La teoria degli insiemi fuzzy:

idee di base, utilizzi ed eredità a 50 anni dalla nascita

Davide Ciucci

Sommario

Questo articolo presenta un'introduzione agli insiemi fuzzy e offre una panoramica della loro teoria ad oltre cinquant'anni dalla loro introduzione, avvenuta nel 1965 ad opera di Lotfi Zadeh. Oltre ai concetti di base, vengo dati alcuni cenni storici sul contesto in cui si sono sviluppati e alle discipline a cui hanno contribuito, per poi illustrarne i principali successi. Infine, il ruolo degli insiemi fuzzy nella gestione dell'incertezza viene esaminato e l'eredità che lasciano in diversi settori messa in luce.

Abstract

This paper introduces fuzzy sets and offers an overview of their theory after more than fifty years since their appearance, occurred in 1965 due to Lotfi Zadeh. Besides the basic notions, some hints on the historical context in which they developed and the disciplines they have contributed to are put forward. Then, the major successes are illustrated. Finally, the role of fuzzy sets in uncertainty management is examined and their legacy in several disciplines is highlighted.

Keywords: fuzzy set; membership degree; uncertainty; control theory; possibility theory; many-valued logic; clustering.

1. Introduzione ed idee di base

Un'altezza di un metro e settanta fa di me una persona alta?

Cercando il termine *fuzzy* nel dizionario Collins, si trovano come possibili traduzioni i termini crespo (riferito ai capelli), confuso, indistinto, sfuocato. Nel caso degli insiemi, sfuocato e sfumato sono le traduzioni più utilizzate e stanno ad indicare un insieme dai contorni non ben definiti.[1] Per dirlo con le parole del suo ideatore, Lotfi Zadeh, un insieme fuzzy è "una classe di oggetti con un continuo di gradi di appartenenza" [1] o in altri termini, una "classe che esprime il fatto che alcuni oggetti sono più nella classe di altri" [2]. L'idea di base è quindi quella di poter rappresentare le situazioni in cui non tutti gli elementi di un insieme vi appartengono allo stesso modo. Si pensi all'insieme delle persone alte: c'è chi è sicuramente alto e quindi appartiene senza dubbi all'insieme, chi sicuramente è basso e quindi non appartiene all'insieme e poi una fascia intermedia che a diversi gradi può essere considerata come un elemento delle persone alte.

Dal punto di vista formale viene spesso rappresentato tramite i gradi di appartenenza (*membership degree*), ovvero ad ogni elemento dell'insieme viene associato un valore tra 0 e 1 che indica *quanto* appartenga all'insieme.[2] Sebbene corretta, questa visione è parziale e potenzialmente fuorviante. Parziale perché i valori nell'intervallo [0,1] sono una scelta arbitraria, dato che molte altre soluzioni sarebbero altrettanto valide.[3] Ad esempio, in alcuni contesti potrebbe avere maggior significato l'insieme di valori {molto poco, poco, abbastanza, molto, assolutamente}. Fuorviante perché dimentica il significato e le proprietà del grado di appartenenza, causa questo della diatriba – si spera ora risolta – con gli studiosi di probabilità, data la sua presunta sovrapposizione con la probabilità di un evento, anch'essa espressa tramite un valore tra 0 e 1[4]. Ritorneremo nel dettaglio su questo punto più avanti, limitandoci ora a sottolineare come non basti assegnare un valore in [0,1] per attribuire a qualcosa l'etichetta "fuzzy", è necessario dare un'adeguata interpretazione e delle operazioni corrispondenti all'idea di insieme sfumato che si vuole rappresentare.

---

1 In italiano, tuttavia, il termine non viene quasi mai tradotto, preferendo il termine inglese originale. Al contrario in francese, non è raro trovare la traduzione *ensemble flou* o in spagnolo *conjunto difuso*.

2 Formalmente un insieme fuzzy A sull'universo X viene rappresentato da una funzione. $f_A : X \rightarrow [0,1]$ dove $f_A(x)$ esprime il grado di appartenenza di x all'insieme A.

3 L'insieme [0,1] può infatti essere sostituito da un qualsiasi insieme parzialmente ordinato. Si ricorda che un insieme è parzialmente ordinato se dotato di una relazione riflessiva, anti-simmetrica e transitiva. Sono ad esempio relazioni d'ordine, il normale ordinamento tra numeri (in questo caso l'ordine è totale) e l'essere sottoinsieme tra due insiemi.

