implies \quad K < 10^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.3$$

Esempio dal paragrafo 4.5.7. Consideriamo la funzione di trasferimento di cui abbiamo disegnato i diagrammi di Bode nel paragrafo 4.5.7

$$W(s) = \frac{1440(2 - 5s)}{(4 + 5s)^2(36 + s^2)}$$

e di cui abbiamo analizzato la stabilità nel paragrafo 6.2.4. K è il guadagno relativo al controllore $C(s) = K$. Anche in questo caso si tratta di un sistema a stabilità regolare, perché si perde definitivamente la stabilità al crescere del guadagno K in catena aperta. Supponiamo si voglia settare K in modo da garantire un margine di guadagno $|m_g|_{\text{dB}} > 100\text{dB}$. Quindi:

$$|m_g|_{\text{dB}} = -|K|_{\text{dB}} - |W(j\omega^*)|_{\text{dB}} > 100\text{dB} \quad \implies \quad |K|_{\text{dB}} < -|W(j\omega^*)|_{\text{dB}} - 100\text{dB}$$

Dai diagrammi di Bode di Figura 4.5.7.1 esce fuori che $|W(j\omega^*)|_{\text{dB}} \simeq 5\text{dB}$ per cui, in via approssimativa possiamo scegliere

$$|K|_{\text{dB}} < -105\text{dB}$$

da cui

$$20 \log(K) < -105 \quad \implies \quad K < 10^{-\frac{21}{4}} \simeq 5.6 \cdot 10^{-6}$$

6.3.1 Reti anticipatrici per aumentare il margine di fase

6.4 Il criterio di Routh per sistemi in controreazione unitaria

Ovviamente, il Criterio di Routh resta un'alternativa al Criterio di Nyquist, proprio perché più generale. La sua applicazione, però, sottende la costruzione del polinomio al denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso. A tale scopo si faccia riferimento allo schema di Figura 6.1.2 con il feedback a controreazione unitaria (si è già visto che non è una perdita di generalità).

$$W_{\text{CH}}(s) = \frac{W_{\text{AP}}(s)}{1 + W_{\text{AP}}(s)} = \frac{\text{Num}_{\text{AP}}(s)}{\text{Den}_{\text{AP}}(s) + \text{Num}_{\text{AP}}(s)}$$

da cui il polinomio al denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso è:

$$d_{\text{CH}}(s) = \text{Den}_{\text{AP}}(s) + \text{Num}_{\text{AP}}(s)$$

Esempio. Consideriamo il sistema a controreazione unitaria con la funzione di trasferimento in catena aperta pari a

$$W_{\text{AP}} = \frac{K(1 - s)}{s(1 + 10s)}$$

La funzione di trasferimento in catena chiusa avrà il seguente denominatore:

$$d_{\text{CH}}(s) = 10s^2 + (1 - K)s + K$$

Applicando il Criterio di Routh:

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 10 & K \\ 1 & 1 - K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Da cui, per avere solo permanenze di segno in prima colonna deve essere

$$0 < K < 1$$

Il sistema è a stabilità reglare, perché per valori troppo grandi del guadagno K si perde la stabilità.

7 Caratterizzazione dei sistemi di controllo a controreazione per sistemi SISO

In questa sezione sono discusse quali sono le specifiche di controllo maggiormente richieste e le tecniche per realizzarle per sistemi a controreazione. La teoria si sviluppa per sistemi lineari stazionari a tempo continuo e, per semplicità di trattazione, ci si limita al caso di sistemi Single Input Single Output (SISO).

Fermo restando la specifica sulla stabilità, di cui si è ampiamente parlato nella sezione precedente, altre importanti specifiche sono la **fedeltà di risposta** e la **reiezione dei disturbi**.

7.1 Fedeltà di risposta

La fedeltà di risposta riguarda la necessità di riprodurre in uscita un segnale che sia una replica (più o meno) esatta di un segnale desiderato. Generalmente questo tipo di problema non ha soluzione, a causa della complessità del problema. Per questo motivo ci si accontenta di ottenere la fedeltà di risposta rispetto a determinate caratteristiche dell'uscita. Nei prossimi paragrafi si approfondirà la questione per le risposte rispetto a specifici segnali di ingresso. Tuttavia, in fase di investigazione preliminare è utile svolgere la seguente considerazione. Consideriamo il sistema a controreazione descritto nella Figura 6.1. Ipotizziamo di poter scrivere la funzione di trasferimento a ciclo aperto come:

$$W_{AP}(s) = C(s)F(s) = KG(s)$$

con il guadagno di Bode in catena aperta K che gioca il ruolo del parametro di controllo. Ad esempio si può pensare a $C(s) = K$, ossia a un sistema di controllo realizzato da un semplice guadagno K . Quindi, la funzione di trasferimento a ciclo chiuso diventa:

$$W_{CH}(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Se ipotizziamo che la funzione di trasferimento del trasduttore sia anch'essa un semplice guadagno $H(s) = H$, avremo, al crescere del guadagno in catena aperta K :

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} W_{CH}(s) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{KG(s)}{1 + KHG(s)} = \frac{1}{H}$$

Per cui, al crescere del guadagno in catena aperta, l'uscita forzata tende ad essere una replica dell'ingresso moltiplicato per la costante $1/H$. Se si riuscisse a settare il guadagno di trasduzione

a piacimento, aumentando *ad libitum* il guadagno in catena aperta, la risposta forzata del sistema sarebbe esattamente proporzionale all'ingresso desiderato (e non solo a regime), qualunque esso sia. Questo esempio sottolinea i vantaggi dell'uso del feedback, ma al tempo stesso non deve essere fuorviante: nella sezione precedente abbiamo visto come aumentare troppo il guadagno in catena aperta fa perdere la stabilità dei sistemi a stabilità regolare, per cui la scelta di K sarà la risultante del giusto compromesso, come vedremo nei paragrafi successivi.

7.1.1 Fedeltà di risposta a ingressi canonici di tipo k

Focalizziamo l'attenzione sulla risposta a regime permanente (dunque, si stanno implicitamente considerando i sistemi asintoticamente stabili): lo studio è semplificato dal fatto che l'uscita non dipende dalle condizioni iniziali. Inoltre, per classi particolari di segnali (ingressi costanti, rampe lineari, rampe polinomiali, esponenziali, armoniche) l'uscita a regime si sa calcolare abbastanza facilmente, e questo semplifica notevolmente i conti.

In particolare, consideriamo ingressi polinomiali di ordine k (anche detti **canonici di tipo k**):

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}$$

Abbiamo già visto nel Paragrafo 4 come la risposta a regime permanente a un tale ingresso polinomiale sia a sua volta un polinomio generico, del tipo

$$y_{\text{reg}}(t) = C_0 \frac{t^k}{k!} + C_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + C_{k-1}t + C_k$$

Per calcolare i valori dei coefficienti C_j , $j = 0, 1, \dots, k$, consideriamo la definizione di risposta a regime permanente

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) \frac{\tau^k}{k!} d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^k}{k!} d\theta$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene facilmente che:

$$C_k = \lim_{t \rightarrow 0} y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^k}{k!} d\theta = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{+\infty} W(\theta) \theta^k d\theta$$

$$C_{k-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy_{\text{reg}}(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^{k-1}}{(k-1)!} d\theta = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} W(\theta) \theta^{k-1} d\theta$$

e così via generalizzando:

$$C_j = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{k-j} y_{\text{reg}}(t)}{dt^{k-j}} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^j}{j!} d\theta = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} W(\theta) \theta^j d\theta$$

fino a

$$C_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{k-1} y_{\text{reg}}(t)}{dt^{k-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) (t-\theta) d\theta = - \int_0^{+\infty} W(\theta) \theta d\theta$$

$$C_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k y_{\text{reg}}(t)}{dt^k} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) d\theta = \int_0^{+\infty} W(\theta) d\theta$$

Ragionando a ritroso, è possibile associare questi coefficienti alla trasformata di Laplace della funzione di trasferimento:

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[W(t)] = W(s=0)$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} W(t)e^{-st} dt = \left. \frac{dW(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

e, generalizzando

$$C_j = \left. \frac{1}{j!} \frac{d^j W(s)}{ds^j} \right|_{s=0}, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

Ossia i coefficienti C_j sono i coefficienti dello sviluppo di Taylor della funzione di trasferimento $W(s)$ nell'origine:

$$W(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left. \frac{1}{j!} \frac{d^j W(s)}{ds^j} \right|_{s=0} s^j = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j s^j$$

Applichiamo queste regole al caso che ci interessa, ossia alla fedeltà di risposta per ingressi canonici di tipo k , relativamente al regime. Sia $y(t)$ l'uscita di un sistema lineare stazionario a tempo continuo. Tale sistema si dice **di tipo** k se l'errore a regime permanente all'ingresso canonico di tipo k , ossia alla rampa polinomiale $u(t) = t^k/k!$ differisce dall'uscita desiderata

$$y_{\text{des}}(t) = K_d \frac{t^k}{k!}$$

per una quantità costante e diversa da zero. Se consideriamo il *sistema d'errore* in cui l'uscita è l'errore, ossia la differenza tra l'uscita desiderata e l'uscita del sistema

$$e(t) = y_{\text{des}}(t) - y_{\text{reg}}(t) = C_0^e \frac{t^k}{k!} + C_1^e \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + C_{k-1}^e t + C_k^e$$

da cui avremo che il sistema sarà di tipo k se

$$C_0^e = C_1^e = \dots = C_{k-2}^e = C_{k-1}^e = 0$$

$$C_k^e \neq 0$$

il che ci porta a dire che la funzione di trasferimento $W_e(s)$ del sistema d'errore deve avere uno zero di molteplicità k nell'origine:

$$W_e(s) = \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e s^j = s^k \cdot \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e s^{j-k}$$

In tal caso l'errore a regime vale proprio

$$C_k^e = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k W_e(s)}{ds^k} \right|_{s=0}$$

Inoltre per un sistema di tipo k , l'errore a regime per ingressi canonici di ordine $j < k$ è pari a zero, perché i coefficienti

$$C_0^e, C_1^e, \dots, C_j^e, \quad j < k$$

sono tutti nulli.

