Corso di Laurea in Informatica
Architettura degli elaboratori
a.a. 2021-2022

Architettura degli Elaboratori 2021-2022

Rappresentazione numeri reali

Rappresentazione altre informazioni

Prof. Elisabetta Fersini
elisabetta.fersini@unimib.it

Rappresentazione di numeri reali

- I numeri reali possono essere rappresentati come segue:
  - Virgola fissa
  - Virgola mobile (*floating point*)

Virgola fissa

- Il metodo più semplice per rappresentare numeri reali attraverso codici binari è quello detto in **Virgola Fissa**.
- Avendo a disposizione N bit essi vengono usati in questo modo:
  - 1 bit per il **segno** del numero da rappresentare
  - I<(N-1) bit per rappresentare la **parte intera** del numero
  - D=N-(I+1) bit per rappresentare la **parte decimale** del numero

+/-	I-1	I-2	...	0	-1	-2	...	-D
Segno	Parte Intera				Parte Frazionaria			

Virgola fissa

- Un sistema di numerazione in virgola fissa è quello in cui:
  - La posizione della virgola decimale è implicita
  - La posizione della virgola decimale uguale in tutti i numeri

- Con questo metodo l'intervallo di numeri interi rappresentabili è

$$[-(2^{I-1}), 2^{I-1}]$$

- L'intervallo rappresentabile dalla parte decimale è

$$[0, 1/2^{D}].$$

Virgola fissa

- Supponiamo di volere rappresentare numeri reali con 8 bit. Possiamo decidere di dedicare:
  - 1 bit al segno, 3 bit alla parte intera e 4 bit alla parte decimale.
  - Oppure 1 bit al segno, 5 bit alla parte intera e 2 bit alla parte decimale.
- La scelta è dettata dalle necessità pratiche.
  - Se volessimo rappresentare numeri che hanno una parte intera grande (e quindi che hanno un valore I grande) ma una precisione piccola (dedicando meno bit alla parte decimale del numero) sceglieremmo la **seconda opzione**.
  - Se volessimo rappresentare numeri che hanno parte intera piccola ma una grande precisione decimale, sceglieremmo la **prima opzione**.

Virgola fissa

- Consideriamo il numero 5.125 in base 10. Esso viene rappresentato in binario in virgola fissa come segue:
- Si considera la **parte intera** 5 e la si riporta in base 2

$$5_{10}=101_2$$

- La **parte decimale** viene scomposta per moltiplicazioni successive:

$0.125 \times 2 = 0.25 \rightarrow 0$ e riporto 0.25

$0.25 \times 2 = 0.5 \rightarrow 0$ e riporto 0.5

$0.5 \times 2 = 1 \rightarrow 1 \rightarrow$ stop

- Quindi $5.125_{10} = 101.001_2$

Virgola fissa

- Per rappresentare un numero binario in virgola fissa in base decimale, ricorriamo alla definizione vista nelle lezioni relative alle conversioni da base a base.
- Consideriamo il numero 101.01_2, e rappresentiamolo in base 10

$$101.01_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 = 5.25_{10}$$

Virgola fissa

- Svantaggi:
  - Rigidità della posizione assegnata alla virgola
    - Sono fissi i bit assegnati per codificare la parte intera e la parte frazionaria
  - Impatta sulla precisione nel codificare i numeri
    - Maggiore è il numero di bit per codificare la parte intera, più bassa sarà la precisione nel codificare i numeri piccoli

Virgola mobile

- Usa un bit per rappresentare il **segno *s***
- Usa altri bit per rappresentare la **mantissa *m***
- Usa altri per codificare l'**esponente *e***

s	e	e	...	e	m	m	...	m
Segno	esponente				mantissa			

- Dal 1985 adotta lo standard IEEE[1] 754[2] nella base 2.

