NOTE INTRODUTTIVE SULL'UTILITA' ATTESA
(accompagna ma non sostituisce Gravelle-Rees capitolo 17)

1. Dall'utilità certa all'utilità "attesa"

Supponete che nelle ultime 70 partite due squadre di calcio milanesi, **IN** e **MI**, abbiano ottenuto, giocando tra di loro in modo regolare (in altre città industrializzate nel Nord-Ovest d'Italia forse vengono seguiti altri criteri…), i seguenti risultati

	MI	**IN**
Vittorie V	25	35
Pareggi P	10	10
Sconfitte S	35	25
Totale partite disputate	70	70

Supponete inoltre che nel cuore di ogni tifosa/o ci sia una funzione (simile alla funzione di utilità) che trasforma ogni possibile risultato R del derby

$$R = \{V, P, S\}$$

in un livello di "benessere" esprimibile attraverso i numeri naturali. Chiamiamo questa funzione

$$U(R)$$

e supponiamo che per i sostenitori e le sostenitrici delle due squadre ogni realizzazione di un evento contenuto in R generi (o meglio abbia generato) il seguente valore numerico attraverso la funzione U

$$U(V) = 2 \quad U(P) = 1 \quad U(S) = 0$$

Che valore numerico del loro benessere avranno ottenuto i sostenitori e le sostenitrici milanesi con riferimento a tutte le 70 partite? Per calcolarlo definiamo con $N(R)$ la funzione che "conta" le realizzazioni di ogni possibile risultato, ovvero che indica il numero di volte in cui si è verificato ciascuno degli elementi di R e formiamo la seguente funzione di "benessere del supporter"

$$B = \sum_{\forall R_j \in R} U(R_j) N(R_j) \quad \text{con } R_j = \{V, P, S\}$$

La B misurerà il benessere ottenuto assistendo alle 70 partite. Applicando il calcolo alla tabella dei risultati e ricordando la corrispondenza tra elementi di R e benessere "numerico" ipotizzato per ciascun risultato otteniamo

$B_{MI} = [(2) \times (25)] + [(1) \times (10)] + [(0) \times (35)] = 60$

$B_{IN} = [(2) \times (35)] + [(1) \times (10)] + [(0) \times (25)] = 80$

Questi sono i livelli (numerici) di benessere generati nel cuore della tifoseria alla fine delle 70 partite.
Alla vigilia della ripresa del campionato, e considerando se rinnovare o meno l'abbonamento allo stadio, le/i tifose/i si chiedono: *considerando come è andata fino a questo momento*, "che livello di benessere *medio* ho ricevuto assistendo alle partite"? Ovviamente la risposta diretta è B/70 nei due casi; ma per cominciare a generalizzare il ragionamento procediamo come segue. Chiamiamo, per ciascun possibile esito della partita,

$P(R) = N(R)/70$

la "proporzione" di ogni possibile R realizzatosi nel totale delle partite (in pratica il rapporto tra la ricorrenza di ogni singolo evento e il numero delle partite giocate) e sostituiamolo nella formula generale di B. Avremo

$$B = \sum_{\forall R_j \in R} U(R_j) 70 P(R_j) = 70 \sum_{\forall R_j \in R} U(R_j) P(R_j)$$

Da cui

$$\frac{B}{70} = \sum_{\forall R_j \in R} U(R_j) P(R_j) \qquad (1)$$

che indica il valore medio del benessere delle tifose/i e che, in generale, esprimiamo come **somma dei prodotti**

[BENESSERE DATO DA OGNI SINGOLO EVENTO] × [PROBABILITÀ DI TALE EVENTO]

dove la "nozione" di probabilità impiegata è (per il momento) di tipo c.d. classico (numero di realizzazioni diviso numero di casi possibili). Chiameremo il termine di sinistra della (1) **Utilità Media o Attesa** e la scriveremo come segue

$$E[U] = \sum_{\forall R_j \in R} U(R_j) P(R_j) \qquad (2)$$

La (2) dà la versione più diretta e più semplice della formula dell'utilità attesa.
Per cominciare a liberarci dell'esempio calcistico procediamo con un esempio attraverso il quale valutiamo la (2) alla luce di una specifica funzione U e $P(R)$ supponendo di possedere delle informazioni soggettive *a priori* (che supponiamo giuste) circa la probabilità di ogni evento considerato.

