Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

24 Settembre 2018

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min\limits_u T \\ \ddot{x} = u \\ x(0) = \dot{x}(0) = -1 \\ x(T) = \dot{x}(T) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

Si consiglia di usare un teorema di esistenza per provare che il controllo estremale determinato è ottimo.

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con la Programmazione Dinamica

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty 2\sqrt{u}e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = 2x - u \\ x(0) = 1 \\ x \ge 0 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

Per risolvere la BHJ equation per la funzione valore corrente, si suggerisce di cercare le soluzioni nella famiglia di funzioni $\mathcal{F} = \{V^c(x) = A\sqrt{x},\ A \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1);

ii. sotto opportune ipotesi, si enunci e si provi la condizione sufficiente di Mangasarian.

4. (6 punti) Si consideri il "two-sector model"

$$\begin{cases} \max\limits_{u \in \mathcal{C}} \displaystyle\int_0^T x_2\,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = \alpha u x_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha(1-u)x_1 \\ x_1(0) = a_1 \\ x_2(0) = a_2 \\ \mathcal{C} = \{u : [0, T] \to [0, 1] \subset \mathbb{R},\ u \in KC\} \end{cases}$$

dove α, a_1, a_2 e T sono positivi e fissi; si consideri in particolare il caso $T > \frac{2}{\alpha}$.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si risolva il modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{2}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore, le definizioni di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+, introducendo le nozioni di controllo e strategia non anticipativa necessarie. Quando si dice che il problema (2) ammette funzione valore V?

ii. Si consideri il gioco a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{u_1} J(u_1, u_2) \qquad \text{Player II: } \min\limits_{u_2} J(u_1, u_2) \\ |u_1| \le 1 \qquad\qquad\qquad |u_2| \le 1 \\ J(u_1, u_2) = \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sgn}(x) \left(1 - e^{-|x|}\right) e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u_1 - u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

Si provi che non ammette funzione valore.

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \psi(T, \mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T, \mathbf{x}(T)) \in \partial S \end{cases} \tag{4}$$

con T libero e target set $S \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ chiuso. Si supponga che il problema ammetta funzione valore in C^1 e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs (se necessario si aggiungano altre ipotesi). Si fornisca una dimostrazione geometrica dell'equazione di Isaacs per il problema (4).