Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

**Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo**

**17 Febbraio 2016**

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

**1.** (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min_u T \\ \ddot{x} = u \\ x(0) = \dot{x}(0) = -1 \\ x(T) = \dot{x}(T) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

Suggestion: use an existence result in order to prove that the extremal control is optimal.

**2.** (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^3 (1-u)x \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = ux \\ x(0) = 1 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $AxF_x + BF_t = 0$ (with $A$ and $B$ constants), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = axe^{-t}, \text{ with } a \text{ constant}\}$.

**3.** (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con $t_0$ e $t_1$ fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set $U$ sia compatto e che $f$, $g$ e $\psi$ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si mostri che la funzione valore del problema

$$\begin{cases} \min_u \displaystyle\int_0^2 (u^2 + 4x) \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = 1 \\ x(2) = 2 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

non è Lipschitz (non è richiesto di risolvere l'esercizio).

**4.** (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali a 2 giocatori e a somma zero, si consideri il modello "war of attrition and attack" di Isaacs:

$$\begin{cases} \textit{Player A}: \max\limits_{\alpha} J(\alpha,\beta), & \textit{Player B:} \min\limits_{\beta} J(\alpha,\beta) \\ 0 \le \alpha \le 1 & 0 \le \beta \le 1 \\ J(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^T (1-\alpha)x_1 - (1-\beta)x_2 \, \mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = m_1 - c_1\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = m_2 - c_2\alpha x_1 \\ x_i(0) = x_{i0} > 0, \qquad x_i(t) > 0 \end{cases}$$

con $c_1,\ c_2,\ m_1$ e $m_2$ costanti positive, con $c_2 > c_1$, $T > 0$ fissato.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si risolva il modello determinando i controlli ottimi, richiamando i risultati teorici che si usano (non è richiesto provare nulla).

**5.** (6 punti) Si consideri il seguente gioco di cattura–evasione

$$\begin{cases} \textit{Purser}: \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), & \textit{Evader}: \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{u}_1(t) \in U_1, & \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \\ J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^{T_\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T_\mathbf{x})) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases}$$

con target set $S$ e tempo di uscita e $T_\mathbf{x}$ dati da

$$S = \mathbb{R}^+ \times S_0 \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \qquad T_\mathbf{x} = \inf\{t \ge 0 : (t, \mathbf{x}(t)) \in S\}.$$

Si supponga che valga la condizione di minimax di Isaacs.

i. Si provi che la funzione valore non dipende esplicitamente dal tempo;

ii. si scriva e provi l'equazione di Isaacs in questa situazione.