Adesso vediamo come si ripercuotono queste informazioni nel caso in cui il sistema di tipo k sia il sistema a ciclo chiuso di Figura 6.1. A tale scopo, ipotizziamo che il sistema di trasduzione in feedback sia il seguente sistema istantaneo

$$H(s) = \frac{1}{K_d}$$

Allora, la funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso sarà:

$$W_{\text{CH}}(s) = \frac{W_{\text{AP}}(s)}{1 + W_{\text{AP}}(s)/K_d} = \frac{K_d W_{\text{AP}}(s)}{K_d + W_{\text{AP}}(s)}$$

e quella del sistema d'errore sarà:

$$W_e(s) = K_d - \frac{K_d W_{\text{AP}}(s)}{K_d + W_{\text{AP}}(s)} = \frac{K_d^2}{K_d + W_{\text{AP}}(s)}$$

Se distinguiamo numeratore e denominatore della funzione di trasferimento in catena aperta $W_{\text{AP}}(s) = N_{\text{AP}}(s)/D_{\text{AP}}(s)$ avremo:

$$W_e(s) = K_d^2 \frac{D_{\text{AP}}(s)}{K_d D_{\text{AP}}(s) + N_{\text{AP}}(s)}$$

Quindi, la funzione di trasferimento del sistema d'errore ha k zeri nell'origine se il denominatore della funzione di trasferimento in catena aperta ha k radici nell'origine, ossia se la funzione di trasferimento a ciclo aperto ha k poli nell'origine.

Riassumendo: *Un sistema a controreazione come quello descritto in Figura 6.1, è un sistema di tipo k (ossia presenta errore nullo a regime rispetto a un ingresso canonico di tipo k e all'uscita desiderata $y_{\text{des}}(t) = K_d t^k / k!$) se la funzione di trasduzione in feedback è $H(s) = 1/K_d$ e ci sono k poli in zero in catena aperta.*

Per calcolare l'errore a regime per sistemi di tipo k , distinguiamo i seguenti due casi. A tale scopo definiamo K_{AP} il guadagno di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta.

- Sistema di tipo $k = 0$. Non c'è bisogno di avere poli nell'origine. In tal caso l'errore a regime è

$$C_0^e = W_e(s=0) = \frac{K_d^2}{K_d + K_{\text{AP}}}$$

- Sistema di tipo $k > 0$. Ci sono k poli nell'origine in catena aperta. Dalla formula

$$W_e(s) = s^k \cdot \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e s^{j-k} = s^k (C_k^e + C_{k+1}^e s + \dots)$$

avremo

$$C_k^e = \left. \frac{W_e(s)}{s^k} \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2}{s^k K_d + s^k W_{\text{AP}}(s)} = \frac{K_d^2}{K_{\text{AP}}}$$

Da ciò segue che, per ridurre l'errore a regime nei sistemi di tipo k bisogna aumentare il guadagno di Bode in catena aperta. Operazione che va fatta con attenzione perché aumentare troppo il guadagno in catena aperta può portare a instabilità.

7.1.2 Fedeltà di risposta a ingressi armonici

Supponiamo di avere un sistema in controreazione descritto dalla Figura 6.1 e consideriamo un ingresso armonico del tipo:

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

Riguardo alla fedeltà di risposta, ossia alla specifica di avere un'uscita desiderata

$$y_{\text{des}}(t) = K_d \sin(\omega t)$$

analogamente ai segnali canonici di tipo k , poniamo $H(s) = 1/K_d$ così che la funzione di trasferimento dell'errore a ciclo chiuso sia

$$W_e(s) = \frac{K_d^2}{K_d + W_{\text{AP}}(s)}$$

Dalle considerazioni sulla risposta armonica, avremo che l'errore a regime sarà:

$$e_{\text{reg}}(t) = |W_e(j\omega)| \sin(\omega t + \angle W_e(j\omega))$$

Un limite superiore per l'errore a regime nella fedeltà di risposta è, dunque, dato da

$$|e_{\text{reg}}(t)| \leq \left| \frac{K_d^2}{K_d + W_{\text{AP}}(j\omega)} \right|$$

Si noti che, anche in questo caso, aumentando il guadagno in catena aperta l'errore a regime si riduce a piacere (con tutti i *caveat* che la stabilità del sistema a ciclo chiuso comporta).

7.1.3 Reiezione di disturbi

Supponiamo di avere un sistema a controreazione, in cui il disturbo $z(t)$ intervenga come indicato in Figura 7.1.3.1.

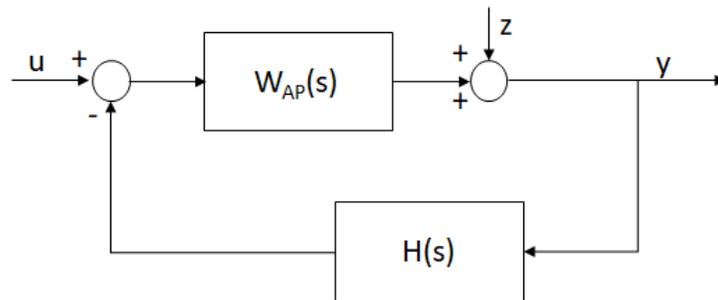


Figura 7.1.3.1 - Disturbo a valle della funzione di trasferimento in catena aperta

Calcoliamo la funzione di trasferimento disturbo/uscita (ossia consideriamo il disturbo come l'ingresso del sistema, ponendo l'ingresso vero pari a zero):

$$Y(s) = Z(s) - W_{\text{AP}}(s)H(s)Y(s) \quad \Rightarrow \quad W_z(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{AP}}(s)H(s)}$$

Analogamente a quanto visto per la fedeltà di risposta, se ipotizziamo di far crescere indefinitamente il guadagno in catena aperta (ossia il guadagno di Bode della $W_{AP}(s)$), la funzione di trasferimento del disturbo va a zero e si avrebbe perfetta reiezione del disturbo. Più semplicemente, ciò che chiediamo è che la risposta a regime permanente a un disturbo costante sia nulla (il sistema in questo caso si dice **astatico**) oppure costante (il sistema si dice **statico**). Nel primo caso, in accordo con quanto visto al paragrafo precedente, la funzione di trasferimento $W_z(s)$ deve avere uno zero nell'origine. Definendo $W_{AP}(s) = N_{AP}(s)/D_{AP}(s)$, avremo che

$$W_z(s) = \frac{D_{AP}(s)}{D_{AP}(s) + N_{AP}(s)H(s)}$$

da cui segue che l'astaticità richiede la presenza di almeno un polo nella funzione di trasferimento in catena aperta. In caso contrario, l'errore a regime sarà pari a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_z(s) = \frac{1}{1 + K_{AP}K_H}$$

Dunque, al crescere del guadagno di Bode in catena aperta, l'errore a regime sul disturbo può rendersi piccolo a piacere (ancora una volta ricordando che il guadagno K_{AP} non può essere aumentato *ad libitum* senza incorrere in problemi di stabilità).

Se, invece, il disturbo si somma a una variabile intermedia in catena aperta come nella Figura 7.1.3.2, la funzione di trasferimento dell'errore diventa

$$Y(s) = W_2(s)(Z(s) - W_1(s)H(s)Y(s)) \quad \implies \quad W_z(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_1(s)H(s)}$$

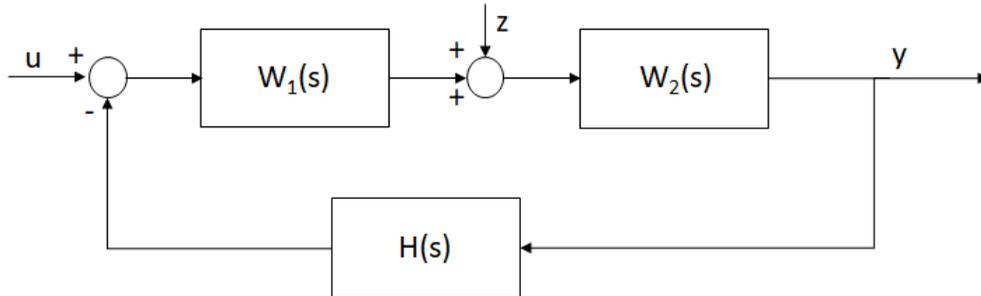


Figura 7.1.3.2 - Disturbo in catena aperta interno alla funzione di trasferimento

In questo caso, è la funzione di trasferimento a monte del disturbo (cioè la $W_1(s)$) che determina le proprietà della funzione di trasferimento del disturbo (anche perché è la parte del sistema che include il regolatore). Ad esempio, è il guadagno di Bode della $W_1(s)$ che determina la reiezione perfetta del disturbo quando cresce indefinitamente. Se, più semplicemente, chiediamo che la risposta a regime permanente a un disturbo costante sia nulla (il sistema è **astatico**), per garantire che la funzione di trasferimento $W_z(s)$ abbia uno zero nell'origine, denotando $W_1(s) = N_1(s)/D_1(s)$, avremo che

$$W_z(s) = \frac{D_1(s)W_2(s)}{D_1(s) + W_2(s)N_1(s)H(s)}$$

da cui segue che la $W_1(s)$ deve avere un polo nell'origine. In caso contrario, l'errore a regime sarà pari a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_z(s) = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2 K_H}$$

se $W_2(s)$ non ha poli nell'origine, oppure

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_z(s) = \frac{1}{K_1 K_H}$$

nel caso in cui $W_2(s)$ ne abbia. Riassumendo, in accordo alla configurazione di Figura 7.1.3.2, il sistema è astatico se la $W_1(s)$ ha almeno un polo nell'origine; altrimenti, il sistema è statico e l'errore a regime per disturbo costante è costante, e può essere reso piccolo a piacere andando ad aumentare il guadagno di Bode K_1 (anche in questo caso, il guadagno K_1 non può essere aumentato *ad libitum* senza incorrere in problemi di stabilità).