ESEMPIO 1

Tizia/o cammina per strada e **SA** che con probabilità 1/3 può trovare **uno** (e uno solo) dei seguenti buoni del Tesoro al portatore T1 = 14 euro, T2 = 18 euro, T3 = 20 euro. Quindi, l'insieme R dei casi possibili è

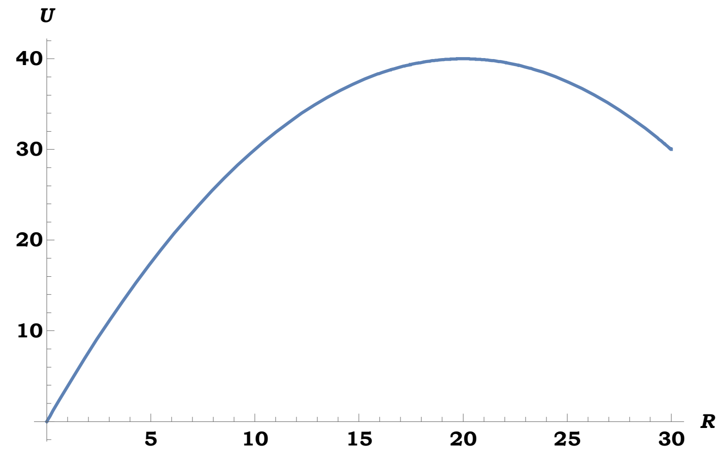
$$R = \{14, 18, 20\}$$

La funzione che trasforma il ritrovamento "monetario" in benessere soggettivo è, supponiamo, la seguente

$$U = 4R_j - \frac{1}{10}R_j^2 \quad \forall R_j \in [0,20]$$

la cui rappresentazione grafica (se valutata su un eventuale dominio di valori continui e positivi) sarebbe quella di cui alla Fig. 1.

Fig. 1 *Utilità del denaro trovato per strada*



Considerando che, per ipotesi, PROB[R=14] = PROB[R=18] = PROB[R=20] = 1/3, passiamo adesso a scrivere la E[U]. Iniziamo calcolando il valore di *U* nei tre casi possibili.

Se R = 20 $\mapsto$	U = 40
Se R = 18 $\mapsto$	U = 39,6
Se R = 14 $\mapsto$	U = 36,4

Allora

$$E[U(R)] = \sum_{\forall R_j \in R} U(R_j)P(R_j) = (40)\left(\frac{1}{3}\right) + (39{,}6)\left(\frac{1}{3}\right) + (36{,}4)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)(116) = 38{,}\overline{6}$$

dove E[U(R)] indica il valore atteso del livello di *U(R)*, **non il valore atteso di *R***. Si noti che 38.6 non è un valore monetario ma un indicatore di livello di utilità.
Se invece le probabilità fossero state PROB[R=14) = 1/2, PROB[R=18] = 1/4, PRO[R=20] = 1/4, avremmo avuto

$$E[U(R)] = \sum_{\forall R_j \in R} U(R_j)P(R_j) = (40)\left(\frac{1}{4}\right) + (39{,}6)\left(\frac{1}{4}\right) + (36{,}4)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 10 + 9{,}9 + 18{,}2 = 38{,}1$$

Come si vede la variazione dei valori delle probabilità degli eventi ha cambiato il livello del valore atteso dell'utilità. Si confronti quest'ultimo risultato con la media ponderata dei valori dei tre buoni del tesoro, usando le stesse ultime probabilità di cui sopra:

$$E[R] = (20)\left(\frac{1}{4}\right) + (18)\left(\frac{1}{4}\right) + (14)\left(\frac{1}{2}\right) = 5 + 4{,}5 + 7 = 16{,}5$$

Se adesso nella funzione $U(R)$ sostituiamo $E[R] = 16{,}5$ al posto di R, ovvero se valutiamo la U alla media del valore degli **eventi (valore atteso della ricchezza da raccogliere per strada)**, otteniamo $U(E[R]) = U(16{,}5) = 4(16{,}5) - \frac{(16{,}5)^2}{10} = 38{,}775$.
Possiamo *provvisoriamente* notare che nel nostro caso

$$E[U(R)] \leq U(E[R]) \qquad (3)$$

Ovvero che il valore atteso dell'intera funzione è non maggiore (nell'esempio, minore) della funzione del valore atteso. In altre parole (forse povere): **data la funzione U ipotizzata**, il **valore atteso (media ponderata per le probabilità) della funzione** è non maggiore **del valore che assume la funzione quando essa viene valutata usando come realizzazione della variabile indipendente il valore atteso di quest'ultima**. E siccome lo stesso risultato si ottiene (per la stessa U e per le stesse possibili realizzazione di R) anche nel caso dei precedenti valori delle probabilità (farlo per esercizio) … qualcosa vorrà dire. Ci torneremo sopra per chiederci se questo è il risultato generale che bisogna sempre attendersi o se il risultato non dipenda dalla forma della U scelta (proprietà della funzione).