4 Una distribuzione di probabilità è infatti una funzione $p : X \rightarrow [0,1]$.

1.1 Cenni storici sulla nascita degli insiemi fuzzy e delle discipline correlate

Storicamente la nascita della teoria dei fuzzy set ha una data precisa: il 1965, anno di pubblicazione da parte di Lotfi Zadeh dell'articolo fondante la disciplina e dal titolo appunto "Fuzzy Sets" [1]. Tuttavia, le idee contenute in questo primo lavoro non rappresentano uno "strano, gratuito oggetto che improvvisamente è apparso dal nulla" ma piuttosto "una cristallizzazione di intuizioni di alcuni eminenti scienziati del secolo" [3]. Il problema di rappresentare qualche forma di vaghezza, è infatti emerso a metà del '900 in diverse discipline, quali logica, linguistica, fisica e matematica. Importanti, anche per gli sviluppi successivi della teoria dei fuzzy set, sono stati i primi tentativi negli anni '30 di proporre una logica con tre valori di verità (al posto della classica dicotomia vero/falso) da parte di Jan Łukasiewicz. Approcci molto simili a quello sviluppato da Zadeh e basato su funzioni, si trovano tra gli anni quaranta e cinquanta in diversi autori: Weyl, Kaplan e Scott, Menger. Quest'ultimo sembra essere stato il primo ad utilizzare il termine *ensemble flou* (attualmente l'equivalente francese di fuzzy set), in un suo articolo del 1951 e da lui tradotto in inglese come *hazy* (nebuloso, sfocato) *set* [3]. A differenza di Zadeh, però l'interpretazione del grado di appartenenza ad un insieme è quella di probabilità e non è del tutto chiaro cosa rappresenti questa probabilità.

Una volta introdotto da Zadeh, il nuovo concetto è poi stato applicato a diversi campi, facendo nascere nuove discipline. Senza ombra di dubbio l'influenza principale degli insiemi fuzzy è stata in teoria del controllo: già dagli anni '70 sono apparsi i primi contributi nel settore, per poi assistere negli anni '80 alle prime applicazioni industriali [4]. Oggigiorno, i sistemi di controllo fuzzy sono in moltissimi dispositivi di uso quotidiano: macchine fotografiche, forni, lavatrici, etc.… tanto è vero che il termine è diventato di uso comune e spesso, infatti, nelle descrizioni di questi prodotti si trovano riferimenti alla "logica fuzzy". Il termine logica è da intendersi in questo caso in senso ampio, in opposizione alla cosiddetta logica fuzzy in senso stretto o logica matematica fuzzy. L'avvento degli insiemi fuzzy è stato infatti di grande impulso per lo sviluppo matematico delle cosiddette logiche multi-valore. Analogamente all'idea di insieme graduale, le logiche multi-valore non considerano solo il vero o falso come valori di verità, ma ne introducono altri. Dal caso più semplice in cui si aggiunge il "non so" fino ad infiniti valori tra 0 e 1.

Altre due discipline emerse grazie agli insiemi fuzzy e alle idee di Zadeh sono la teoria della possibilità e negli ultimi anni la *granular computing*. L'utilizzo dei gradi di appartenenza per definire una distribuzione di possibilità è stato suggerito da Zadeh stesso in [5], lavoro in cui vengono anche presentati i mattoni costituenti della teoria, che è stata in seguito sviluppata da Dubois e Prade [6]. Inizialmente, la teoria della possibilità fu pensata per dare una semantica graduale a frasi del linguaggio naturale, come ad esempio "Tizio è giovane", "Caio può saltare x cm in alto", assegnando loro un valore di possibilità. In seguito, se ne è esteso l'utilizzo per rappresentare credenze, preferenze o per ragionare con probabilità imprecise e, ad oggi, numerose sono le sue applicazioni nel campo dell'intelligenza artificiale.

Anche il termine granular computing è stato introdotto da Zadeh nel 1979 [7]. Come dice il nome è la disciplina che si occupa di rappresentare e processare l'informazione sotto forma di qualche tipo di aggregato, generalmente chiamato granulo di informazione, risultato di un processo di astrazione o estrazione di conoscenza dai dati. Un granulo è quindi un insieme di dati raggruppati in base alla loro similarità, vicinanza fisica, coerenza e così via. Ad esempio, considerando le opere di un museo, possiamo considerare come granuli l'insieme dei quadri impressionisti, oppure l'insieme delle opere in una determinata stanza o ancora quelle a prevalenza di colore blu. Ovviamente esistono diversi livelli di astrazione e quindi di granularità. Ad esempio, possiamo considerare un libro come composto da capitoli, ad un livello più fine da sotto-capitoli, poi da paragrafi, etc. Ad oggi, la granular computing sta emergendo come un settore a sé stante che interseca e raggruppa diverse discipline, tra cui, ovviamente, gli insiemi fuzzy.