Infine, se il sistema a controreazione è affetto da un disturbo armonico come nello schema di Figura 7.1.3.1, la risposta del sistema a regime diventa:

$$y_z(t) = |W_z(j\omega)| \sin(\omega t + \angle W_z(j\omega))$$

per cui un limite superiore viene fornito da

$$|y_z(t)| \leq \left| \frac{1}{1 + W_{AP}(j\omega)H(j\omega)} \right|$$

Se, invece, il disturbo interviene come nello schema di Figura 7.1.3.2, allora il limite superiore sarà

$$|y_z(t)| \leq \left| \frac{W_2(j\omega)}{1 + W_2(j\omega)W_1(j\omega)H(j\omega)} \right|$$

In entrambi i casi, i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta aiutano a capire di quanto il disturbo è attenuato/amplificato in uscita. E, comunque, aumentando il guadagno di Bode della W_{AP} o della W_1 si riduce l'errore a regime.

7.2 Specifiche sulla risposta al transitorio: risposta al gradino

Anche per quel che la risposta transitoria, le specifiche di progetto riguardano generalmente determinati aspetti della risposta transitoria a segnali di riferimento. In particolare si fa riferimento alla risposta al gradino a partire dallo stato zero. Analogamente a quanto visto per la fedeltà di risposta, si suppone che il sistema sia asintoticamente stabile, per cui la risposta al regime al gradino sarà essa stessa un gradino, e la risposta transitoria al gradino descrive il *modo* in cui il sistema si avvicina al regime. Un ruolo fondamentale lo svolgono gli autovalori (supposti tutti a parte reale negativa).

- Nel caso in cui gli autovalori siano tutti reali, la risposta a regime al gradino si raggiunge senza oscillazioni, né sovraelongazioni (l'ipotesi è che il sistema parta dall'origine).
- Nel caso in cui ci siano autovalori complessi coniugati, accade che il regime si raggiunga a fronte di oscillazioni più o meno marcate.

I parametri che caratterizzano il transitorio della risposta al gradino sono i seguenti, si faccia riferimento alla Figura 7.2.1 dove la risposta a regime è normalizzata a 1.

- 1) **Tempo di salita** t_s : è il tempo necessario per raggiungere per la prima volta il valore di regime
- 2) **Sovraelongazione** s : è il rapporto tra il massimo valore raggiunto dalla risposta e la risposta a regime
- 3) **Tempo di assestamento** t_a : è il tempo necessario affinché la risposta transitoria abbia uno scostamento dal valore di regime definitivamente inferiore a una quantità ε scelta

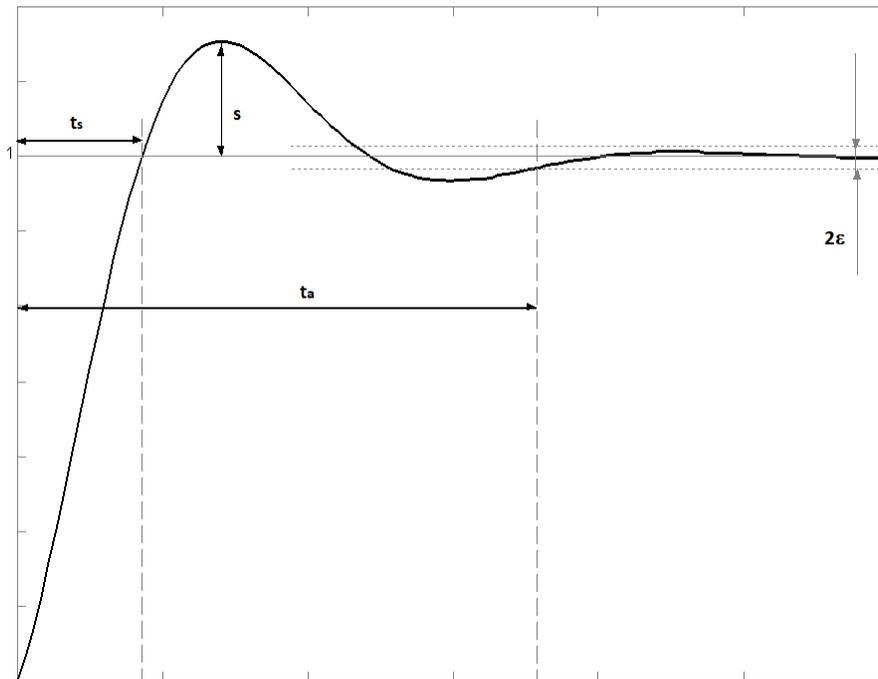


Figura 7.2.1 - Risposta transitoria al gradino, normalizzata a 1

Tali parametri possono essere messi in relazione con i seguenti parametri strettamente legati alla funzione di trasferimento e ai suoi diagrammi di Bode (si faccia riferimento alla Figura 7.2.2).

- **Modulo alla risonanza** M_r : è il rapporto tra il massimo valore del modulo della $W(j\omega)$ normalizzato al modulo di $W(j0)$
- **Banda passante** B_3 è la pulsazione oltre la quale il modulo della $W(j\omega)$ viene attenuato di -3dB rispetto al valore del modulo di $W(j0)$

Come osservazione preliminare si noti che modulo alla risonanza e banda passante hanno senso per funzioni di trasferimento che *non* hanno poli nell'origine (altrimenti $W(j0)$ avrebbe modulo



Figura 7.2.2 - Modulo alla risonanza e banda passante

infinito). Questa ipotesi *non* è una limitazione: stiamo considerando sistemi asintoticamente stabili, dunque le loro funzioni di trasferimento non hanno poli a parte reale maggiore o uguale a zero. A scanso di equivoci, nella fedeltà di risposta o nella reiezione ai disturbi si richiede che la funzione di trasferimento in catena aperta abbia poli nell'origine, mentre qui si focalizza l'attenzione sulla funzione di trasferimento a ciclo chiuso!

Riguardo a modulo alla risonanza e banda passante valgono le seguenti leggi empiriche che le legano ai parametri del transitorio della risposta al gradino e alla pulsazione di attraversamento a 0dB della funzione di trasferimento in catena aperta ω_t :

$$1 + s \simeq 0.85M_r \quad B_3 \cdot t_s \simeq 3 \quad B_3 > \omega_t$$

7.3 Sintesi per tentativi

La **sintesi per tentativi** è una procedura per la sintesi di leggi di controllo di sistemi in controreazione del tipo in Figura 6.1, mediante la composizione di integratori e reti di anticipatrici/ritardatrici atti a soddisfare le diverse specifiche di cui abbiamo trattato in precedenza: margini di stabilità (fase eguadagno), modulo alla risonanza e banda passante, risposta al gradino. La trattazione richiederebbe anche l'uso della **Carta di Nichols** che, però, non è trattata nel corso. Il termine *per tentativi* stressa il fatto che si procede passo dopo passo all'aggiunta di *ciò che serve* al controllore e alla verifica del soddisfacimento delle specifiche richieste.

Consideriamo la funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{10}{s+2} = \frac{k_F}{1 + \frac{s}{2}} \quad k_F = 5$$

Le specifiche richieste sono, per il sistema a ciclo chiuso:

- sistema di tipo $k = 1$ con errore a regime < 0.1 e $K_d = 2$;
- stabilità asintotica con margine di fase $m_\varphi > 50^\circ$;
- tempo di salita $t_s < 1$

Come prima osservazione, notiamo che il sistema in catena aperta *non* ha alcun polo nell'origine, mentre la richiesta di essere di tipo 1 richiede che abbia 1 polo nell'origine, oltre al sistema di trasduzione che sia

$$H(s) = \frac{1}{K_d} = \frac{1}{2}$$

Per cui la struttura del controllore deve avere un integratore. Proviamo con

$$C(s) = \frac{k_c}{s}$$

Ora, affinché l'errore a regime sia < 0.05 , deve essere

$$\frac{K_d^2}{k_c k_F} = \frac{2^2}{5k_c} = \frac{4}{5k_c} < 0.1 \quad \implies \quad k_c > \frac{4}{5 \cdot 0.1} = 8$$

Scegliamo il più piccolo valore di k_c che garantisca l'asservimento per cui $k_c = 8$. A questo punto possiamo scrivere la funzione di trasferimento per il sistema in catena aperta, in cui compare anche il termine di trasduzione, per cui

$$W_{AP}(s) = \frac{8}{s} \cdot \frac{1}{K_d} \cdot \frac{5}{1 + \frac{s}{2}} = \frac{20}{s(1 + \frac{s}{2})}$$

Adesso dobbiamo verificare la stabilità e il margine di stabilità richiesto. A tale scopo disegniamo i diagrammi di Bode di $W_{AP}(s)$ in Figura 7.3.1.

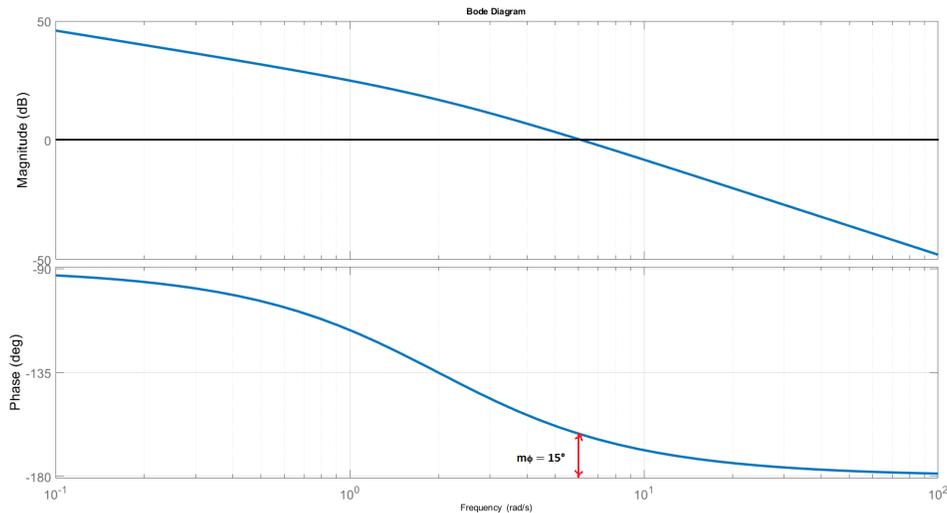


Figura 7.3.1 - Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta $W_{AP}(s)$

