Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

20 Giugno 2016

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min_u T \\ \dot{x} = x + \dfrac{3}{u} \\ x(0) = 1 \\ x(T) = 2 \\ u \geq 3 \end{cases}$$

Si suggerisce di utilizzare la disuguaglianza di Gronwall per provare che il controllo estremale è ottimo.

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty 2\sqrt{u}e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = 2x - u \\ x(0) = 1 \\ x \geq 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere la BHJ per la funzione valore corrente, si suggerisce di cercare la soluzione nella famiglia di funzioni $\mathcal{F} = \{V^c(x) = A\sqrt{x},\ A \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}}\ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1);

ii. nel caso $n = k = 1$ e $\mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R},\ \mathbf{u}$ ammissibile e continua$\}$ aperto e non vuoto, si dimostri la condizione necessaria di Pontryagin (è richiesta la dimostrazione anche del lemma tecnico);

iii. sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione sufficiente di Mangasarian;

4. (6 punti) Si consideri il modello lavoratori e capitalisti di Lancaster:

$$\begin{cases} \text{Wor.:} \ \max\limits_u \displaystyle\int_0^T uk \, \mathrm{d}t & \qquad \text{Cap.:} \ \max\limits_v \displaystyle\int_0^T (1-v)(1-u)k \, \mathrm{d}t \\ \quad 0 < a \le u \le b < 1 & \qquad\qquad 0 \le v \le 1 \\ & \dot{k} = v(1-u)k \\ & k(0) = k_0 > 0 \end{cases}$$

ove $a, \ b, \ T$ e k_0 sono fissati.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si introduca per un gioco differenziale a due giocatori, la nozione di equilibrio di Nash open–loop e gli elementi di teoria necessari per determinare tale equilibrio nel modello proposto (non è richiesto provare nulla);

iii. nel caso $b \ge 1/2$, si determini l'equilibrio di Nash open–loop nel modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il problema di costruire una strada di montagna a costo minimo

$$\begin{cases} \min\limits_{u \in \mathcal{C}} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (x(t) - y(t))^2 \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ \mathcal{C} = \{u : [t_0, t_1] \to [-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}, \ u \in KC\} \end{cases}$$

ove y è una funzione continua assegnata.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si introduca la nozione di controllo singolare e si mostri come risolvere il problema assegnato;

iii. si applichi quanto mostrato nel punto precedente per risolvere

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_{-1}^{1} (x - e^t)^2 \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ |u| \le 1 \end{cases}$$