[1]IEEE, Institute of Electrical and Electronics Engineers
[2]Adottata da tutti i programmi e le componenti di calcolo dell'elaboratore

Virgola mobile

- La posizione della virgola è variabile per avere una rappresentazione in notazione scientifica in cui:
  - un'unica cifra a sinistra della virgola
  - una parte frazionaria
  - un esponente al quale si deve elevare la base del numero
- *Esempi*:

$546.768_{10} \rightarrow 5.46768_{10} \cdot 10^2$ $\quad$ $\mathbf{1011.0110_2 \rightarrow 1{,}0110110_2 \cdot 2^3}$

Osservazione:

Nell'esempio l'esponente della base 2 è stato rappresentato per semplicità grafica in base 10; in realtà il calcolatore rappresenta in base 2 anche l'esponente

Virgola mobile

- Estende l'intervallo di numeri rappresentati a parità di cifre, rispetto alla notazione in *virgola fissa*
- Numeri reali rappresentati da una coppia di numeri:
  - Mantissa (M)
  - Esponente (E)
  - Segno (S)
  - Un numero X sarà scritto come $X = (-1)^S * M * B^E$

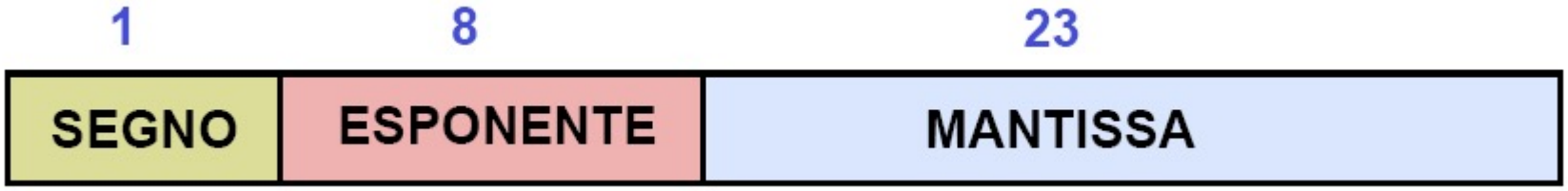
Virgola mobile

- La notazione scientifica per la base 2:

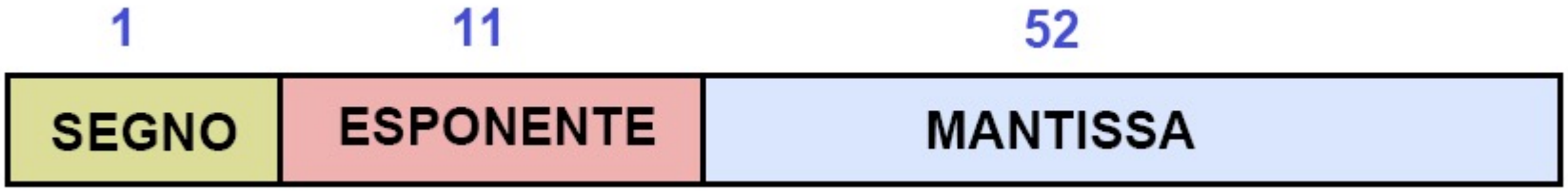
$$1,xx\ldots xx_2 \cdot 2^{yy\ldots yy_2}$$

dove le *x* rappresentano la parte frazionaria e le *y* l'esponente a cui elevare la base 2

- Semplice/singola precisione su 32 bit (notazione MS):



- Doppia precisione su 64 bit (notazione MS):



Virgola mobile

- Come convertire un numero reale da base 10 in base 2, in virgola mobile?