Dal diagramma di Nyquist (qui non riportato, che prevede una chiusura all'infinito per la presenza di un polo nell'origine) segue che non ci sono attraversamenti a $-\pi$, cosa che si evince anche guardando i diagrammi di Bode in Figura 7.3.1. Per cui

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1} = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 0$$

ossia il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile. E' bene notare come la stabilità del sistema a ciclo chiuso non è messa in discussione all'aumentare del guadagno in catena aperta (e, dunque, all'aumentare del guadagno del controllore k_c), proprio perché non ci sono attraversamenti a $-\pi$. Ciononostante, al crescere del guadagno in catena aperta il margine di fase si riduce, e potrebbe

violare le specifiche richieste. A tale scopo notiamo dai diagrammi di Bode che la pulsazione di attraversamento a 0dB vale circa 6rad/sec, e che il margine di fase vale circa 15° , minore dei 50° richiesti. Dunque, devo aumentare il margine di fase di ben 35° senza diminuire il guadagno (che rovinerebbe la specifica sull'errore a regime). A tale scopo usiamo la rete anticipatrice

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}$$

Posizioniamo $1/\tau = \omega_t$. In questo modo modificheremo minimamente il diagramma delle ampiezze per pulsazioni inferiori a $\omega_t \simeq 6$ e, in particolare, sposteremo di un massimo di 3dB la pulsazione di attraversamento stessa. Per stare più tranquilli settiamo

$$\frac{1}{\tau} = 6.5 \quad \implies \quad \tau \simeq 0.15$$

Dai diagrammi universali, per avere un aumento del margine di fase di 35° dobbiamo avere almeno $m = 6$. Per cui la rete anticipatrice scelta diventa

$$R(s) = \frac{1 + 0.15s}{1 + 0.025s}$$

Come si può notare dai nuovi diagrammi di Bode di Figura 7.3.2, la nuova pulsazione di attraversamento a 0dB è spostata di poco in avanti ($\simeq 7$ rad/sec) mentre il nuovo margine di fase vale

$$m_\varphi \simeq -125^\circ + 180^\circ \simeq 55^\circ$$

il che ci garantisce sulla specifica raggiunta.

Infine, la specifica sul tempo di salita $t_s < 1$. Dalle leggi empiriche del paragrafo precedente abbiamo:

$$t_s \simeq \frac{3}{B_3} < 1 \quad \implies \quad B_3 > 3\text{rad/sec}$$

Ora, dai diagrammi di Bode di Figura 7.3.2 esce per la pulsazione di taglio ω_t

$$B_3 > \omega_t \simeq 7\text{rad/sec}$$

per cui la specifica sul tempo di salita, che si traduce su una specifica sulla banda passante è soddisfatta automaticamente. In conclusione, la rete di controllo da inserire in catena aperta è:

$$C(s) = \frac{8(1 + 0.15s)}{s(1 + 0.025s)}$$

7.4 Regolatori PID

I regolatori PID devono la loro vastissima applicazione nel settore dell'elettronica alla loro facile realizzazione e alle buone prestazioni che garantiscono, oltre che ad una serie di procedimenti empirici di regolazione dei dispositivi, che consentono il loro "settaggio" anche a chi non è particolarmente esperto del settore dei controlli. Prendono il nome dalla triplice (in generale) azione di controllo che determinano sul loro ingresso: Proporzionale, Integratrice e Derivativa. Un generico schema di controllo che trova nei PID una valida applicazione è quello di Figura 6.1. Da quanto visto nei paragrafi precedenti, immaginando di voler garantire fedeltà di risposta in uscita, almeno per

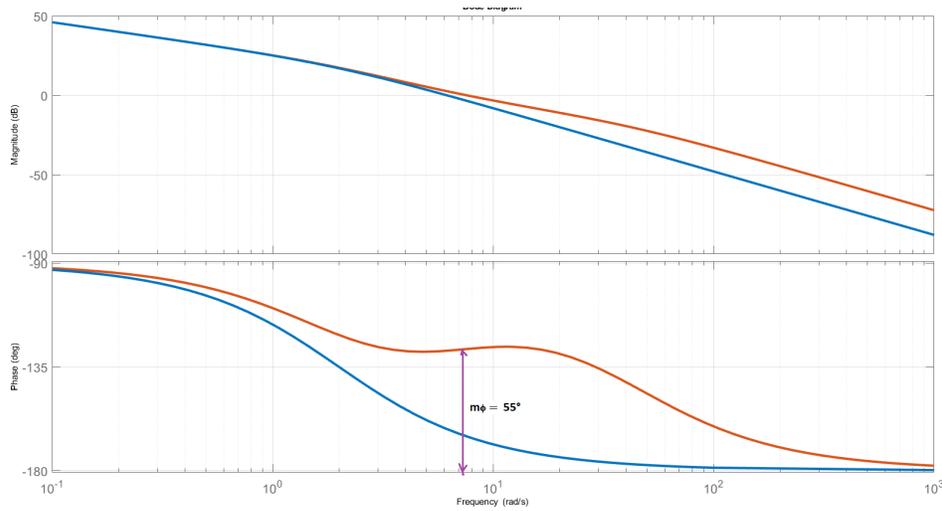


Figura 7.3.2 - Diagrammi di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta, inclusa la rete anticipatrice

ingressi di riferimento costanti in ingresso, è necessario fissare a $H(s) = \frac{1}{K_d}$ la controreazione, con K_d coefficiente di proporzionalità desiderato tra l'ingresso di riferimento $u(t)$ e l'uscita desiderata $y(t) = K_d u(t)$, e porre un polo nell'origine in catena aperta (a meno che non ce l'abbia già la funzione di trasferimento del sistema da controllare), il che, tra l'altro, garantisce l'astaticità del sistema rispetto ai disturbi costanti. Il guadagno del controllore si sceglie come compromesso tra la necessità di ridurre l'errore a regime (K grande) e quella di garantire margini di stabilità adeguati a ciclo chiuso (K piccolo). Per migliorare le prestazioni di stabilità (il margine di fase in questo caso) si fa ricorso a reti compensatrici anticipatrici del tipo:

$$\frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}, \quad m > 1,$$

per cui il controllore è dato da:

$$R(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}, \quad m > 1.$$

Questo tipo di azione di controllo (sintesi per tentativi, come abbiamo visto) riesce a soddisfare i requisiti minimi di specifiche, e la sintesi per tentativi permette di assegnare i parametri K , τ e m .

I controllori PID sono una versione *customizzata* della sintesi per tentativi. Supponendo di scegliere m elevato, il denominatore della rete compensatrice può approssimarsi con 1, per cui:

$$R(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s} = K\tau \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right), \quad K_P = K\tau, \quad T_I = \tau$$

Un controllore di questo tipo esplica le sole azioni Proporzionali e Integrali (controllore PI). Andando a scrivere, infatti, le relazioni nel dominio del tempo tra la grandezza in ingresso $e(t)$ ed in uscita $u(t)$ al regolatore, si ottiene:

$$u(t) = K_P \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

7.4.1 Regolatori PI per sistemi di cui si conosce la funzione di trasferimento

Una tecnica per assegnare i guadagni delle azioni proporzionale ed integrale è la seguente e si basa sulla conoscenza della funzione di trasferimento del sistema $F(s)$. Si noti, innanzitutto, che l'azione integrale contribuisce in modo negativo alle fasi, in maniera tanto più accentuata quanto più ci si allontana dalla pulsazione di $\frac{1}{\tau}$, si veda la Figura 7.4.1.1. In particolare, si può facilmente verificare che, in corrispondenza di $10/\tau$ si ha una diminuzione di circa 6° .

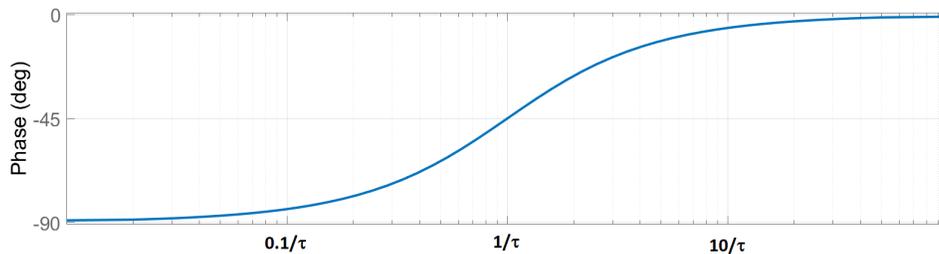


Figura 7.4.1.1 - Diagramma di Bode della fase di un regolatore PI

Un contributo negativo, in generale, è da evitare perché può ridurre il margine di fase (fino a far perdere la stabilità del sistema). Vediamo un algoritmo per settare i parametri del regolatore PI in modo da avere un margine di fase desiderato, supponendo che abbia le fasi monotonamente decrescenti al crescere della pulsazione ω .