1.2 Concetti alla base della teoria degli insiemi fuzzy

Diamo ora uno sguardo più da vicino agli elementi base della teoria degli insiemi fuzzy: funzione di appartenenza, operazioni insiemistiche e il principio di estensione.

Funzione di appartenenza

Abbiamo visto che un oggetto appartiene ad un insieme fuzzy con un grado di appartenenza, generalmente espresso da un valore tra 0 e 1. Il concetto di *membership degree* è quindi alla base di tutta la teoria ed è definito dalla funzione di appartenenza $f:X\rightarrow[0,1]$, generalizzazione della funzione caratteristica di un insieme classico (in questo contesto detto anche booleano, esatto o *crisp*) $A:X\rightarrow\{0,1\}$. Ovviamente f(x) = 1 significa totale appartenenza all'insieme, mentre f(x) = 0 totale non-appartenenza all'insieme. Consideriamo come esempio di voler rappresentare l'insieme delle Persone Alte. Classicamente dovremmo dare una soglia, ad esempio un metro e settanta centimetri, al di sopra della quale collochiamo le persone alte. Nel caso fuzzy, invece possiamo agire come in Figura 1, dove, ad esempio, il grado di appartenenza all'insieme delle Persone Alte corrispondente a 160 cm è 1/3, mentre a 180 cm è 1. Ovviamente la definizione di un insieme fuzzy riguardante l'altezza è associata ad un preciso contesto: nel corso degli anni e a seconda della popolazione di riferimento il concetto può cambiare. Inoltre, ribadiamo che la scelta dell'intervallo [0,1] è una convenzione arbitraria, altri insiemi possono essere utilizzati. L'importante nella definizione è che non esiste una soglia al di sopra della quale si è alti e al di sotto bassi, ma c'è una gradualità, un continuo di sfumature. Ciò che conta non è tanto l'esatto valore di f(x), non sempre facile da ottenere, quanto l'ordine relativo dei diversi oggetti.

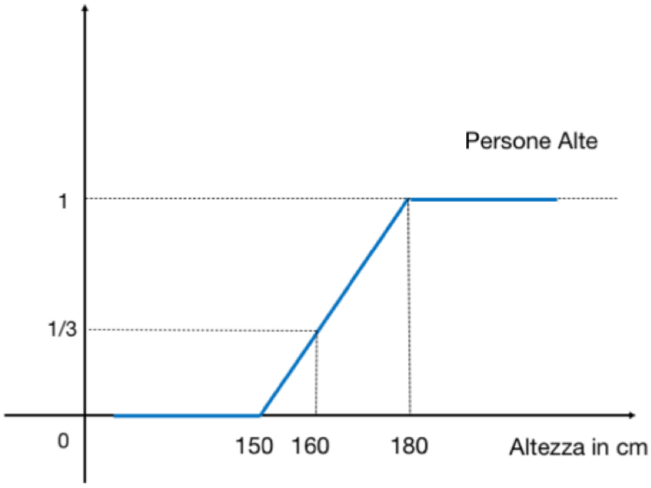

Figura 1
Insieme Fuzzy delle Persone Alte

Principio di estensione

Abbiamo ora definito un nuovo concetto di insieme. Come possiamo estendere le operazioni insiemistiche (intersezione, unione, complemento) o altre funzioni matematiche in modo da poter agire su insiemi fuzzy? Zadeh introdusse il principio di estensione che permette di generalizzare una qualsiasi funzione G da insieme classici ad insiemi fuzzy. Ad esempio, si consideri un'ipotetica funzione G che data l'altezza di una persona, restituisce il suo numero di scarpe. Il principio di estensione permette di definire un insieme fuzzy sul numero di scarpe a partire dall'insieme delle Persone Alte, che, data la corrispondenza che esiste in media tra altezza e dimensioni dei piedi, potremmo chiamare insieme delle Scarpe (o Piedi) Grandi.

Per una definizione formale del principio di estensione si veda l'apposito riquadro.