- Esempio: convertire $(7.5)_{10}$ in base 2.
  - si converte la parte intera $(7)_{10} = (111)_2$;
  - si considera la parte frazionaria $(0.5)_{10} = (1.0)_2$;
  - si considera il numero binario ottenuto convertendo parte intera e parte frazionaria

$$(111.1)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$$

Virgola mobile

- Osservazione: l'esponente può assumere valori negativi (quindi i numeri in virgola mobile possono essere rappresentati in MS e CA2)

- Una rappresentazione comune rappresenta:
  - l'esponente in eccesso 127 (per la semplicità dei calcoli)
  - la mantissa nell'intervallo [1, 2)
- Per calcolare il valore di un numero in virgola mobile:

$$X = (-1)^S * M * 2^{E-127}$$

Virgola mobile

Standard IEEE 754: normalizzata

- La codifica da binario a decimale dell'esponente assume un valore intero compreso tra 1 e 254 (estremi inclusi).
- La mantissa prevede una qualunque sequenza di bit.
- Numero corrispondente ad un float (32 bit) risulta:
  $N_{10} = (-1)^s \cdot 1.m \cdot 2^{e-127}$

  m é il numero intero ottenuto dalla codifica da binario a decimale della mantissa;

  e é il numero intero ottenuto dalla codifica da binario a decimale dell'esponente;

  s é il segno;

  la costante 127 é detta di polarizzazione.

Virgola mobile

- Il range è dato dal numero di bit dell'esponente
  - Il numero reale float più piccolo in valore assoluto si ha quando la mantissa *m* è composta da tutti 0 e l'esponente *e* assume il valore minimo, ossia 1:

$$N_{min} = 1.(0000000000\ldots0)_2 \cdot 2^{1-127} = 1.0 \cdot {}^{2-126}$$

  - Il numero reale float più grande si ha quando la mantissa *m* è composta da tutti 1 e l'esponente *e* assume il valore massimo, ossia 254: $N_{max} = 1.(1111111111\ldots1)_2 \cdot 2^{254-127} = 1.(1111111111\ldots1)_2 \cdot 2^{127} \approx 3.4 \times 10^{38}$
- La precisione è data dal numero di bit nella mantissa

Errore assoluto ed errore relativo

- Rappresentando un numero reale n in virgola mobile si commette un errore di approssimazione.
- In realtà viene rappresentato un numero razionale n' con un numero limitato di cifre significative:

  ERRORE ASSOLUTO: $e_A = n-n'$

  ERRORE RELATIVO: $e_R = e_A / n = (n-n')/n$

- L'ordine di grandezza dell'errore assoluto dipende dal *numero di cifre significative e dall'ordine di grandezza del numero*
- L'ordine di grandezza dell'errore relativo dipende solo dal *numero di cifre significative*

Rappresentazione di altre informazioni

- Caratteri
- Suoni
- Video
- ….

Rappresentazione di caratteri

- Possiamo associare a ogni **carattere** (quale lettera minuscola, lettera maiuscola, vocale accentata e segno di interpunzione) un numero.
- I caratteri possono essere rappresentati in:
  - **ASCII standard**: 1 carattere è rappresentato con 7 bit per un totale di 128 simboli rappresentabili (quali cifre, lettere maiuscole e lettere minuscole);
  - **ASCII estesa**: 1 carattere è rappresentato con 8 bit rappresentabili fino a 256 simboli (i caratteri in più sono usati per esempio per caratteri accentati);
  - **UNICODE**: 1 carattere è rappresentato con un numero maggiore di bit (tra 8 e 32 bit per carattere).

ASCII Standard

- ASCII standard contiene:
  - 26 + 26 lettere (maiuscole + minuscole)
  - 10 cifre decimali (da 0 a 9)
  - segni di interpunzione
  - caratteri di controllo
- Le cifre sono ordinate per valore
- Le lettere maiuscole sono ordinate alfabeticamente
- Le lettere minuscole sono ordinate alfabeticamente (e sono a distanza fissa dalle maiuscole)

ASCII Standard

- Dal 0 a 31 sono dei caratteri di controllo per periferiche
- Da 32 a 47 vari caratteri
- da 48 a 57 cifre decimali
- Da 58 a 64 vari caratteri
- Da 65 a 90 lettere maiuscole dell'alfabeto
- Da 91 a 96 vari caratteri
- Da 97 a 122 lettere minuscole dell'alfabeto
- Da 123 a 127 vari caratteri