- 1) Dato un margine di fase m_φ desiderato, dal diagramma di Bode delle fasi del sistema da controllare individuiamo la pulsazione ω_0 per cui si ha una fase pari a

$$\angle W(j\omega_0) = -180 + m_\varphi + 6^\circ$$

- 2) Supponendo che ω_0 sia la pulsazione di attraversamento a 0dB, se andiamo a porre

$$\frac{10}{\tau} = \frac{10}{T_I} = \omega_0 \quad \implies \quad T_I = \frac{10}{\omega_0}$$

avremmo che il regolatore darebbe un contributo alle fasi di circa 6° per cui si avrebbe un margine di fase uguale a quello desiderato

- 3) A questo punto si scelgono i parametri del regolatore PI in modo che la pulsazione di attraversamento sia effettivamente pari a ω_0 :

$$\frac{|K| \cdot |1 + j\tau\omega_0| \cdot |F(j\omega_0)|}{\omega_0} = \frac{K\tau \cdot |1 + j10| \cdot |F(j\omega_0)|}{10} = K_P \sqrt{1.01} \cdot |F(j\omega_0)| = 1$$

da cui

$$K_P \simeq \frac{1}{|F(j\omega_0)|}, \quad T_I = \frac{10}{\omega_0}$$

Vediamo un esempio:

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{k_F}{s(1 + \frac{s}{2})} \quad k_F = 5$$

Le specifiche richieste sono, per il sistema a ciclo chiuso:

- sistema di tipo $k = 2$ con errore a regime < 0.4 e $K_d = 1$;
- stabilità asintotica con margine di fase $m_\varphi > 22^\circ$

Perché il sistema sia di tipo 2, deve avere 2 poli nell'origine: uno polo è già nella funzione di trasferimento da controllare, per cui è necessario aggiungere un polo nel controllore. Per garantire un errore a regime < 0.4 , dato K il guadagno del controllore, dovrà accadere che

$$\frac{K_d^2}{K k_F} < 0.4 \quad \implies \quad K > \frac{1}{2} = 0.5$$

Per il momento teniamo questa condizione ($K > 0.5$) come una specifica da verificare *a posteriori*. Ora, applichiamo il ragionamento per i controllori PI. Dal primo passo dell'algoritmo, relativamente alla funzione di trasferimento $F(s)$ si richiede di cercare la pulsazione ω_0 tale per cui

$$\angle F(j\omega_0) = -180 + 22^\circ + 6^\circ = -152^\circ$$

Dai diagrammi di Bode della fase di Figura 7.4.1.2, si ottiene che tale pulsazione vale $\omega_0 \simeq 3.74 \text{ rad/sec}$. Quindi, dal secondo passo, fissiamo:

$$T_I = \frac{10}{\omega_0} = 2.6738$$

Infine, per il passo tre fissiamo

$$K_P = \frac{1}{|F(j\omega_0)|}$$

Dai diagrammi di Bode delle ampiezze avremo che

$$|F(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 20 \log |F(j\omega_0)| \simeq -4.01 \quad \implies \quad |F(j\omega_0)| \simeq 10^{-4.01/20} \simeq 0.6302$$

Quindi:

$$K_P = \frac{1}{0.6302} \simeq 1.5867 \quad T_I = 2.6738$$

Andando a ritroso notiamo che

$$K = \frac{K_P}{T_I} = \frac{1.5867}{2.6738} = 0.5934 > 0.5$$

soddisfa anche la specifica di regime. Cosa si potrebbe fare se la specifica a regime non fosse stata soddisfatta a causa della necessità di un guadagno in catena aperta troppo basso? Da quanto visto

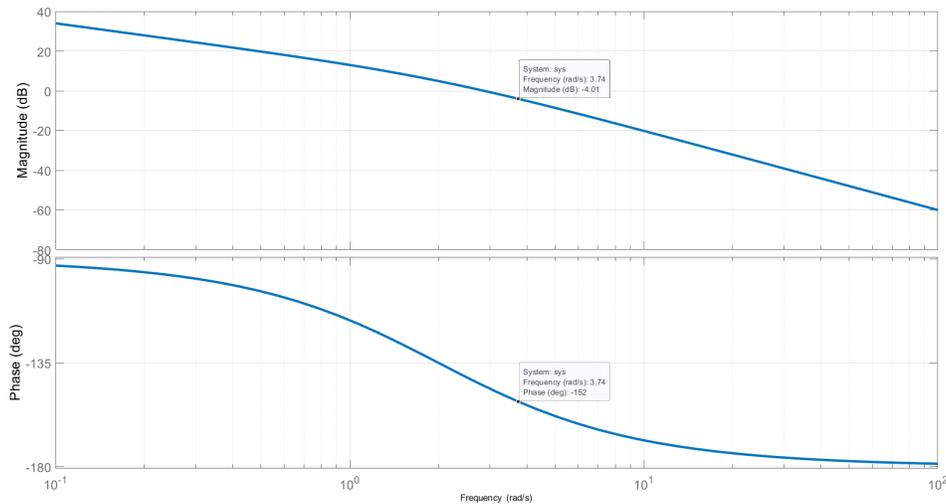


Figura 7.4.1.2 - Diagramma di Bode di $F(j\omega)$

un controllore PI puro va incontro all'inconveniente strutturale che si può migliorare il margine di fase solo a scapito di una diminuzione della pulsazione di taglio, poichè non c'è possibilità di aumentare le fasi. Per renderlo più versatile sarebbe necessario l'uso di una rete anticipatrice che aumentasse le fasi. Un tale obiettivo si ottiene aggiungendo la nota rete anticipatrice:

$$R(s) = \frac{K(1 + \tau_I s)}{s} \cdot \frac{1 + \tau_D s}{1 + \frac{\tau_D}{m} s}, \quad m > 1.$$

Anche in questo caso, se si realizza la rete anticipatrice con la sola azione derivatrice spostando il polo alle alte frequenze ($m \gg 1$), il regolatore PID completo presenta le tre caratteristiche di guadagno proporzionale, integrale e derivativo:

$$R(s) = \frac{K(1 + \tau_I s)(1 + \tau_D s)}{s} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

con

$$K_P = K(\tau_I + \tau_D), \quad T_I = \tau_I + \tau_D, \quad T_D = \frac{\tau_I \tau_D}{\tau_I + \tau_D}$$

Nel prossimo paragrafo vedremo delle regole empiriche per assegnare i parametri K_P , T_I e T_D al regolatore. Il vantaggio di queste regole è che non necessitano della conoscenza della funzione di trasferimento del sistema da controllare.

7.4.2 Regolatori PID per sistemi di cui non si conosce la funzione di trasferimento

Se non si conosce la funzione di trasferimento, ci si affida a metodi empirici per l'assegnazione dei guadagni. I metodi di **Ziegler-Nichols** sono i più importanti, e maggiormente usati da sempre. Uno di essi (noto come **calibrazione ad anello chiuso**) si basa sui seguenti passi:

- i) consideriamo il sistema in catena aperta controllato da un semplice guadagno K che venga fatto variare a piacimento;

ii) si stima la *pulsazione critica*, in corrispondenza della quale si innescano oscillazioni sostenute sul sistema a ciclo chiuso (ossia si perde la stabilità): questa operazione, che si effettua aumentando il guadagno del regolatore fino a raggiungere il valore critico K_{cr} , equivale a cercare la pulsazione in corrispondenza della quale le fasi valgono esattamente $-\pi$;

iii) si denotano i parametri ω_{cr} e K_{cr} come tali valori critici.

A questo punto ci sono leggi empiriche che, a seconda del tipo di controllore adottato stabiliscono come settare i parametri del regolatore P, PI o PID. Ad esempio, nel caso di un PI, la scelta sarà:

$$K_P = 0.45K_{cr}, \quad T_I = \frac{\omega_{cr}}{1.2}$$

mentre, nel caso di un regolatore PID, la scelta sarà:

$$K_P = 0.6K_{cr}, \quad T_I = \frac{\omega_{cr}}{2}, \quad T_D = \frac{\omega_{cr}}{8}$$

Un altro metodo empirico si basa su alcuni parametri della risposta al transitorio ad un gradino unitario.

8 Regolatori digitali

Il controllo digitale rappresenta quella branca dei controlli automatici che si prefigge come scopo l'analisi e l'elaborazione di una opportuna legge di controllo a controreazione da parte di un elaboratore elettronico, quindi a tempo discreto, che agisca su di un sistema fisico la cui evoluzione, quindi, è a tempo continuo. A fronte della diversa natura dei sistemi controllante e controllato, sono parte integrante dello schema di controllo digitale gli strumenti di conversione analogica/digitale che consentono l'acquisizione del segnale analogico da parte del sistema di controllo e quelli di conversione digitale/analogica che consentono l'attuazione fisica della legge di controllo. Un generico schema di regolazione automatica digitale può essere rappresentato dal seguente:

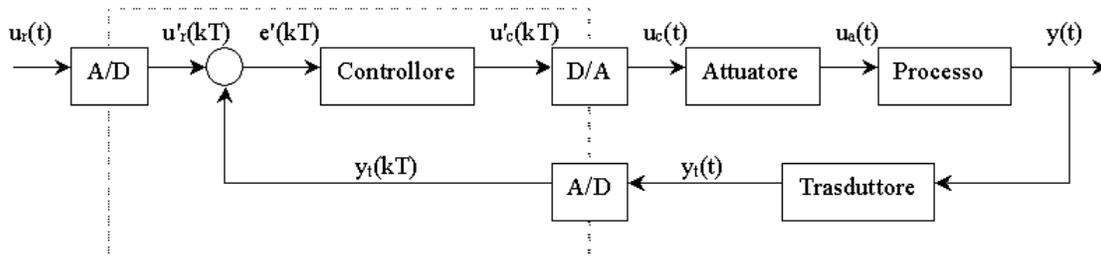


Figura 8.1 - Schema di regolazione digitale

Il processo, sistema a tempo continuo, è eccitato dall'ingresso di controllo debitamente amplificato da un opportuno attuatore; le sue uscite $y(t)$, dopo un'operazione di trasduzione sono acquisite dall'elaboratore numerico, indicata dalla linea tratteggiata. L'acquisizione dei dati, che verranno poi processati, avviene attraverso le due operazioni di campionamento e quantizzazione: la prima

consiste nella trasformazione del segnale analogico (a tempo continuo) in una sequenza di valori (a tempo discreto), in modo tale che

$$y_t(kT) = y(t), \quad t = kT$$

Quindi questa sequenza di dati per poter essere immagazzinata dalle memorie dell'operatore o anche direttamente processata viene quantizzata (o digitalizzata) nel senso che i valori della sequenza a tempo discreto, derivata dal campionamento del segnale analogico, sono approssimati (arrotondati) attraverso un numero finito di cifre a seconda della capacità del dispositivo utilizzato. È bene notare che mentre il campionamento ideale descritto è reversibile, ossia, sotto opportune condizioni, consente di ricostruire in modo esatto il segnale analogico da quello campionato, la digitalizzazione di una sequenza tempo discreta è irreversibile.