Prima di procedere oltre si svolgano i seguenti esercizi

ESERCIZIO 1

Tizia/o ama trascorrere le vacanze a Cuba e sa che durante il periodo di soggiorno la temperatura potrà essere di 25 gradi con probabilità 1/5, di 28 gradi con probabilità 3/5 e di 21 gradi con probabilità 1/5. La funzione che trasforma in benessere "numerico" la temperatura è $U(T) = [10 + 2\ln(T)]$, dove T è la temperatura (la costante pari a 10 la teniamo perché Cuba è bella con qualsiasi clima e prendiamo il logaritmo perché a Cuba la T è sempre > 0). Calcolare:

a) il valore di U nei tre casi;
b) il valore di $E[U(T)]$;
c) il valore di $U(E[T])$ e confrontarlo con $E[U(T)]$.

Cercare di capire che differenza c'è (dal punto di vista delle proprietà generali) tra una funzione come la *U(T)* e la funzione usata in precedenza per le/i tifose/i *U(R)*. Cosa accadrebbe alle valutazioni delle/dei tifose/i se la U diventasse $U\hat{} = 2 + 3(4R - (R^2/10))$?

ESERCIZIO 2

Si ripeta il calcolo di E[$U(R)$] e di U(E[R]) per il ritrovamento dei buoni del tesoro ipotizzando che la funzione sia U = ln(R +1) con le probabilità seguenti per i tre eventi: PROB[R=14) = 1/2, PROB[R=18] = 1/4, PRO[R=20] = 1/4. Ricavare che anche in questo caso

$$E[U(R)] = 2.851 \leq U(E[R]) = 2.86$$

ESERCIZIO 3

Le due funzioni U impiegate nei due esercizi precedenti hanno qualcosa in comune? Confrontate i risultati ottenuti con quelli che verrebbero generati, a parità di altre ipotesi, dalla funzione $U = R^3$. Vale ancora $E[U(R)] \leq U(E[R])$?

ESERCIZIO 4

Dal lancio di una monetina un soggetto ottiene un guadagno pari a 5 se esce croce e 3 se esce testa. La variabile casuale può assumere soltanto due esiti R_1 e R_2 (testa o croce) per una probabilità di p_1 = 1/2 e p_2 = 1/2. Supponiamo che $U = R^2$.

a) Calcolare l'utilità attesa E[U]

b) (Svolto) Trovare quel valore sicuro (certo) che sarebbe considerato equivalente al guadagno aleatorio nel senso che l'utilità generata da tale importo eguaglia l'utilità attesa.

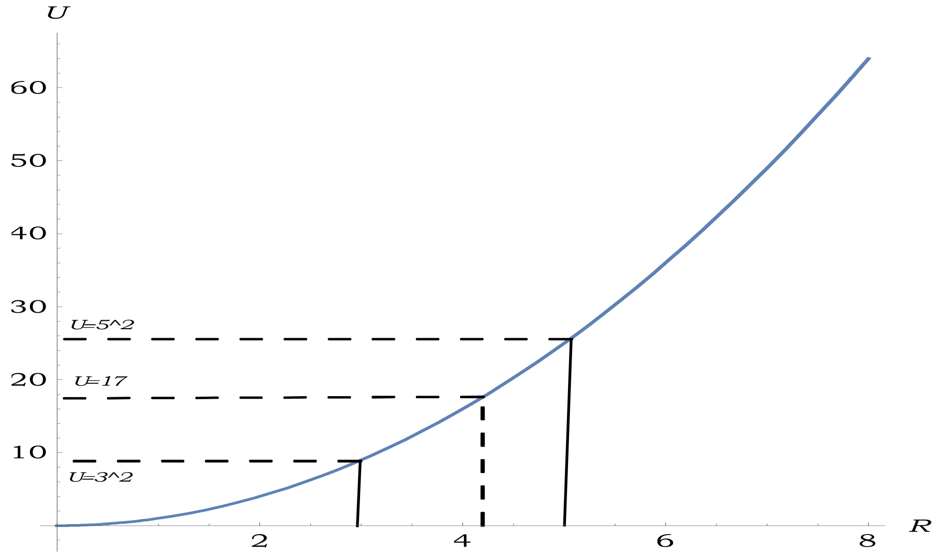
L'utilità attesa è pari a 17. Chiamo R_C il valore cercato. Sapendo che la funzione di utilità è pari a U=R^2 per risalire a R_C da U è necessario porre sotto radice il valore U = 17 ed ottenere 4,12. Allora U=R^2 =17 se R = 4,12 (escludiamo valori negativi che non appartengono al dominio di R). Allora

$$U(Rc) = \mathrm{E}(U)$$

quando Rc = 4,12.
Ottenere con certezza Rc = 4,12 che genera un'utilità di 17, rappresenta quel valore di R per il quale l'individuo è indifferente tra ottenere un guadagno certo e partecipare alla lotteria descritta (ovvero ottenere un guadagno aleatorio di 3 con probabilità 1/2 o di 5 con probabilità 1/2, da cui deriva un'utilità attesa pari a 17).

Il seguente grafico illustra l'Esercizio 4 ipotizzando che R vari continuamente in un eventuale dominio di valori continui e positivi).

