Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

18 Giugno 2019

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva, con il metodo variazionale, il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{-1}^{1} (tx - u^2)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u^2 \\ x(-1) = -\frac{2}{e} - 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva, con la Programmazione Dinamica, il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-2t} \ln u\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x - u \\ x(0) = 1 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

In order to solve B–H–J equation for the current value function, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{V^c(x) : \ (V^c)'(x) = Ax^k, \ A, k \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati. Siano f e g continue con derivate continue rispetto a $\mathbf{x}$.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1);

ii. sotto opportune ipotesi, si illustri un risultato sul comportamento dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (*optimal path*) e lo si provi;

iii. si introduca la nozione di controllo abnormale. Si determini il controllo ottimo per il seguente problema, mostrando che é abnormale:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{0}^{1} \left(t - \frac{1}{2}\right) u\,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = (x_1 - tu)^2 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = x_2(1) = 0 \end{cases}$$

4. (6 punti) Si consideri il seguente problema della "Dubin car":

$$\begin{cases} \min\limits_u T \\ \dot{x}_1 = \cos\theta \\ \dot{x}_2 = \sin\theta \\ \dot{\theta} = u \\ x_1(0) = 4, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \theta(0) = \pi/2 \\ x_1(T) = 0, \qquad x_2(T) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto (si suggerisce di usare un teorema di esistenza per garantire che il controllo estremale trovato è ottimo).

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di cattura-evassione di tipo

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\colon \min\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}\colon \max\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{u}_1(t) \in U_1 \subset \mathbb{R}^{k_1} \qquad\qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \subset \mathbb{R}^{k_2} \\ \qquad J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \ge 0 \text{ s.t. } \mathbf{x}(t) \in \text{int}(\mathcal{T}_0) \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \qquad \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Si supponga che la condizione di Isaacs sia soddisfatta.

i. Si fornisca la definizione dell'insieme $\mathcal{C}_{ap}$ degli stati di cattura, dell'insieme $\mathcal{E}_{sc}$ degli stati di fuga e di stato di neutralitá.

ii. Si forniscano le definizioni di funzione valore superiore V^+ e funzione valore inferiore V^-; si provi che $V^+ = V^- = 1$ sull'insieme $\mathcal{E}_{sc}$.

iii. Si consideri il modello "Interception of a straight flying evader":

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\colon \min\limits_{\psi} J(\psi, \varphi), \qquad \textit{Evader}\colon \max\limits_{\varphi \in \{-1,+1\}} J(\psi, \varphi) \\ \qquad J(\psi, \varphi) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \ge 0 \text{ s.t. } \|(x(t), y(t))\|_2 < l \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \qquad \dot{x} = \omega\varphi - \sin\psi \\ \qquad \dot{y} = -\cos\psi \\ \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \qquad y_0 \ge 0 \end{cases}$$

Si introduca il modello con rigore e si costruisca la barriera del problema, gli insiemi $\mathcal{C}_{ap}$ e $\mathcal{E}_{sc}$.