Operazioni insiemistiche

La definizione delle operazioni insiemistiche viene data con il metodo punto a punto (*pointwise*), ovvero fissando un elemento ed utilizzando solo il suo grado di appartenenza (non quello di altri elementi) agli insiemi fuzzy coinvolti. L'operazione standard che viene fatta corrispondere all'intersezione è solitamente il minimo dei gradi di appartenenza agli insiemi fuzzy coinvolti ed il massimo per quanto riguarda l'unione (si veda il riquadro 1). Il complemento, invece, viene spesso definito, per un insieme fuzzy f e un oggetto x, come 1-f(x).

Ad esempio, facendo riferimento all'insieme delle Persone Alte, una persona alta 160 cm appartiene all'insieme delle Persone Non Alte con valore 2/3.

Notiamo tuttavia che questo è solo uno dei molti modi di poter definire intersezione ed unione come estensione delle classiche operazioni insiemistiche. Zadeh stesso nell'articolo del '65 ne definì diverse e nel seguito molte altre ne sono state aggiunte. Una famiglia spesso utilizzata è quella delle norme e co-norme triangolari, operazioni definite per via assiomatica in modo da soddisfare alcune richieste minime.

Infine, dati due insiemi fuzzy f e g quando possiamo dire che uno è sottoinsieme (fuzzy) dell'altro (e scriviamo $f \subseteq g$)? Anche in questo caso si utilizza una estensione punto a punto del concetto Booleano, come specificato nel riquadro 1, dove ogni elemento deve avere grado di appartenenza a f minore di quello a g. Come esempio possiamo considerare le Persone Molto Alte, che sicuramente sono un insieme "più piccolo" delle persone alte. In Figura 2, notiamo infatti che la curva delle Persone Molte Alte è sempre al di sotto di quella delle Persone Alte: dato un soggetto di 180 cm appartiene sicuramente (cioè con valore 1) all'insieme delle Persone Alte, ma non pienamente a quello delle Persone Molto Alte.

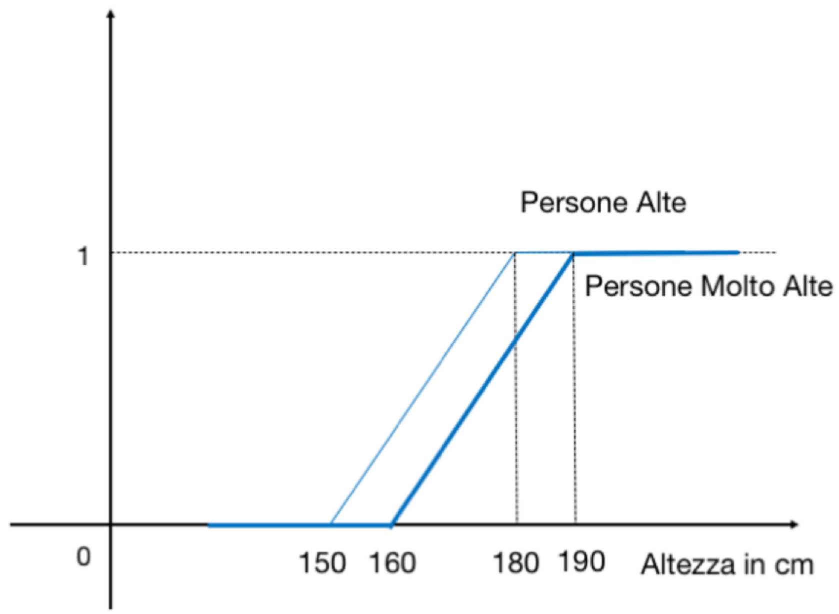

Figura 2
Insieme delle persone Molto Alte

2. Fuzziness nel contesto dell'informazione incerta

Un bicchiere mezzo pieno non è un bicchiere pieno con probabilità un mezzo.

Nell'introduzione abbiamo utilizzato il grado di appartenenza per definire un insieme fuzzy. Vogliamo ora analizzare quali interpretazioni può assumere questo valore ed il suo rapporto con la teoria della probabilità.

2.1 Interpretazione di un insieme fuzzy

Si considerino queste tre frasi:

1. Tizio è quasi calvo
2. Tizio è quasi certamente calvo
3. A Maria piacciono gli uomini calvi.

Nel primo caso, *quasi* esprime una vicinanza alta ma non totale all'idea di uomo calvo. Nel secondo caso *quasi* è riferito a "certamente", si tratta quindi di un'incertezza sul fatto che Tizio sia o meno calvo. Infine, nell'ultimo caso stiamo esprimendo una preferenza di Maria all'interno dell'insieme uomini calvi. Queste tre situazioni sono esemplificative delle possibili interpretazioni di un grado di appartenenza, rispettivamente come similarità, incertezza o preferenza [8].