Fig. 2 *Utilità del risultato del lancio della monetina con* $U = R^2$



Tornerà utile in seguito.

Da ricordare: Utilità Attesa e Rapporto tra Utilità Attesa e Utilità del Valore Atteso

2. L'utilità attesa in generale

La fu8nzione (2) definiva l'utilità attesa sulla base degli eventi passati e delle loro realizzazioni. Adesso supponiamo che agli eventi gli individui possano dare una probabilità soggettiva, anche ignorando la frequenza passata degli eventi stessi. Chiamiamo *y* l'evento (esempio, temperatura atmosferica) che genera utilità ad un individuo secondo una funzione *U*, della quale per il momento diciamo solo che è continua, crescente e derivabile. La *U* è quindi la funzione che, in uno dei precedenti esempi/esercizi, trasforma la temperatura atmosferica in benessere del vacanziere. In questo senso possiamo ammettere anche valori negativi di y (un'improvvisa nevicata ai tropici…).
Definiamo

$$E[U(y)] = \sum_{i=1}^{N} U(y_i)p_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \text{ caso discreto}$$

$$E[U(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(y)f(y)dy \quad \text{caso continuo}$$

dove *y* è la temperatura, che ipotizziamo essere una variabile casuale; *f(y)* è la sua funzione di densità (ovvero $f(y) = dF(y)/dy$, dove $F(y)$ è la funzione di ripartizione di $y \in [-\infty, \infty]$); p_i è invece la probabilità della variabile casuale discreta.
Nel caso discreto l'utilità attesa è semplicemente la somma di termini rappresentati dagli *N* prodotti $U(y_i)p_i$.

Nel caso continuo $E[U(y)]$ è il valor medio di U(y) dato che ipotizziamo $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$.

Seguire testo Machina in Palgrave (vedi E-Learning).

3 Proprietà di U

Tra le proprietà che richiediamo alla *U(y)* vi è anche quella di indicarci l'attitudine dell'individuo nei confronti del rischio. Tale attitudine può rientrare in tre casi tipici per definire i quali partiamo dalla definizione di gioco attuarialmente equo.

Supponete che Tizia/o possieda 1 euro e si trovi di fronte alle due possibili scelte definire nella tabella seguente: se partecipa e vince (Stato 1) ottiene un euro che sommato a quello che ha giocato rende la sua ricchezza finale (con vittoria) uguale a 2 euro. Se partecipa e perde (Stato 2), ha una perdita (costo) di 1 euro. Se non partecipa, si tiene l'euro in tasca e la ricchezza "finale" sarà di 1 euro. Le probabilità sono date nella tabella.

<table>
<tr><td>Scelta 1</td><td colspan="2">y = 1 euro</td><td>Scelta 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Investire (scommettere)</td><td colspan="2">Non Investire (non scommettere)</td></tr>
<tr><td>Stato 1 (favorevole):
Ricchezza Finale = 1 + 1= 2</td><td>Prob. = 0.5</td><td colspan="2" rowspan="2">Risultato = 1 con Prob. = 1</td></tr>
<tr><td>Stato 2 (sfavorevole):
Ricchezza Finale = 1 – 1 = 0</td><td>Prob. = 0.5</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">E[y] = (0.5×)2+(0)×1 = 1</td><td colspan="2">E[y] = y = 1</td></tr>
</table>

Il **valore atteso** del **risultato** della scelta è uguale nei due casi: il **guadagno atteso** è pari al costo. Si dice che in queste condizioni il gioco (lotteria, scommessa, …) è **attuarialmente equo**.

Primo caso

Un individuo viene definito **Avverso al Rischio** se si **rifiuta** di partecipare ad un gioco equo. Nell'esempio, ciò avverrebbe se l'individuo effettuasse la scelta 2. Ciò implicherebbe che la sua *U* avrebbe derivata prima positiva e derivata seconda negativa:

$$\frac{d^2U}{dy^2} < 0$$

Come mai? Guardiamo la Tabella e diciamo che per rifiutare il gioco equo della tabella è necessario che nella testa dell'individuo accada quanto segue

$$U(1) > \frac{1}{2}U(2) + \frac{1}{2}U(0) \quad \text{ovvero che } U(1) - U(0) > U(2) - U(1) \ .$$

L'aumento di utilità che si ottiene passando da 0 euro a 1 euro è maggiore di quello che si ottiene passando da 1 euro a 2 euro. A parità di incremento di y (nel nostro caso $\Delta y = 1$), **l'utilità cresce di più quando l'incremento si verifica per valori bassi di *y* e cresce di meno quando l'incremento si verifica per valori alti di *y***. Da ciò si desume anche che la disutilità di una eventuale perdita è maggiore dell'utilità di una vincita di pari ammontare.