Anche il segnale di riferimento $u_r(t)$ è sottoposto alla medesima conversione analogica/digitale per poter essere debitamente processato dall'elaboratore numerico, il quale elabora l'azione di controllo $u'_c(kT)$. Questa, a tempo discreto, deve subire il processo inverso sopra descritto, corrispondente alla conversione digitale/analogica per poter essere fornita al processo sotto forma di reale azione di controllo da un attuatore. La conversione digitale/analogica si basa sostanzialmente sull'utilizzo di opportuni interpolatori che, a partire dalla sequenza temporale discreta di valori consentono di ricostruire il segnale analogico che meglio li interpola. Se i dati sono interpolati da un dispositivo di tenuta di ordine zero (Zero Order Hold = ZOH), il valore ricevuto è semplicemente mantenuto al valore di ingresso fino al valore successivo e così via. Interpolatori lineari, quadratici, o di ordine superiore, consentono di raccordare i valori della sequenza tempo discreta attraverso una spezzata lineare, quadratica, o di ordine superiore. In questo modo, però, si introducono ritardi nella disponibilità del segnale in uscita dal convertitore, in quanto gli interpolatori di ordine 1,2,... sono intrinsecamente non causali.

L'elaboratore numerico, oltre a processare i dati in ingresso attraverso un'opportuna legge di controllo a tempo discreto ha anche il compito di gestire l'acquisizione dei dati in ingresso e la conversione dei dati in uscita: queste operazioni sono regolate dalla sincronizzazione di un clock interno al processore che scandisce i tempi. All'interno dell'intervallo di clock l'elaboratore deve acquisire i dati in ingresso, processarli, convertire i segnali di controllo in uscita. Generalmente queste due ultime operazioni sono molto meno onerose (in termini di tempo) per cui spesso si parla semplicemente di passo di campionamento per indicare l'intero intervallo di clock.

A fronte di una maggiore articolazione della legge di controllo, che prevede competenze sui sistemi dinamici a tempo continuo e a tempo discreto, sui dispositivi di conversione A/D e D/A, sulla gestione e sincronizzazione delle operazioni di un elaboratore elettronico, il controllo digitale consente una maggiore capacità di elaborazione dei dati (le più importanti e sofisticate leggi di controllo nello spazio di stato sono state elaborate grazie e parallelamente allo sviluppo dei calcolatori elettronici, senza i quali sarebbe stato impossibile realizzare le medesime operazioni nel contesto analogico) e un'incredibile flessibilità nella gestione dell'azione di controllo: una eventuale modifica consente di mantenere la stessa piattaforma hardware, perchè è il software che agisce nella legge di controllo e non i dispositivi elettronici.

Di seguito si terrà conto delle seguenti semplificazioni per concentrare l'attenzione sulle caratteristiche di controllo invece che su altri aspetti in gioco. Innanzitutto, si supporrà che il dispositivo di trasduzione sia istantaneo (abbia una dinamica trascurabile rispetto alle altre), cosicché, nell'ipotesi di grandezze tutte omogenee, il guadagno di trasduzione K_T possa ritenersi applicato direttamente alle osservazioni discretizzate. Anche i convertitori analogico/digitali possono semplificarsi trascurando il processo di quantizzazione. Sotto queste ipotesi semplificative, il sistema di controllo

digitale può ricondursi al seguente schema:

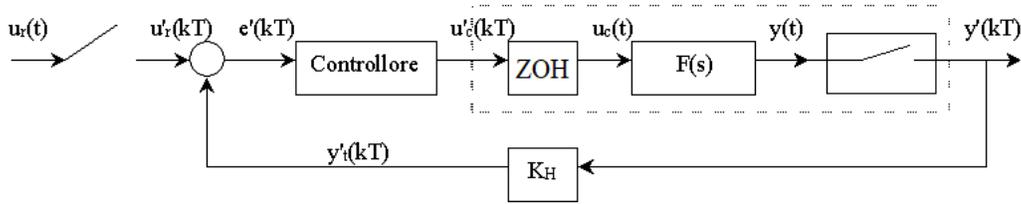


Figura 8.2 - Schema di regolazione digitale semplificata

L'attuatore e il processo fisico sono descritti dall'unico blocco tempo continuo, rappresentato dalla funzione di trasferimento $F(s)$. Si noti che il blocco tratteggiato, pur se costituito da elementi che evolvono con dinamiche continue o che sono essi stessi strumenti di conversione come i dispositivi di campionamento e di interpolazione, da un punto di vista ingresso uscita è, di per sé, un sistema a tempo discreto. Dunque, considerando il segnale di riferimento e le uscite campionate, poste in feedback in ingresso, lo schema di cui sopra rappresenta un generico schema di controllo a tempo discreto:

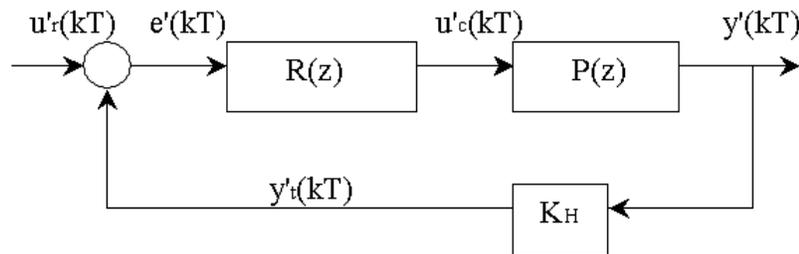


Figura 8.3 - Schema di regolazione digitale semplificata - Rielaborazione a tempo discreto

$P(z)$ rappresenta la funzione di trasferimento del sistema discreto equivalente ai tre blocchi sopra descritti, e $R(z)$ descrive la legge di controllo elaborata per il controllo di $P(z)$. L'argomento z si riferisce alla variabile complessa equivalente della trasformata di Laplace nel tempo continuo:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad \mathcal{Z}[g(t)] = \sum_{t=0}^{+\infty} g(t)z^{-t} = G(z)$$

È bene sottolineare che le specifiche che sono soddisfatte in questo modo si limitano a essere imposte sui valori campionati della risposta del sistema.

8.1 Funzione di trasferimento del sistema discreto equivalente $P(z)$

Il problema del regolatore digitale si riduce, quindi, al problema di controllo del sistema discreto equivalente $P(z)$ posto in feedback con il controllore digitale $R(z)$. Dunque, si tratta di un sistema

a ciclo chiuso a tempo discreto. Inoltre, la costruzione della funzione di trasferimento $P(z)$ dipende chiaramente dal tipo di dispositivo di tenuta che si adotta. Nel seguito, noi useremo dispositivi di tenuta di ordine zero (ZOH), quindi causali.

Per calcolare la $P(z)$ bisogna ricordare che (vedi Figura 8.2) $u'_c(kT)$, $y'(kT)$ sono segnali discreti, e $u_c(t)$, $y(t)$ sono segnali continui.

Supponendo di avere a che fare con uno ZOH, l'uscita di un tale interpolatore è pari alla somma indefinita di segnali di forma rettangolare del tipo:

$$u_c(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_c(kT) \left(\delta_{-1}(t - kT) - \delta_{-1}(t - (k+1)T) \right)$$

da cui, la trasformata di Laplace che si ottiene è:

$$U_c(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_c(kT) \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{+\infty} u'_c(kT) e^{-kTs}$$

Un tale segnale può immaginarsi come l'uscita di un sistema, la cui funzione di trasferimento è:

$$W(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad \Longrightarrow \quad W(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - T)$$

eccitato da un treno di delta di Dirac in ingresso, pesate dai valori del segnale a tempo discreto:

$$u_c^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_c(kT) \delta(t - kT)$$

Per cui l'uscita $y(t)$ si può pensare come l'uscita del sistema a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$\tilde{F}(s) = W(s)F(s)$$

eccitato dall'ingresso a tempo continuo $u_c^*(t)$. Sia $\tilde{f}(t)$ l'antitrasformata di $\tilde{F}(s)$ (ossia la funzione di trasferimento nel dominio del tempo). Quindi, la risposta del sistema $y(t)$ sarà:

$$y(t) = \int_0^t \tilde{f}(t - \tau) u_c^*(\tau) d\tau = \int_0^t \tilde{f}(t - \tau) \sum_{k=0}^{+\infty} u'_c(kT) \delta(\tau - kT) d\tau = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_c(kT) \tilde{f}(t - kT)$$

Infine, andando a campionare il segnale di uscita:

$$y(hT) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_c(kT) \tilde{f}(hT - kT) = \sum_{k=0}^h u'_c(kT) \tilde{f}((h - k)T)$$

che è la risposta forzata di un sistema a tempo discreto, la cui funzione di trasferimento (nel tempo) è la funzione di trasferimento (nel tempo) \tilde{f} campionata. Si noti che la somma termina a h perché la funzione di trasferimento si suppone sia nulla prima dell'inizio del segnale.

Riassumendo, dato un sistema a tempo continuo la cui funzione di trasferimento è $F(s)$, supponendo di metterlo in un sistema di regolazione digitale a feedback con un dispositivo di tenuta di ordine zero (ZOH), la funzione di trasferimento (nel tempo) del sistema discreto equivalente si calcola:

- moltiplicando la $F(s)$ per $W(s)$:

$$\tilde{F}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot F(s)$$

- antitrasformando:

$$\tilde{f}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{F}(s)]$$

- campionando la $\tilde{f}(t)$

La funzione di trasferimento così trovata corrisponde alla funzione di trasferimento del sistema discreto equivalente, le cui matrici dinamiche sono

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{A\theta} B d\theta$$

Infatti, andando a calcolare tale funzione di trasferimento da $A_d, B_d, C_d = C$ abbiamo:

$$\tilde{f}(hT) = C_d A_d^{h-1} B_d = C e^{A(h-1)T} \int_0^T e^{A\theta} B d\theta = C \int_0^T e^{A((h-1)T+\theta)} B d\theta$$

Se, invece, la calcoliamo dai tre passaggi precedenti:

$$\tilde{f}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot F(s) \right] = \int_0^t C e^{A\tau} B d\tau - \int_0^{t-T} C e^{A\tau} B d\tau = \int_{t-T}^t C e^{A\tau} B d\tau$$

da cui, andando a campionare su $t = hT$:

$$\tilde{f}(hT) = \int_{hT-T}^{hT} C e^{A\tau} B d\tau$$

Imponendo la sostituzione $\theta = \tau - hT + T$ abbiamo l'equivalenza tra le due funzioni.