L'utilizzo del grado di appartenenza come similarità sottintende l'idea che ci siano elementi tipici di un determinato insieme (gli uomini calvi), altri che sicuramente non vi appartengono e una gradualità di sfumature per i rimanenti. Strettamente connesso a questa interpretazione, è il concetto di distanza, utile per determinare il grado di vicinanza agli elementi tipici e quindi di appartenenza all'insieme. Ad esempio, se stiamo parlando di automobili grandi, possiamo considerare un modello di Volvo come elemento tipico di questa categoria e vedere quanto le altre vetture vi si discostino. Questa interpretazione la si incontra nelle principali applicazioni degli insiemi fuzzy.

Nella seconda interpretazione, la funzione di appartenenza viene utilizzata per dotare di un grado l'incertezza relativa ad un qualche fatto, nel nostro esempio l'idea di "certamente calvo". Siamo infatti in presenza di un fatto già incerto: l'espressione "certamente calvi" sottintende la possibilità che altri siano calvi ma non con certezza. Gli insiemi fuzzy in questo contesto coincidono con le cosiddette distribuzioni di possibilità, alla base della già menzionata teoria della possibilità.

Infine, l'idea di preferenza: il grado di appartenenza di un individuo all'insieme degli uomini calvi esprime in questo caso una preferenza di Maria. Questa interpretazione trova il suo principale utilizzo in teoria delle decisioni, dove appunto è necessario esprimere delle preferenze (graduali) rispetto a determinati criteri, ed ha favorito lo sviluppo di un'ampia letteratura, in particolare sulle modalità di aggregare diversi insiemi fuzzy (e quindi diverse preferenze).

2.2 Fuzzy set vs teoria della probabilità

Dalla discussione precedente dovrebbe essere chiaro che un grado di appartenenza non rappresenta una probabilità. Per riassumere la differenza con uno slogan, si è soliti dire che "Un bicchiere mezzo pieno non è un bicchiere pieno con probabilità un mezzo". C'è quindi una differenza di interpretazione tra funzione di appartenenza e distribuzione di probabilità, sebbene entrambe siano funzioni a valori in [0,1]. Questa differenza si riflette anche nelle diverse proprietà che le due funzioni devono avere. Nel caso della probabilità, la somma di tutti i casi possibili deve dare uno (se lancio una moneta, al 100% uscirà testa o croce), nel caso fuzzy invece questo non è richiesto. Le due teorie sono quindi distinte e complementari: trattano due aspetti differenti dell'incertezza che non sono in competizione tra loro. C'è voluto molto per arrivare a questa visione, spesso ancora non compresa, sia dai detrattori degli insiemi fuzzy sia da chi utilizza il termine fuzzy attribuendogli significati e proprietà tipici della probabilità. Ad arrivare a questo risultato è sicuramente stato utile il dibattito del 1995 tra studiosi di probabilità e di teoria degli insiemi fuzzy apparso sulla rivista Technometrics, a cui si rimanda per una trattazione più approfondita delle diverse posizioni [9].

Le cose si complicano ulteriormente, se prendiamo in considerazione l'utilizzo degli insiemi fuzzy in teoria della possibilità. Da un lato perché le terminologie si avvicinano: possibilità vs probabilità e distribuzione di possibilità vs distribuzione di probabilità. Dall'altro perché in effetti, ci sono punti di contatto tra le due teorie anche dal punto di vista matematico.[5] Questo contrasta con le interpretazioni di cui si è parlato, ma apre alla possibilità di utilizzare le funzioni di appartenenza per rappresentare l'informazione incompleta in statistica [2]. Anche in questo caso si ha quindi una complementarità delle due teorie con la possibilità di utilizzarle assieme per rappresentare forme più complesse di incertezza.

3. Il successo: i sistemi di controllo ed il clustering

"La teoria fuzzy è errata, errata e perniciosa […] La logica fuzzy è la cocaina della scienza." William Kahan, 1972

Il successo degli insiemi fuzzy è oggigiorno indubbio, nonostante i detrattori dei primi anni. Famoso è il dibattito scaturito da un intervento molto critico di Charles Elkan alla undicesima conferenza americana sull'intelligenza artificiale a cui è stato dedicato un numero speciale di IEEE Expert nel 1994 [10], successivamente ripreso nel 2001 in alcuni interventi su International Journal of Approximate Reasoning [11]. Altrettanto *tranchant* sono state le dichiarazioni di alcuni "avversari". Oltre alla citazione in apertura di paragrafo, ne ricordiamo altre due spesso menzionate:

- "La fuzzificazione è una specie di permissivismo scientifico. Tende a portare a slogan socialmente accattivanti, non accompagnati dalla

[5] Infatti, le misure di necessità della teoria della possibilità sono un caso speciale di funzioni di probabilità dal basso.

disciplina di un duro lavoro scientifico e dalla paziente osservazione" (Rudolf Kalman, 1972);

- "La *fuzziness* è un travestimento della probabilità. Potrei disegnare un sistema di controllo basato sulla probabilità capace di fare le stesse cose che voi potete fare con la logica *fuzzy*" (Myron Tribus, 1988).

