NOTE SULL'ELASTICITA' DI SOSTITUZION NELLA SFERA DELLA PRODUZIONE

DISPENSE SINTETICHE PER STUDENTI CORSO DI MICROECONOMIA

Queste note servono ad una migliore comprensione del Cap. 5 del testo di Gravelle e Rees e in particolare alla derivazione del risultato di cui alla [B8] di pagina 99 e agli esercizi che la seguono.

1. L'elasticità di sostituzione tra input produttivi

Definiamo elasticità di sostituzione tra due input il seguente rapporto

$$\sigma = \frac{\text{variazione \% del rapporto tra le quantità degli input}}{\text{variazione \% del saggio marginale di sostituzione tecnica tra gli input}}$$

Essa definisce in che termini **percentuali** un input può sostituirne un altro mantenendo invariato il livello di produzione. Pertanto, se l'impresa utilizzasse una funzione di produzione in cui l'elasticità di sostituzione fosse **infinita**, essa starebbe operando sulla base della condizione tecnica per la quale un input potrebbe sostituire perfettamente l'altro a produzione invariata. Viceversa nel caso di elasticità di sostituzione **nulla**.

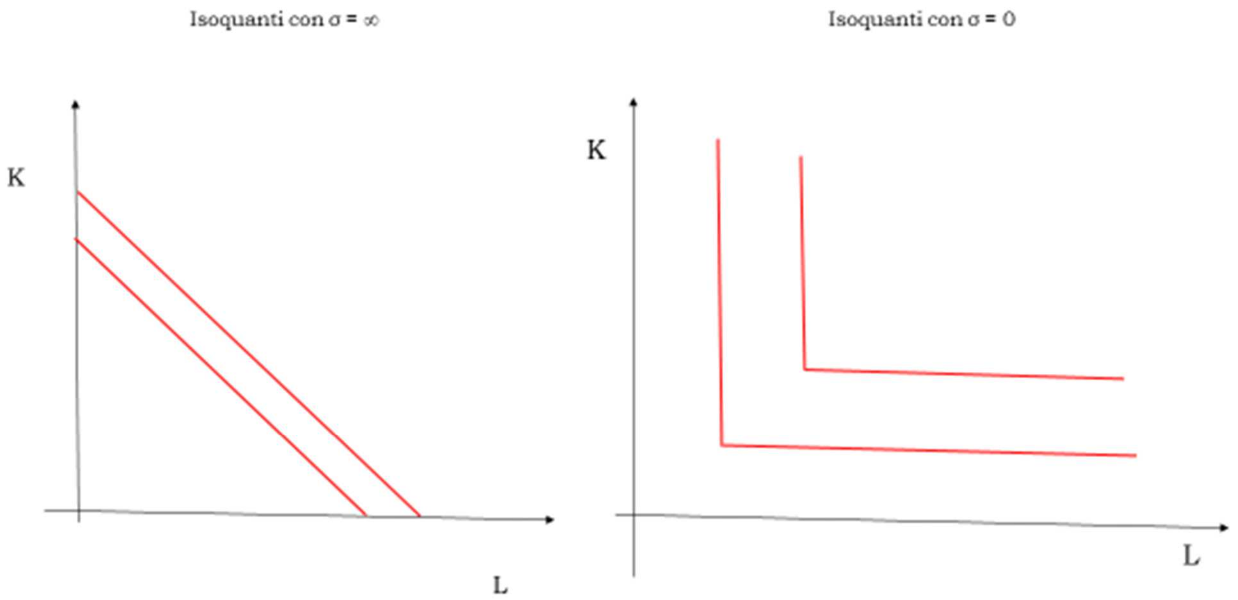
Alcuni valori particolari a cui si pensa che possa tendere l'elasticità di sostituzione sono riassunti nella tabella seguente:

$$\sigma \to \infty$$
$$\sigma \to 1$$
$$\sigma \to 0$$
$$0 < \sigma < \infty$$

Un valore di σ tendente a infinito corrisponde al caso di una funzione di produzione che genera curve di isoquanto inclinate a 45 gradi.
Un valore di σ tendente a zero corrisponde invece ad una produzione di tipo Leontief, che genera curve di isoquanto ad angolo retto[1].
Tutti i valori compresi nell'intervallo tra zero e infinito generano curve di isoquanto più o meno convesse verso l'origine con un grado di sostituibilità tra input compreso tra questi valori estremi.
Due dei possibili casi sono illustrati nel grafico seguente, con riferimento a due generici fattori indicati con K e L.

[1] L'argomento è troppo serio per poterne trattare in un corso di microeconomia "tenuto di questi tempi". Fate finta di nulla, oppure studiate L. Pasinetti, *Lezioni di Teoria della Produzione*, Il Mulino.