8.2 La trasformata Z

Analogamente al caso a tempo continuo, l'evoluzione di un sistema lineare stazionario a tempo discreto può essere analizzata, alternativamente, mediante l'uso di opportune trasformate. Si definisce *trasformata Zeta* la trasformazione che associa ad una funzione $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}^n$ la seguente funzione complessa ad argomento complesso $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^n$:

$$\mathcal{Z}[f(t)] = F(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} f(t) z^{-t}.$$

Anche nel caso a tempo discreto si parla di analisi in frequenza quando si utilizza la trasformata Zeta.

La trasformata Zeta gode delle seguenti proprietà:

i) *linearità*:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

ii) *traslazione nel tempo*:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(t - \tau)] &= z^{-\tau}F(z), \quad \tau \geq 0, \quad f(t) = 0 \text{ per } t < 0; \\ \mathcal{Z}[f(t + 1)] &= zF(z) - zf(0);\end{aligned}$$

iii) *cambio di scala*:

$$\mathcal{Z}[a^t f(t)] = F\left(\frac{z}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0;$$

iv) *trasformate di funzioni modulate da polinomi*:

$$\mathcal{Z}[t^k f(t)] = D_z^k[F(z)], \quad D_z[F(z)] = -z \frac{dF}{dz}, \quad k \in \mathbb{N};$$

v) *convoluzione*:

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{\tau=0}^t f(t - \tau)g(\tau)\right] = F(z)G(z);$$

vi) *limiti notevoli (nel caso i limiti sotto indicati esistano)*:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z), \quad f(t)|_{t=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z).$$

Utilizzando queste proprietà, è facile verificare che, nel dominio complesso, le equazioni ricorsive che descrivono il sistema a tempo discreto diventano le seguenti equazioni algebriche:

$$\begin{cases} X(z) = z(zI - A)^{-1}x(t_0) + (zI - A)^{-1}BU(z), \\ Y(z) = CX(z) + DU(z), \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned}X_{\text{lib}}(z) &= z(zI - A)^{-1}x(t_0), & X_{\text{for}}(z) &= (zI - A)^{-1}BU(z), \\ Y_{\text{lib}}(z) &= zC(zI - A)^{-1}x(t_0), & Y_{\text{for}}(z) &= C(zI - A)^{-1}BU(z) + DU(z),\end{aligned}$$

e la *funzione di trasferimento* in Z è data, dunque, da:

$$W(z) = \mathcal{Z}[W(t)] = C(zI - A)^{-1}B + D.$$

Di seguito sono riportate le trasformate dei segnali di ingresso maggiormente utilizzati:

i) *impulso matematico*:

$$\mathcal{Z}[\delta(t)] = 1;$$

ii) *gradino*:

$$\mathcal{Z}[\delta_{-1}(t)] = \frac{z}{z - 1}, \quad \delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

iii) *rampa lineare*:

$$\mathcal{Z}[t] = \frac{z}{(z - 1)^2};$$

iv) *polinomio fattoriale di grado k*:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t^{(k)}}{k!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}, \quad \begin{cases} t^{(0)} = 1, \\ t^{(k)} = t(t-1)^{(k-1)}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N};$$

v) *potenza*:

$$\mathcal{Z}[a^t] = \frac{z}{z-a}, \quad a \in \mathbb{R};$$

vi) *seno*:

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega t)] = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

vii) *coseno*:

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega t)] = \frac{z(z - \cos(\omega))}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

viii) *polinomio fattoriale di grado k, modulato da una potenza*:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t^{(k)}}{k!} a^t\right] = \frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R};$$

ix) *seno modulato da una potenza*:

$$\mathcal{Z}[a^t \sin(\omega t)] = \frac{az \sin(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}, \quad a, \omega \in \mathbb{R};$$

x) *coseno modulato da una potenza*:

$$\mathcal{Z}[a^t \cos(\omega t)] = \frac{z(z - a \cos(\omega))}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}, \quad a, \omega \in \mathbb{R};$$

Analogamente alla formula di inversione complessa per la trasformata di Laplace, la formula per l'antitrasformata Z è spesso troppo onerosa da utilizzare. Anche per i sistemi lineari stazionari a dimensione finita a tempo discreto, in presenza dei segnali di eccitazione più comuni, quali quelli sopra descritti, le risposte del sistema nel dominio trasformato Z sono rapporti propri di polinomi in z . In particolare, nell'ipotesi di autovalori distinti, la trasformata Zeta della potenza di matrice è data da:

$$z(zI - A)^{-1} = \mathcal{Z}[A^t] = \mathcal{Z}\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i v_i^T\right] = \sum_{i=1}^n \frac{z}{z - \lambda_i} u_i v_i^T.$$

Dunque, restringendo l'operazione di antitrasformata alla classe dei rapporti propri di polinomi, ci si avvale ancora della scomposizione in fratti già vista per l'antitrasformata di Laplace.

Per quel che riguarda la risposta a regime permanente, si svolge un ragionamento analogo al caso a tempo continuo: se esiste, i modi osservabili sono tutti stabili asintoticamente e il calcolo si semplifica trascurando nella scomposizione in fratti della trasformata Z della risposta forzata del sistema i termini che hanno come poli gli autovalori del sistema, che a regime vanno a zero. In particolare, applicando i limiti notevoli, la risposta al gradino è data da:

$$y_g(t) = \lim_{z \rightarrow 1} W(z),$$

mentre la risposta armonica del sistema si calcola nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
y_{\text{arm}}(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau) \cos(\omega\tau) = \sum_{\theta=0}^{+\infty} W(\theta) \cos(\omega(t-\theta)) d\theta \\
&= \sum_{\theta=0}^{+\infty} W(\theta) \frac{e^{j\omega(t-\theta)}}{2} + \sum_{\theta=0}^{+\infty} W(\theta) \frac{e^{-j\omega(t-\theta)}}{2} = \frac{e^{j\omega t} W(z=e^{j\omega})}{2} + \frac{e^{-j\omega t} W(z=e^{-j\omega})}{2} \\
&= \frac{e^{j\omega t} |W(e^{j\omega})| e^{j\angle W(e^{j\omega})}}{2} + \frac{e^{-j\omega t} |W(e^{j\omega})| e^{-j\angle W(e^{j\omega})}}{2} = |W(e^{j\omega})| \cos(\omega t + \angle W(e^{j\omega}))
\end{aligned}$$

Si noti come, a differenza dei sistemi a tempo continuo, la risposta armonica di un sistema a tempo discreto, è la stessa a meno di multipli di 2π :

$$e^{j\omega} = e^{j(\omega+2k\pi)}, \quad k \in \mathcal{Z}$$

Tutto ciò è coerente con la natura tempo discreta dell'armonica per cui, essendo $t \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi t)$$

Se, però, in ingresso al sistema a tempo discreto c'è una sequenza proveniente da un processo di campionamento di un'armonica, può accadere che due distinte armoniche $u_1(t) = \sin(\omega_1 t)$, $u_2(t) = \sin(\omega_2 t)$ diano luogo alla medesima sequenza campionata $\tilde{u}_1(kT) = \sin(\omega_1 kT)$, $\tilde{u}_2(kT) = \sin(\omega_2 kT)$ nel caso in cui

$$(\omega_1 - \omega_2)T = 2\pi h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

sia un multiplo di 2π , ossia nel caso in cui la differenza delle due pulsazioni sia un multiplo della pulsazione di campionamento. Infatti:

$$\cos(\omega_1 kT) = \cos(\omega_2 kT + 2\pi h k)$$

Questo fenomeno è noto come *mascheramento della frequenza*, in quanto ogni pulsazione superiore a quella di campionamento si “nasconde”, per quel che riguarda la risposta armonica del sistema in una pulsazione minore di quella di campionamento.

Se si desidera calcolare la funzione di trasferimento ingresso/uscita del sistema discreto equivalente, oltre ovviamente a ricavarla a partire dalle matrici dinamiche, può ottenersi direttamente dalla funzione di trasferimento del sistema a tempo continuo. Basandosi sulla sua costruzione, eccitando il sistema fisico con un ingresso a gradino e campionandone l'uscita si ottiene una sequenza discreta di valori che coincide con la risposta del sistema discreto equivalente ad un gradino discreto:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right]_{t=kT} = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-1} W(z) \right]$$

da cui

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right]_{t=kT} \right]$$

8.3 Fedeltà di risposta a ingressi polinomial fattoriali

Concentriamo, adesso, l'attenzione sulle tecniche di controllo a tempo discreto. Per quel che riguarda l'approccio in frequenza, utilizzando i dovuti parallelismi, le soluzioni che si ottengono sono analoghe a quelle a tempo continuo. Ad esempio, un sistema a tempo discreto si definisce *di tipo k* se, eccitato da un segnale canonico di tipo k , la risposta a regime permanente differisce da quella desiderata per un coefficiente moltiplicativo non nullo, e dà perfetta fedeltà di risposta rispetto al segnale desiderato se l'ingresso è un ingresso canonico di tipo $h < k$. Scendendo nel dettaglio, un ingresso canonico di tipo k è un polinomio fattoriale:

$$u_k(t) = \frac{t^{(k)}}{k!}$$

Analogamente al caso a tempo continuo, si può dimostrare che la risposta a regime permanente a un tale ingresso polinomiale fattoriale è a sua volta un polinomio fattoriale generico, del tipo

$$y_{\text{reg}}(t) = C_0 \frac{t^{(k)}}{k!} + C_1 \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} + \cdots + C_{k-1}t + C_k$$

Con i coefficienti C_j , $j = 0, 1, \dots, k$, che risultano (se ne omette la dimostrazione)

$$C_j = \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j W(z)}{dz^j} \right|_{z=1}, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

Ossia i coefficienti C_j sono i coefficienti dello sviluppo di Taylor della funzione di trasferimento $W(z)$ nel punto $z = 1$:

$$W(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j W(z)}{dz^j} \right|_{z=1} (z-1)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j (z-1)^j$$

Applichiamo queste regole al caso che ci interessa, ossia alla fedeltà di risposta per ingressi canonici di tipo k , relativamente al regime. Sia $y(t)$ l'uscita di un sistema lineare stazionario a tempo discreto, e sia

$$y_{\text{des}}(t) = K_d \frac{t^{(k)}}{k!}$$

l'uscita desiderata per un ingresso canonico di ordine k . Se consideriamo il *sistema d'errore* in cui l'uscita è l'errore, ossia la differenza tra l'uscita desiderata e l'uscita del sistema

$$e(t) = y_{\text{des}}(t) - y_{\text{reg}}(t) = C_0^e \frac{t^{(k)}}{k!} + C_1^e \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} + \cdots + C_{k-1}^e t + C_k^e$$

da cui avremo che il sistema sarà di tipo k se

$$\begin{aligned} C_0^e &= C_1^e = \cdots = C_{k-2}^e = C_{k-1}^e = 0 \\ C_k^e &\neq 0 \end{aligned}$$

il che ci porta a dire che la funzione di trasferimento $W_e(z)$ del sistema d'errore deve avere uno zero di molteplicità k in $z = 1$:

$$W_e(z) = \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e (z-1)^j = (z-1)^k \cdot \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e (z-1)^{j-k}$$

In tal caso l'errore a regime vale proprio

$$C_k^e = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k W_e(z)}{ds^k} \right|_{z=1}$$

Inoltre per un sistema di tipo k , l'errore a regime per ingressi canonici di ordine $j < k$ è pari a zero, perché i coefficienti

$$C_0^e, C_1^e, \dots, C_j^e, \quad j < k$$

sono tutti nulli.