I fatti hanno poi smentito queste critiche e tra le numerose applicazioni degli insiemi fuzzy, ritroviamo ad esempio: i sistemi di controllo, il clustering, l'analisi dei dati, l'ottimizzazione, l'elaborazione di immagini, la ricerca operativa, *l'information retrieval*, etc…

A testimonianza del successo non solo accademico, basti pensare a quello industriale con oltre 50.000 brevetti depositati [12] ed al fatto che il termine fuzzy sia entrato nel linguaggio comune: dalle lavatrici con "fuzzy logic", ai titoli di romanzi [13] o al nome di circoli ricreativi [14].

Diamo ora qualche dettaglio sulle due applicazioni più diffuse: i sistemi di controllo ed il clustering.

3.1 Sistemi di controllo

Il successo principale e assolutamente non previsto degli insiemi fuzzy è sicuramente nei sistemi di controllo fuzzy. Gli insiemi fuzzy sono risultati utili per rappresentare in modo semplice ed intuitivo concetti vaghi come caldo, freddo, veloce. Un sistema di controllo fuzzy è basato su regole ed è costituito da tre fasi: fuzzificazione, inferenza e de-fuzzificazione. La prima consiste nel generare gli insiemi fuzzy necessari, come Persone Alte in Figura 1. Poi si applicano delle regole, solitamente fornite da un esperto in forma intuitiva, ad esempio: "SE la temperatura è alta ALLORA aumenta la velocità del condizionatore". Infine, l'insieme fuzzy risultante viene tradotto in una opportuna quantità fisica, in modo da agire sul sistema da controllare. Nell'esempio precedente, stabilito che va aumentata la velocità del condizionatore, occorre stabilire quanto va aumentata e tradurlo quindi in un comando operativo. Questo tipo di controllori sono stati introdotti per la prima volta nel 1975 da Mamdani [15] e hanno visto le prime applicazioni industriali negli anni '80, riscontrando un enorme successo inizialmente in Giappone per poi estendersi a Stati Uniti ed Europa. Di questo tipo di controllo fuzzy, ne ha parlato diffusamente Andrea Bonarini su questa stessa rivista (si veda [16]) a cui rimandiamo per una trattazione approfondita.

Nel seguito il controllo fuzzy è cambiato, allontanandosi dalla sua originalità e vicinanza con le idee di Zadeh, per andare incontro alla teoria del controllo più tradizionale. Le regole sono state modificate, diventando più complesse e meno intuitive e dando la possibilità di applicare tecniche standard di teoria del controllo ai sistemi fuzzy. Negli sviluppi recenti, quindi, si può dire che "il termine fuzzy perde parte del suo interesse storico", lasciando incerti gli sviluppi stessi del controllo fuzzy [4].

3.2 Clustering

Obbiettivo del clustering è raggruppare elementi simili tra loro o simili ad uno o più elementi centrali, in modo che i diversi gruppi siano il più possibile omogenei al loro interno e allo stesso tempo diversi tra loro. È quindi uno dei metodi utilizzati nella *granular computing* per definire i “granuli” base di conoscenza. Nella variante fuzzy, i diversi gruppi non sono separati tra loro ma possono essere sovrapposti. Quindi, un oggetto può appartenere a gruppi diversi, con un determinato grado di appartenenza. Si ottiene quindi una cosiddetta partizione fuzzy, generalizzazione della classica nozione di partizione di un insieme.

Nella versione originale del fuzzy clustering, è presente il vincolo che i diversi gradi di appartenenza di un elemento sommino a uno, come se fosse una probabilità e quindi non proprio fedele allo spirito degli insiemi fuzzy. Sono state poi introdotte versioni successive in cui questo vincolo viene rilassato.