ASCII Standard

bit		000	001	010	011	100	101	110	111
	esad.	0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0	NUL	DLE	spz	0	@	P	`	p
0001	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	7	BEL	ETB		7	G	W	g	w
1000	8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	A	LF	SS	*	:	J	Z	j	z
1011	B	VT	ESC	+	;	k	[	k	{
1100	C	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	E	SOH	RS	.	>	N	^	n	~
1111	F	SI	US	/	?	O		o	DEL

ρ(A) = 100 0001

→ 65

65 = 1 x 2^0 + 1 x 2^6

ρ({) = 111 1011

123=1 x 2^0+ 1 x 2^1 + 1 x 2^3 + 1 x 2^4 + 1 x 2^5 + 1 x 2^6 → 123

La conversione da b=2 a b=10 va da dx verso sx.

ASCII Standard

- Le parole sono sequenze di caratteri.

01101001 i	01101110 n	01100110 f	01101111 o	01110010 r
01101101 m	01100001 a	01110100 t	01101001 i	01100011 c
01100001 a				

bit		000	001	010	011	100	101	110	111
	esad.	0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0	NUL	DLE	spz	0	@	P	`	p
0001	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	7	BEL	ETB		7	G	W	g	w
1000	8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	A	LF	SS	*	:	J	Z	j	z
1011	B	VT	ESC	+	;	k	[	k	{
1100	C	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	E	SOH	RS	.	>	N	^	n	~
1111	F	SI	US	/	?	O		o	DEL

ASCII Esteso

- Con 1 byte (2^8=256) è possibile realizzare 256 diverse combinazioni, quantità sovrabbondante per la descrizione dei vari caratteri della tabella standard (un bit di troppo).
- L'ultimo bit alla descrizione del carattere viene definito parity bit, dedicato al controllo di parità (parity check).
  - Il bit di parità è un bit di controllo usato per prevenire errori nella trasmissione o nella memorizzazione dei dati. Tale sistema prevede l'aggiunta di un «bit ridondante», calcolato a seconda che il numero di bit che valgono 1 sia pari o dispari.
  - Se un numero dispari di bit è cambiato durante la trasmissione, allora il bit di parità non sarà corretto e indicherà che è avvenuto un errore durante la trasmissione

ASCII Esteso

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
20		!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
30	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
40	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
50	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
60	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
70	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	|	}	~	
80			‚	*ƒ*	„	…	†	‡	ˆ	‰	Š	‹	Œ			
90		‘	’	“	”	•	–	—	˜	™	š	›	œ			Ÿ
A0		¡	¢	£	¤	¥	¦	§	¨	©	ª	«	¬	-	®	¯
B0	°	±	²	³	´	µ	¶	·	¸	¹	º	»	¼	½	¾	¿
C0	À	Á	Â	Ã	Ä	Å	Æ	Ç	È	É	Ê	Ë	Ì	Í	Î	Ï
D0	Ð	Ñ	Ò	Ó	Ô	Õ	Ö	×	Ø	Ù	Ú	Û	Ü	Ý	Þ	ß
E0	à	á	â	ã	ä	å	æ	ç	è	é	ê	ë	ì	í	î	ï
F0	ð	ñ	ò	ó	ô	õ	ö	÷	ø	ù	ú	û	ü	ý	þ	ÿ

ASCII Esteso

- La tabella ASCII estesa varia come già accennato in base alla zona geografica di utilizzo e al software utilizzato. Le principali estensioni previste dall'ISO 8859 sono:
  - ISO-8859-1(Latin-1), utilizzato nella Zona Europea Occidentale
  - ISO-8859-2 (Latin-2), utilizzato zona Europea Orientale (Serbia, Albania, Ungheria, Romania)
  - ISO-8859-3 (Latin-3), utilizzato nell' Europea del Sud (Malta), include l'Esperanto
  - ISO-8859-4 (Latin-4), obsoleto
  - ISO-8859-5 (Part 5, Cyrillic), alfabeto Cirillico
  - ISO-8859-6 (Part 6, Arabic), alfabeto Arabo
  - ISO-8859-7 (Part 7, Greek), alfabeto Greco
  - ISO-8859-8 (Part 8, Hebrew), alfabeto Ebraico