Fig. 1 Possibili configurazioni di isoquantì in relazione a σ



2. Trattazione analitica

L'elasticità di sostituzione è stata definita come

$$\sigma = \frac{\text{variazione \% del rapporto tra le quantità degli input}}{\text{variazione \% del saggio marginale di sostituzione tecnica tra gli input}}$$

ovvero, per gli input x_1 e x_2 qualsiasi impiegati per produrre $Y = Y(x_1, x_2)$ essa è

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\dfrac{d(MRTS^Y_{x_2x_1})}{MRTS^Y_{x_2x_1}}} = \frac{d(x_2/x_1)}{d(MRTS^Y_{x_2x_1})}\,\frac{MRTS^Y_{x_2x_1}}{x_2/x_1}$$

La stessa relazione può essere espressa in logaritmi, ricordando che

$$\frac{d[\log(x_2/x_1)]}{d(x_2/x_1)} = \frac{1}{(x_2/x_1)}$$

ovvero

$$d[\log(x_2/x_1)] = d(x_2/x_1)/(x_2/x_1)$$

e che

$$\frac{\left[d\log(MRTS^{Y}_{x_2x_1})\right]}{d(MRTS^{Y}_{x_2x_1})} = 1/(MRTS^{Y}_{x_2x_1})$$

ovvero

$$\left[d\log(MRTS^{Y}_{x_2x_1})\right] = d(MRTS^{Y}_{x_2x_1})/(MRTS^{Y}_{x_2x_1})$$

Quindi, sostituendo otteniamo

$$\sigma = \frac{d\left[\log(x_2/x_1)\right]}{\left[d\log(MRTS^{Y}_{x_2x_1})\right]}$$

L'importanza dell'elasticità di sostituzione risiede nel fatto che quanto più $\sigma \to 0$ tanto più strettamente convesso è l'isoquanto e, quindi, tanto più difficile è sostituire un input ad un altro a parità di livello di produzione. All'opposto, quanto più $\sigma \to \infty$ tanto più "piatto" è l'isoquanto e, di conseguenza, tanto più facile è sostituire tra loro gli input. Per meglio valutare il ruolo di σ analizziamo un funzione di produzione di tipo *CES*:

$$Y = A\left[\delta x_1^{\rho} + (1-\delta)x_2^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$$

in cui assumiamo le consuete restrizioni sui parametri. Procediamo al calcolo dell'elasticità di sostituzione. Il $MRTS^{Y}_{x_2x_1}$ lo calcoliamo come segue:

$$MRTS^{Y}_{x_2x_1} = \frac{\partial Y}{\partial x_1} / \frac{\partial Y}{\partial x_2} = \frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

Inoltre

$$\frac{d(x_2/x_1)}{dMRTS^{Y}_{x_2x_1}} = \left[\frac{dMRTS^{Y}_{x_2x_1}}{d(x_2/x_1)}\right]^{-1} = \left[\frac{\delta}{1-\delta}(1-\rho)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}\right]^{-1}$$

$$= \frac{1-\delta}{\delta}\frac{1}{1-\rho}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho}$$

Da cui, componendo la formula dell'elasticità di sostituzione, otteniamo

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

La formulazione *CES* della funzione di produzione si presta ad illustrare i casi riassunti nella tabella seguente:

$\rho \to 1$ implica	$\sigma \to \infty$
$\rho \to -\infty$ implica	$\sigma \to 0$
$-\infty < \rho < 1$ implica	$0 < \sigma < \infty$

La colonna a sinistra indica alcuni valori cui può tendere l'esponente della funzione di produzione impiegata. Il valore dell'esponente (dipendente dalla tecnologia) determina il risultato in termini di elasticità di sostituzione. Un valore basso dell'esponente, diciamo tendente a uno, implica un valore di σ tendente a infinito. È questo il caso di una funzione di produzione di tipo lineare, che genera curve di isoquanto inclinate a 45 gradi come nel pannello *a* della Figura 1. Un valore molto basso, tendente a meno infinito, dell'esponente, implica un valore di σ tendente a zero. È questo il caso di una funzione di produzione che genera curve di isoquanto ad angolo retto, alla Leontief (nessuna sostituibilità escluso nel punto d'angolo, dove è infinita). Tutti i valori compresi in quest'intervallo generano curve di isoquanto più o meno convesse verso l'origine con un grado di sostituibilità tra input compreso tra zero e infinito.

Esercizio 1. Data la funzione $Y = Ax_1^{\rho} x_2^{1-\rho}$, dimostrare che $\sigma = 1$. Il risultato dipende dal fatto che la somma degli esponenti è pari a uno?