Secondo caso

Un individuo viene definito **Neutrale al Rischio** se è indifferente rispetto a partecipare ad un gioco equo. Nell'esempio, ciò accadrebbe se l'individuo ritenesse equivalenti la scelta 2 e la Scelta 1. Ciò implicherebbe che la sua *U* avrebbe prima positiva e derivata seconda nulla:

$$\frac{d^2U}{dy^2} = 0$$

Come mai? Guardiamo la Tabella e diciamo che per essere indifferente rispetto al gioco equo della tabella è necessario che nella testa dell'individuo accada quanto segue

$$U(1) = \frac{1}{2}U(2) + \frac{1}{2}U(0) \quad \text{ovvero che} \quad U(1) - U(0) = U(2) - U(1)$$

L'aumento di utilità che si ottiene passando da 0 euro a 1 euro pari a quella che si ottiene passando da 1 euro a 2 euro. A parità di incremento di y (nel nostro caso $\Delta y = 1$), l'utilità cresce nella stessa misura sia quando l'incremento si verifica per valori bassi di y sia quando l'incremento si verifica per valori alti di y. Da ciò si desume anche che la disutilità di una eventuale perdita è pari all'utilità di una vincita di pari ammontare.

Terzo caso

Un individuo viene definito **Amante del Rischio** se preferisce partecipare ad un gioco equo. Nell'esempio, ciò accadrebbe se l'individuo effettuasse la Scelta 1. Ciò implicherebbe che la sua *U* avrebbe derivata prima positiva e derivata seconda positiva:

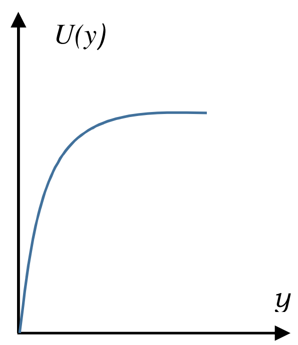
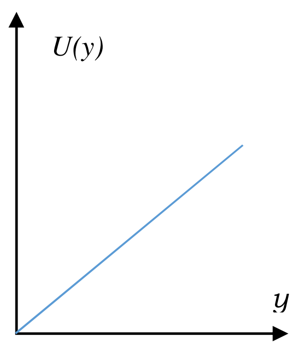
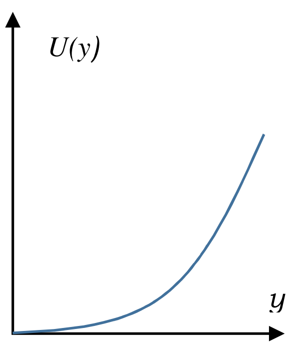
$$\frac{d^2U}{dy^2} > 0$$

Come mai? Guardiamo la Tabella e diciamo che per preferire il gioco equo della tabella è necessario che nella testa dell'individuo accada quanto segue

$$\frac{1}{2}U(2)+\frac{1}{2}U(0)>U(1) \text{ ovvero che } \quad U(2)-U(1)>U(1)-U(0)$$

L'aumento di utilità che si ottiene passando da 1euro a 2 euro è maggiore di quella che si ottiene passando da 0 euro a 1 euro. A parità di incremento di y (nel nostro caso $\Delta y = 1$), l'utilità cresce di più quando l'incremento si verifica per valori alti di y e di meno quando l'incremento si verifica per valori bassi di y. Da ciò si desume anche che l'utilità di una eventuale vincita è maggiore della disutilità di una perdita di pari ammontare.

Nella seguente tabella riassumiamo i tre casi e le relative condizioni da richiedere alla funzione $U(y)$ perché essa rispetti le proprietà generali di cui al paragrafo 1 e caratterizzi nei possibili tre modi l'attitudine verso il rischio dell'individuo.

Caso di	**Presupposto "attitudinale"**	**Derivata seconda di *U***
Avversione al Rischio	Rifiuta il gioco equo Equivalente Certo < E[y]	$\frac{d^2U}{dy^2}<0$ anche per y $=0$
Neutralità al Rischio	Indifferente al gioco equo Equivalente Certo = E[y]	$\frac{d^2U}{dy^2}=0$ anche per y $=0$
Amore per il Rischio	Preferisce il gioco equo Equivalente Certo > E[y]	$\frac{d^2U}{dy^2}>0$ anche per y $=0$
Avverso	**Neutrale**	**Amante**
		

Nel caso di Avversione al rischio la U è concava; Nel caso di Neutralità al rischio la U è lineare; Nel caso di Amore per il rischio la U è convessa. Per comprendere la relazione tra valor medio di y ed equivalente certo, attendere di leggere il paragrafo 6.

4 Grado di avversione al rischio

Nel caso di **Avversione al Rischio** la funzione di utilità deve essere in grado di evidenziare anche **in che modo l'avversione al rischio cambia in presenza di variazioni infinitesimali di *y***.