Il grosso vantaggio del fuzzy clustering è che permette di migliorare alcuni aspetti algoritmici della versione classica, primo fra tutti il fatto che il risultato non dipenda fortemente dalla fase di inizializzazione.[6] Inoltre, sebbene erediti dalla versione classica la caratteristica di non garantire la migliore soluzione possibile ha il pregio di evitare quelle peggiori.[7] Questo permette di utilizzarlo in modo proficuo anche nei casi in cui si sia interessanti ad un risultato “classico” senza sovrapposizione tra i diversi gruppi.

4. Conclusione: attualità e futuro degli insiemi fuzzy

Dopo oltre cinquant’anni, possiamo dire che il nucleo della teoria degli insiemi fuzzy sembra essere ormai stabile, ampiamente studiato e con concetti ben consolidati, senza che si sia assistito a grossi cambiamenti negli ultimi anni. Come evidenziato in questo contributo, gli utilizzi degli insiemi fuzzy sono molteplici e coinvolgono diversi settori. In particolare, assodato e proficuo è l’impiego in teoria del controllo ma l’utilizzo è accettato anche in molte altre discipline, menzionate nel paragrafo 3. In altre invece, si devono ancora diffondere e ci sono le possibilità perché questo avvenga in modo proficuo. Un esempio è l’apprendimento automatico (*machine learning*), in cui il contributo principale sarebbe la gestione dell’incertezza in modo diverso e complementare alla teoria della probabilità tramite un utilizzo degli insiemi fuzzy intesi come distribuzioni di possibilità [17]. D’altro conto va stigmatizzata la tendenza a voler fuzzificare tutto, sia in contesti matematici che applicativi. In campo teorico, si è assistito, infatti, negli ultimi anni ad un proliferare di approcci sempre più complessi e la tendenza a rendere fuzzy qualsiasi concetto matematico senza alcuno scopo preciso. Nelle applicazioni, invece, capita che venga etichettato come “fuzzy” un qualsiasi valore tra zero e uno, senza considerarne la sua reale interpretazione e la sua vicinanza o meno al resto della teoria. Infine, sottolineiamo ancora una volta, che la ricchezza della teoria degli insiemi fuzzy è anche nell’eredità che lascia in molte altre discipline, in cui sviluppi futuri sono possibili ed auspicabili: la teoria delle possibilità, le logiche multi-valore, la granular computing.

---

[6] Come avviene ad esempio con il metodo *k-means*, lo standard *de facto*, che richiede di stabilire a priori il numero di gruppi in cui si vogliono dividere gli oggetti.

[7] Come molti algoritmi di ottimizzazione trova soluzioni sub-ottimali, i cosiddetti minimi locali ma rispetto al metodo tradizionale, evita i minimi locali peggiori.

Riquadro 1 - Il principio di estensione

Sia G una funzione da un insieme classico X ad un altro Z, ovvero, $G: X \rightarrow Z$ ed $f: X \rightarrow [0,1]$ un insieme fuzzy su X. L'obiettivo è estendere la funzione G in modo che possa agire su insiemi fuzzy, ottenendo quindi in input l'insieme f e restituendo un insieme fuzzy su Z. Formalmente con $\hat{G}(f): Z \rightarrow [0,1]$ con

$$\hat{\imath}(f)(z) = \begin{cases} \sup\limits_{G^{-1}(z)} f(x) & G^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & G^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

dove la funzione $G^{-1}(z)$ è la pre-immagine di : $G: G^{-1}(z) = \{x : G(x) = z\}$.

Ad esempio, si consideri come funzione : $G: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ l'elevamento a quadrato di un numero intero, e l'insieme fuzzy $f: \mathbb{Z} \rightarrow [0,1]$ definito come f(1)= 0.3, f(-2) = 0.4, f(2)=0.8. Allora, avremo che $\hat{G}(f): \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ con $\hat{G}(f)(1) = 0{,}3$, $\hat{G}(f)(4) = 0{,}8$ e $\hat{G}(f)(z) = 0$ per tutti i valori di diversi da 1 e 4.
Riprendendo l'esempio del testo, G sarebbe la funzione che mappa altezza con numero di scarpe, f l'insieme delle persone alte e $\hat{G}$ l'insieme delle persone dalle scarpe grandi.

Riquadro 2

Nel seguito sono riportate le operazioni insiemistiche di base che furono introdotte da Zadeh già nel 1965.