Adesso vediamo come si ripercuotono queste informazioni nel caso in cui il sistema di tipo k sia il sistema a ciclo chiuso di Figura 8.3. A tale scopo, ipotizziamo che il sistema di trasduzione in feedback sia il seguente sistema istantaneo

$$H(z) = \frac{1}{K_d}$$

Allora, la funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso sarà:

$$W_{CH}(z) = \frac{W_{AP}(z)}{1 + W_{AP}(z)/K_d} = \frac{K_d W_{AP}(z)}{K_d + W_{AP}(z)}, \quad W_{AP}(z) = R(z)P(z)$$

e quella del sistema d'errore sarà:

$$W_e(z) = K_d - \frac{K_d W_{AP}(z)}{K_d + W_{AP}(z)} = \frac{K_d^2}{K_d + W_{AP}(z)}$$

Se distinguiamo numeratore e denominatore della funzione di trasferimento in catena aperta $W_{AP}(z) = N_{AP}(z)/D_{AP}(z)$ avremo:

$$W_e(z) = K_d^2 \frac{D_{AP}(z)}{K_d D_{AP}(z) + N_{AP}(z)}$$

Quindi, la funzione di trasferimento del sistema d'errore ha k zeri in $z = 1$ se il denominatore della funzione di trasferimento in catena aperta ha k radici in $z = 1$, ossia se la funzione di trasferimento a ciclo aperto ha k poli in $z = 1$.

Riassumendo: *Un sistema a controreazione come quello descritto in Figura 8.3, è un sistema di tipo k (ossia presenta errore nullo a regime rispetto a un ingresso canonico di tipo k e all'uscita desiderata $y_{des}(t) = K_d t^{(k)}/k!$) se la funzione di trasduzione in feedback è $H(s) = 1/K_d$ e ci sono k poli in $z = 1$ in catena aperta.*

Per calcolare l'errore a regime per sistemi di tipo k , distinguiamo i seguenti due casi.

- Sistema di tipo $k = 0$. Non c'è bisogno di avere poli in $z = 1$. In tal caso l'errore a regime è

$$C_0^e = W_e(z=1) = \frac{K_d^2}{K_d + W_{AP}(z)|_{z=1}}$$

- Sistema di tipo $k > 0$. Ci sono k poli in $z = 1$ in catena aperta. Dalla formula

$$W_e(z) = (z-1)^k \cdot \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e (z-1)^{j-k} = (z-1)^k (C_k^e + C_{k+1}^e (z-1) + \dots)$$

avremo

$$C_k^e = \left. \frac{W_e(z)}{(z-1)^k} \right|_{z=1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_d^2}{(z-1)^k K_d + (z-1)^k W_{AP}(z)} = \frac{K_d^2}{\{(z-1)^k W_{AP}\}_{z=1}}$$

8.4 Fedeltà di risposta ad ingressi armonici

La risposta a regime per ingressi armonici del tipo $u(t) = \sin(\omega t)$ di un sistema a tempo discreto posto in controreazione dipende dalla funzione di trasferimento a ciclo chiuso, che in questo caso vale:

$$W_{\text{CH}}(z) = \frac{W_{\text{AP}}(z)}{1 + W_{\text{AP}}(z)K_H}, \quad W_{\text{AP}}(z) = R(z)P(z)$$

da cui:

$$y(t) = |W_{\text{CH}}(e^{j\omega})| \sin(\omega t + \angle W_{\text{CH}}(e^{j\omega}))$$

L'errore che si ottiene nel tentativo di asservimento all'ingresso armonico $u(t)$, posti $y_d(t) = K_d u(t)$ e $K_H = \frac{1}{K_d}$ è descritto dalla funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'errore $e(t) = y_d(t) - y(t)$, che vale:

$$W_e(z) = \frac{K_d^2}{K_d + W_{\text{AP}}(z)} \implies e(t) = |W_e(e^{j\omega})| \sin(\omega t + \angle W_e(e^{j\omega}))$$

ossia l'errore a regime è limitato in ampiezza da una grandezza che tende a zero al crescere del guadagno in catena aperta.

8.5 Risposta in tempo finito

Nel caso dei sistemi a tempo discreto, il transitorio di sistemi stabili asintoticamente può finire in un tempo finito (invece che con il consueto andamento decrescente esponenziale). Ad esempio, consideriamo l'uscita $y(t)$ di un sistema asintoticamente stabile, eccitato da un gradino. La sua trasformata Zeta sarà:

$$Y(z) = \sum_{t=0}^{+\infty} y(t)z^{-t} = y(0) + \frac{y(1)}{z} + \frac{y(2)}{z^2} + \dots$$

Supponiamo che il regime sia \bar{y} e che lo si raggiunga in un tempo finito Δ , ossia

$$y(t) = \bar{y}, \quad t = \Delta, \Delta + 1, \dots$$

Allora, la trasformata Zeta diventa

$$Y(z) = \sum_{t=0}^{\Delta-1} y(t)z^{-t} + \bar{y} \cdot \sum_{t=\Delta}^{+\infty} z^{-t} = \sum_{t=0}^{\Delta-1} (y(t) - \bar{y})z^{-t} + \bar{y} \cdot \sum_{t=0}^{+\infty} z^{-t} = \frac{N(z)}{z^{\Delta-1}} + \bar{y} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Ma l'uscita di un ingresso a gradino può scriversi come

$$Y(z) = W(z)U(z) = W(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

per cui

$$W(z) = \frac{N(z)(z-1)}{z^{\Delta}} + \bar{y}$$

Ossia, per avere una risposta al gradino in un tempo finito Δ , il sistema deve avere tutti i poli in zero. Inoltre, se la risposta a regime è esattamente zero in tempo finito, il sistema deve avere *anche* uno zero in $z = 1$.

Quanto detto si può, chiaramente, estendere al caso del sistema di errore nel caso di asservimento. Dicendo che il sistema di tipo 0 garantisce una risposta in tempo finito se la funzione di trasferimento d'errore $W_e(z)$ ha tutti i poli in 0, mentre il sistema è di tipo 1 con risposta in tempo finito se la funzione di trasferimento d'errore ha tutti poli in 0 e uno zero in $z = 1$. Dalla formula della $W_e(z)$ abbiamo che

$$\frac{K_d^2}{K_d + P(z)R(z)} = \frac{N(z)(z-1) + \bar{y}z^\Delta}{z^\Delta}$$

Al variare di Δ e del polinomio $N(z)$ si possono avere più soluzioni che garantiscono la specifica. L'importante è scrivere una $R(z)$ che sia realizzabile, ossia con denominatore di grado maggiore o al più uguale a quello del numeratore. Ad esempio, supponiamo di essere interessati ad avere un sistema di tipo 1 ($\bar{y} = 0$). A tale scopo si può provare che la scelta del Δ minimo consiste nel porre

$$\Delta = n - m$$

dove $n - m$ è l'eccesso poli-zeri della funzione di trasferimento in catena aperta. Quindi, ponendo

$$N(z) = K_d(z^{n-m-1} + z^{n-m-2} + \dots + z + 1) \quad \implies \quad N(z)(z-1) = K_d(z^{n-m} - 1)$$

abbiamo

$$\frac{K_d^2}{K_d + P(z)R(z)} = \frac{K_d(z^{n-m} - 1)}{z^{n-m}}$$

da cui

$$R(z) = \frac{K_d}{P(z)(z^{n-m} - 1)}$$

Esempio. Sia dato il sistema a controeazione di Figura 8.2, con la $F(s)$ data da

$$F(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

Dato un passo di campionamento $T = 1$, si vuole calcolare un regolatore digitale che restituisca a ciclo chiuso un sistema di tipo 1 ($K_d = 1$) con un errore nullo alla risposta al gradino in tempo finito. Come primo passo bisogna calcolare la funzione di trasferimento del sistema discreto equivalente. A tale scopo, data la $F(s)$ possiamo applicare la regola che lega la $F(s)$ alla $P(z)$, la trasformata Zeta della funzione di trasferimento del sistema discreto equivalente. Partiamo dal calcolo della risposta al gradino con Laplace

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(1+s)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \right] = -\delta_{-1}(t) + t + e^{-t}$$

Quindi campioniamo e trasformiamo in Z :

$$\mathcal{Z}[-\delta_{-1}(k) + k + e^{-k}] = -\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-1}} = \frac{e^{-1}z(z+(e-2))}{(z-1)^2(z-e^{-1})}$$

da cui, infine

$$P(z) = \frac{e^{-1}(z+(e-2))}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

L'eccesso poli-zeri è 1, per cui il controllore a tempo finito sarà:

$$\frac{1}{P(z)(z-1)} = \frac{z-e^{-1}}{e^{-1}(z+(e-2))}$$