A questo fine teniamo conto che già il grado di curvatura (da non confondersi con la derivata seconda) della funzione *U* misura l'avversione al rischio: maggiore il grado di curvatura maggiore l'avversione al rischio. Tuttavia, poiché le funzioni di utilità non sono univocamente definite (ma sono definite a meno di trasformazioni affini: spiegare) occorre disporre di una misura che non vari una volta che alla *U* si applichino le suddette trasformazioni. Furono K. Arrow e J. Pratt a proporre una misura che avesse tale caratteristica:

$$A(y) = -\frac{d^2U}{dy^2} \Big/ \frac{dU}{dy}$$

e la chiamarono coefficiente di **Avversione Assoluta al Rischio** (coefficiente **ARA:** ***Absolute Risk Aversion***). Esso potrà essere costante, crescente o decrescente e da ciò deriveranno alcune implicazioni su come può variare rispetto a *y* il grado di avversione al rischio dell'individuo. Le sintetizziamo nella seguente tabella ($y > 0$).

Caso	**Condizione**	**Esempio**
IARA Increasing ARA	$\frac{dA}{dy} > 0$	$U(y) = y - cy^2$ con c costante positiva
CARA Constant ARA	$\frac{dA}{dy} = 0$	$U(y) = 1 - e^{-cy}$ con c costante positiva
DARA Decreasing ARA	$\frac{dA}{dy} < 0$	$U(y) = \ln(y)$

Valutiamo IARA con U proposta nell'esempio della tabella.

Data $U(y) = y - cy^2$ con $c > 0$ il coefficiente *A(y)* è $A(y) = -\frac{d^2U \,/\, dy^2}{dU \,/\, dy} = \frac{2c}{1-2cy}$ da cui

$\frac{dA(y)}{dy} = \left(\frac{2c}{1-2cy}\right)^2 > 0$. In questo caso l'individuo aumenta la sua avversione al rischio a mano a mano che diventa "più ricco".

Ripetere per i casi CARA e DARA.

K. Arrow e J. Pratt però proposero, per le ragioni che diremo di seguito, anche un secondo coefficiente. Per descriverlo partiamo definendo l'elasticità dell'utilità marginale di *y* (chiamiamola *MU*(*y*)) come segue:

$$\eta = \frac{dMU(y)}{dy}\frac{y}{MU(y)} = y\frac{d^2U(y)}{dy^2} \Big/ \frac{dU(y)}{dy} \quad \text{dove} \quad MU(y) = \frac{dU(y)}{dy}$$

Moltiplicando per (–1) la suddetta elasticità otteniamo un nuovo coefficiente

$$R(y)= y\frac{d^2U}{dy^2} \, / \, \frac{dU}{dy} = yA(y)$$

Ovviamente dalla suddetta eguaglianza ricaviamo che $A(y)= \eta \,/\, y$. Quindi $R(y)= yA(y)$, essendo in definitiva un'elasticità, ci dà una misura del grado di avversione al rischio che è ponderata (come qualsiasi elasticità "puntuale") dallo specifico valore di *y* in corrispondenza del quale valutiamo il rapporto tra derivata seconda e derivata prima. Ci dà quindi una misura "locale" o "relativa" (allo specifico valore di *y*) del grado di avversione al rischio e non una misura non ponderata (assoluta) come $A(y)$. Per tale motivo chiameremo *R(y)* coefficiente di **Avversione Relativa al Rischio** (coefficiente **RRA**). Esso potrà essere costante, crescente o decrescente e da ciò deriveranno alcune implicazioni sull'attitudine verso il rischio dell'individuo in relazione ai possibili valori di *y*. Le sintetizziamo nella seguente tabella.

Caso	**Condizione**	**Esempio**
RRA crescente	$\frac{dR(y)}{dy} > 0$	$U(y) = y - by^2$ con b costante positiva
RRA costante	$\frac{dR(y)}{dy} = 0$	$U(y) = \ln(y)$
RRA decrescente	$\frac{dR(y)}{dy} < 0$	$U(y) = -e^{\left(2y - \frac{1}{2}\right)}$

Valutiamo RRA costante con *U* proposta nell'esempio della tabella.

Data $U(y) = \ln(y)$ il coefficiente *R(y)* è $R(y) = y(A(y)) = y\left(\underbrace{1 \,/\, y}_{A(y)}\right) = 1$ e quindi $\frac{dR(y)}{dy} = 0$. In questo caso l'individuo mantiene costante la sua avversione al rischio anche se diventa "più ricco".

Ripetere per i casi RRA crescente e decrescente.

5 Utilità quadratica e schema media-varianza

In due situazioni l'utilità attesa può essere espressa in modo compatto dalla media e dalla varianza della variabile che entra nella funzione di utilità stessa.