Calcoliamo per prima cosa il valore di σ come segue. Il MRTS tra x_1 e x_2 è

$$MRTS_{x_1x_2}^{Y} = \frac{\partial Y}{\partial x_2} / \frac{\partial Y}{\partial x_1} = \frac{A(1-\delta)x_2^{-\rho} x_1^{\rho}}{A\delta x_2^{1-\rho} x_1^{\rho-1}} = \frac{(1-\delta)}{\delta}\frac{x_2}{x_1}$$

Per calcolare $\frac{d\left(x_2 / x_1\right)}{d\left(MRTS_{x_1x_2}^{Y}\right)}$ ci ricordiamo che questa derivata è pari a $\left[\frac{d\left(MRTS_{x_1x_2}^{Y}\right)}{d\left(x_2 / x_1\right)}\right]^{-1}$ e quindi

$$\frac{d\left(x_2 / x_1\right)}{d\left(MRTS_{x_1x_2}^{Y}\right)} = \left[\frac{d\left(MRTS_{x_1x_2}^{Y}\right)}{d\left(x_2 / x_1\right)}\right]^{-1} = \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^{-1} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

A questo punto "rimontiamo i pezzi" usando la definizione di elasticità di sostituzione e otteniamo:

$$\sigma == \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)\frac{x_2}{x_1}\frac{x_1}{x_2} = 1$$

Provare a rappresentare graficamente i relativi isoquanti.

Alla seconda domanda rispondiamo "No, il grado di omogeneità positiva della funzione non influenza l'elasticità di sostituzione". Se la funzione fosse stata $Y = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ con ad esempio, $\alpha+\beta>1$ il valore di σ sarebbe stato nuovamente pari a 1. [Farlo per esercizio].

Esercizio 2. Data la funzione $Y = A\left[x_1^{\alpha} + x_2^{\alpha}\right]$ con $0 < \alpha < 1$, dimostrare che $\sigma = 1/(1-\alpha)$. Interpretare. Che valore assumerebbero il *MRTS* e σ se α fosse pari a 1? Rappresentare i corrispondenti isoquanti.

Esercizio 3. Data una qualsiasi funzione di produzione, dimostrare (sfruttando alcune semplici proprietà dei logaritmi) che

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(x_2 / x_1)}{x_2 / x_1}}{\dfrac{d(MRTS_{x_2x_1}^{Y})}{MRTS_{x_2x_1}^{Y}}} = \frac{d(x_2 / x_1)}{d(MRTS_{x_2x_1}^{Y})}\frac{MRTS_{x_2x_1}^{Y}}{x_2 / x_1} = -\frac{d\ln(x_1 / x_2)}{d\ln(MRTS_{x_1x_2}^{Y})}$$

3. Una digressione (che lascia il tempo che trova)

Se si suppone che il MRTS in equilibrio (cioè quando il produttore ha operato la scelta ottimale dei fattori data la tecnologia e i prezzi di questi ultimi) sia pari al prezzo relativo dei fattori, l'elasticità di sostituzione può essere espressa NELL'INTORNO DELL'EQUILIBRIO in termini di prezzi dei fattori. Usiamo la definizione del primo paragrafo e scriviamo

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(x_2 / x_1)}{x_2 / x_1}}{\dfrac{d(p_1 / p_2)}{p_1 / p_2}}$$

$$= \frac{d(x_2 / x_1)}{d(p_1 / p_2)} \frac{p_1 / p_2}{x_2 / x_1} = \frac{d \ln(x_2 / x_1)}{d \ln(p_1 / p_2)}$$

Il numeratore e il denominatore possiamo scriverli (sfruttando le proprietà dei logaritmi) come

$$\frac{d \ln(x_2 / x_1)}{d \ln(p_1 / p_2)} = \frac{d\left[\ln(x_2) - \ln(x_1)\right]}{d\left[\ln(p_1) - \ln(p_2)\right]} = \frac{\dfrac{dx_2}{x_2} - \dfrac{dx_1}{x_1}}{\dfrac{dp_1}{p_1} - \dfrac{dp_2}{p_2}}$$

Allora

$$\sigma = \frac{\left(\dfrac{dx_2}{x_2} - \dfrac{dx_1}{x_1}\right)}{\left(\dfrac{dp_1}{p_1} - \dfrac{dp_2}{p_2}\right)}$$

L'elasticità di sostituzione è pari al rapporto tra le differenze nei saggi di variazione infinitesimale degli input (numeratore) e dei loro prezzi (denominatore). Saperlo servirà a qualcosa?