Intersezione:	$(f \cap g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$
Unione:	$(f \cup g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$
Complemento:	$f^c(x) = 1 - f(x)$
Sottoinsieme:	$f \subseteq g \;\; sse \;\; \forall x \;\; f(x) \leq g(x)$

Sebbene queste siano le più utilizzate nelle applicazioni, molte altre sono possibili. In particolare, menzioniamo quelle basate su norme triangolari (t-norme) per definire l'intersezione e co-norme triangolari (t-conorme) per definire l'unione. T-norme e t-conorme sono operatori binari su [0,1] che devono soddisfare le proprietà di associatività, commutatività e monotonia.

Riquadro 3

Lotfi Zadeh

(4 febbraio1921- 6 settembre 2017)

Nasce il 4 febbraio 1921 a Baku (attualmente Azerbaigian, al tempo Repubblica Socialista Sovietica) dove il padre, iraniano, lavora come giornalista. La madre è invece pediatra, nata in Russia e di cittadinanza iraniana. Nel 1931 si trasferiscono a Teheran dove Lotfi frequenta una scuola di missionari presbiteriani e successivamente si laurea nel 1942 in ingegneria elettrica all'università di Teheran. Dopo avere lavorato con il padre come commerciante per l'esercito americano di stanza in Iran, nel 1944 si trasferisce negli Stati Uniti. Qui otterrà il master al Massachusetts Institute of Technology nel 1946 e nel 1949 il dottorato presso la University of Columbia, entrambi in ingegneria elettrica. Successivamente insegna per dieci anni presso la University of Columbia, diventando Full Professor nel 1957, per poi trasferirsi a Berkeley, University of California, dove rimane per tutto il resto della lunga carriera, diventando professore emerito nel 1991. Oltre all'invenzione degli insiemi fuzzy, ha dato un contributo importante nell'elaborazione dei segnali introducendo, insieme al suo supervisore di dottorato J. Ragazzini, i metodi basati sulla trasformata zeta, poi diventati lo standard nel settore.

Bibliografia

[1] Zadeh, L.A. (1965) "Fuzzy sets", *Information and Control*, 8(3), 338-353

[2] Dubois, D., Prade, H. (2015) "The legacy of 50 years of fuzzy sets: A discussion", *Fuzzy Sets and Systems*, 281, 21-31

[3] Dubois, D., Ostasiewicz, W., Prade, H. (2000), "Fuzzy Sets: History and Basic Notions", in Dubois, D., Prade, H. (a cura di) *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Handbooks of Fuzzy Sets Series, Kluwer, 21-124

[4] Guerra, T.M, Sala. A., Tanaka, K. (2015), "Fuzzy control turns 50: 10 years later", *Fuzzy Sets and Systems*, 281, 168-182

[5] Zadeh, L.A. (1978) "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 3–28

[6] Dubois, D., Prade, H. (1988), *Possibility Theory*, Plenum, New York

[7] L.A. Zadeh (1979), "Fuzzy sets and information granularity", in N. Gupta, R. Ragade, R. Yager (a cura di), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 3–18.

[8] Dubois, D., Prade, H. (1997), "The three semantics of fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 90, 141-150

[9] *Technometrics*, 37 (3), 1995

[10] "The paradoxical success of fuzzy logic", *IEEE Expert*, 9(4), 1994

[11] International Journal of Approximate Reasoning, 26(2), 2001

[12] https://people.eecs.berkeley.edu/~zadeh/stimfl.html, 28/07/2017

[13] Laurent, J. (1981) *Les sous-ensemble flou*, Grasset

[14] http://www.arcifuzzy.it/ 28/07/2017

[15] Mamdani, E.H., Assilian, S., (1975), "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller", *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1), 1-13

[16] Bonarini, A. (2003), "Sistemi Fuzzy", *Mondo Digitale*, 1, 3-14

[17] Hullermeier, H. (2015), "Does machine learning need fuzzy logic?", *Fuzzy Sets and Systems*, 281, 292-299

Biografia

Davide Ciucci, laureato in Informatica nel 1999, ha conseguito il Dottorato in Matematica, Statistica, Scienze Computazionali ed Informatica nel 2004 presso l'Università degli Studi di Milano. Attualmente è professore associato presso il Dipartimento di Informatica, Sistemistica e Comunicazione dell'Università degli Studi di Milano-Bicocca. L'attività di ricerca riguarda il trattamento dell'incertezza, in particolare tramite logiche non-classiche e *rough set*. Su queste tematiche ha pubblicato circa 90 articoli, sulle principali riviste e conferenze del settore. E' vicepresidente dell'International Rough Set Society, Area Editor di Int. J. of Approximate Reasoning e Associate Editor di Information Sciences.

Email: davide.ciucci@unimib.it