Utilità quadratica e distribuzione "qualsiasi"

Il primo di questi casi è quello della funzione quadratica definita su una v.c. la cui distribuzione di probabilità non precisiamo.

Sia, come nella tabella precedente, la funzione di utilità $U(y) = y - by^2$ con b costante positiva. Il C.E. della funzione – per essere la stessa definita solo per valori positivi o al più nulli del codominio e coerentemente con l'ipotesi di non sazietà ($dU/dy \geq 0$) – deve essere

$CE : \forall y$ tali che $\left\{0 \le y \le \frac{1}{2b}\right\}$.

tanto per la funzione quanto per le sue curve di livello. In tale dominio cerchiamo in primo luogo (per esercizio) i coefficienti A(y) e R(y). Essi sono

$A(y) = \dfrac{2b}{\left(1-2by\right)}$	$\dfrac{dA(y)}{dy} = \dfrac{4b^2}{\left(1-2by\right)^2} > 0$
$R(y) = \dfrac{2by}{\left(1-2by\right)}$	$\dfrac{dR(y)}{dy} = \dfrac{2b}{\left(1-2by\right)^2} > 0$

L'avversione assoluta e relativa al rischio cresce all'aumentare di *y*. Se l'individuo diventa "più ricco" preferisce attività che implichino il possesso di una *y* sempre meno rischiosa. Per meglio apprezzare la differenza tra *A(y)* e *R(y)* porre $b = 1$ e calcolare i due indici per $y = 0.1$ e $y = 0.4$.
A questo punto, passiamo a dimostrare che **se la funzione di utilità quadratica tale forma funzionale permette di esprimere l'utilità attesa quale funzione solo della media e della varianza di *y*** (per qualsiasi distribuzione di *y*). Partiamo dalla definizione di varianza di *y*

$$\sigma_y^2 = E[(y - E[y])^2] = E[y^2] - (E[y])^2$$

Da cui $E[y^2] = \sigma_y^2 + (E[y])^2$.

Prendiamo adesso il valore atteso della funzione di utilità quadratica di cui a quest'esempio

$$E[U(y)] = E[y - by^{2"}] = E[y] - bE[y^2]$$

Sostituendo dal risultato relativo alla varianza otteniamo

$$E[U(y)] = E[y] - b(\sigma_y^2 + (E[y])^2)$$

Pertanto, se $U(y)$ è quadratica, quale che sia la distribuzione di *y* intesa quale variabile casuale, E[$U(y)$] dipende solo dalla media e dalla varianza di *y*.
Alla stessa conclusione si perviene attraverso l'espansione di Taylor della funzione di utilità effettuata centrandola sulla media μ di *y*. Ricordando che nella funzione di utilità studiata $b = -U''/2$, il risultato – dopo aver effettuato l'espansione attorno alla media μ di *U(y)* in un P_2 di Taylor (ci limitiamo al secondo grado perché già la derivata terza è nulla) – si può riscrivere come segue:

$$
\begin{aligned}
P_2(U = y - by^2)) &= (\mu - b\mu^2) + \left.\frac{dU}{dy}\right|_{y=\mu}(y-\mu) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dy^2}\right|_{y=\mu}(y-\mu)^2 \\
&= (\mu - b\mu^2) + (1-2b\mu)(y-\mu) - b(y-\mu)^2 \\
&= -b\mu^2 + y - 2b\mu(y-\mu) - b(y-\mu)^2 \\
&= y - b\mu^2 - 2b\mu y + 2b\mu^2 - b(y-\mu)^2
\end{aligned}
$$

Prendendo il valore atteso

$$
\begin{aligned}
E[U(y)] &= E[y - b\mu^2] - 2b\mu E[y] + 2b\mu^2 - b\underbrace{E(y-\mu)^2}_{\sigma_y^2} = E[y] - bE\left[\mu^2\right] - 2b\mu\mu + 2b\mu^2 - b\sigma_y^2 \\
&= E[y] - b[\mu^2 + \sigma_y^2] = \mu - b\mu^2 - b\sigma_y^2
\end{aligned}
$$

Il risultato conferma che, in caso di utilità quadratica il valore atteso dell'utilità può essere espresso in termini di media e varianza. In questo caso possiamo scrivere in modo generale che per una funzione quadratica *U(W)* l'utilità attesa espressa come

$$
E[U(W)] \approx \mu_W + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2U}{dW^2}}_{\substack{\text{SEGNO} \\ \text{NEGATIVO}}}\sigma_W^2
$$