Osservazioni

- ASCII è un codice accettato da tutti i computer.
  - Usato dai tempi delle telescriventi durante la prima guerra modiale.
- Tuttavia non considera i caratteri internazionali di numerose lingue straniere.
- Per ovviare a tale problematica, è stata introdotta un'ulteriore codifica, ossia UNICODE

UNICODE

- E’ una evoluzione dello standard ASCII
- Unicode è uno standard per la rappresentazione di testo
- Codifica tutti i caratteri utilizzati nelle principali lingue del mondo
- Indipendente dalla lingua, dal sistema operativo e dal programma utilizzato
- Inizialmente rappresentato come una codifica su 16 bit, ma poi esteso a 24 e 32 bit
    - Disporre di 32 bit significa avere 4 miliardi di caratteri diversi codificabili!
- Unicode è in continua evoluzione e continua ad aggiungere sempre più caratteri

UNICODE

- Un carattere UNICODE è caratterizzato dal suo codice numerico, detto code point, solitamente rappresentato con 8 cifre esadecimali
  - Esempio: «fi» è rappresentato dal codice 0000FB01
  - Esempio: il simbolo “do doppio diesis strumentale” della notazione musicale greca antica (simile a una lambda maiuscola con una gambetta) è 0001D235
- Con UNICODE, è possibile creare e gestire senza troppa pena documenti multilingue:

A,Δ,Й,,ק,ﻉ, あ, 叶, 葉

- In particolare, tutti gli standard W3C (incluso HTML) supportano UNICODE
- A marzo 2020 è stato presentato l’ultima versione UNICODE 13.0

Il problema della codifica

- UNICODE può codificare 4.294.967.296 caratteri distinti
- Ogni carattere occupa 32 bit (contro gli 8 delle altre codifiche); i documenti richiedono quindi 4 volte lo spazio
- La quasi totalità dei documenti usa da 60 a 1000 caratteri, per cui basterebbero da 6 a 10 bit.
- Per ovviare a questo problema, e garantire maggiore compatibilità con S.O. e applicazioni che non sono in grado di gestire 32 bit per carattere, UNICODE definisce vari formati di codifica più compatti

UTF-8

- UTF-8 (8-bit UCS/Unicode Transformation Format) è una codifica a lunghezza variabile fra una sequenza di valori a 8 bit e una sequenza di caratteri UNICODE
  - I primi 128 caratteri di UNICODE (0-7F), equivalenti ai caratteri ASCII, sono codificati con il loro codice “naturale”
  - Tutti gli altri caratteri sono codificati con due, tre o quattro valori a 8 bit (byte)

UTF-8

- Nel linguaggio di programmazione Java (e derivati), le stringhe sono codificate con UTF-8; i programmi Java sono quindi in grado di gestire nativamente UNICODE.
- I file system Macintosh, DVD, e alcuni su UNIX usano UTF-8 per i nomi dei file.
- Gli standard relativi al Web e alla e-mail richiedono che un programma compatibile supporti *almeno* UTF-8 come standard di codifica.
- I programmi che trattano testi ASCII sono generalmente UTF-8 compatibili.

Link di interesse

- Il sito principale relativo a UNICODE è http://www.unicode.org
  - la pagina http://unicode.org/charts/ è particolarmente affascinante
- Alcune emoji codificate in UNICODE 13.0
  - https://youtu.be/cxRDjci6POs

Riferimenti

- Tabella ASCII con rappresentazione DEC + BIN + HEX + OCT File
- Numeri in virgola mobile: Appendice B (esclusa parte su IEEE754) libro A. S. Tanenbaum, "Structured computer Organization", 5th ed.
- Rappresentazione dei numeri in virgola mobile: Appendice B (solo parte relativa all'introduzione dello standard IEEE754) del libro di A. S. Tanenbaum, "Structured computer Organization", 5th ed.