è la migliore approssimazione polinomiale alla funzione di utilità quadratica. Da ciò ricaviamo la conferma che per gli individui neutrali al rischio ($U'' = 0$) l'utilità attesa coincide sempre con il valore atteso della variabile indipendente (argomento di una *U lineare*).
La media accresce il valore dell'utilità attesa

$$
\frac{\partial}{\partial\mu}E[U(y)] = 1 - 2b\mu \geq 0 \quad \forall\mu \in \text{C.E.}
$$

mentre la varianza (o la deviazione standard) lo riduce

$$
\frac{\partial}{\partial\sigma_y}E[U(y)] = -2b\sigma_y < 0
$$

Usiamo le derivate di cui sopra nel calcolo di $dE[U(y)] = 0$ al fine di ricavare il sms lungo la curva di livello. Poniamo

$$
dE[U(y)] = (1-2b\mu)d\mu - 2b\sigma_y d\sigma_y = 0
$$

Da cui

$$
SMS_{\mu,\sigma_y} = \frac{d\mu}{d\sigma_y} = \frac{2b\sigma_y}{1-2b\mu} \geq 0 \;\text{ nel C.E.}
$$

Calcolata la pendenza in ogni punto, vediamo adesso la forma delle curve di livello. Poniamo l'utilità pari ad un certo livello *K*:

$E[U(y)] = \mu - b[\mu^2 + \sigma^2] = \mu - b\mu^2 - b\sigma^2 = K$ (= Costante)

Da, cui moltiplicando per *–1/b* entrambi i lati e aggiungendo ad ambo i lati *1/4b²*, otteniamo

$$\sigma^2 + \mu^2 - \frac{\mu}{b} + \frac{1}{4b^2} = \underbrace{-\frac{K}{b} + \frac{1}{4b^2}}_{\substack{\text{H^= COSTANTE} \\ \text{rispetto a } \mu \text{ e a } \sigma_y}}$$

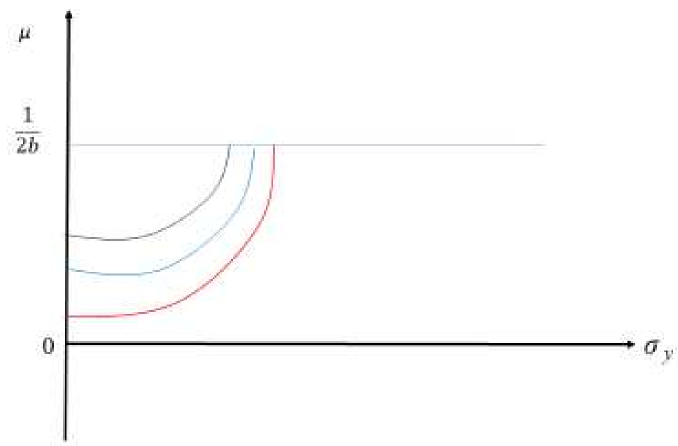
Allora l'equazione della curva di livello (indifferenza) è

$$\sigma_y^2 + \left(\mu - \frac{1}{2b}\right)^2 = H^\wedge$$

Si tratta dell'equazione di una circonferenza[1] (ovviamente semi-circonferenzai dato il C.E. della funzione) di centro (0, *1/2b*) e di raggio $\sqrt{H^\wedge}$ nell'ortante positivo del piano media – deviazione standard. Non tutto il semicerchio relativo ad ogni *H^* corrisponde ad una curva di indifferenza. Ne dovremo utilizzare solamente la parte compatibile con il C.E. della funzione di utilità quindi la parte per cui $\mu \leq 1 / 2b$. Prima di rappresentare graficamente le curve di indifferenza ricaviamo il SMS e verifichiamo che

$\frac{d\mu}{d\sigma_y} = \frac{2b\sigma_y}{1 - 2b\mu} > 0$ in tutto il C.E. dato che il denominatore è sempre positivo nel C.E.

Esattamente come prima. Inoltre è facile verificare che il sms nel C.E. è non solo positivo ma crescente in σ_y (farlo prendendo il differenziale secondo della funzione di utilità o derivando il sms rispetto a σ_y). Quindi la curva di indifferenza è una curva crescente e convessa (d'altra parte … è il tratto crescente del semicerchio nell'ortante positivo). La rappresentazione grafica della mappa delle C.I. per vari valori del raggio è la seguente (l'utilità aumenta in direzione N-O):



[1] Conoscendo le coordinate del centro (x_0, *y0*) e a misura del raggio r, è possibile esprimere l'equazione della circonferenza nel piano (x, y) come $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Il grafico conferma che $\left.\frac{d\mu}{d\sigma_y}\right|_{\sigma_y=0} = 0$ e che $\left.\frac{d\mu}{d\sigma_y}\right|_{\mu=1/2b} = \infty$. Il sms è quindi crescente in σ. Poiché ipotizziamo che la variabilità è sgradita all'individuo, essa fa diminuire l'utilità. Allora un aumento della variabilità della ricchezza (valore della deviazione standard) deve essere accompagnato da un aumento "compensativo" della media della ricchezza (che invece fa aumentare l'utilità) se vogliamo che l'individuo resti su una stessa curva di livello. Allo stesso tempo possiamo vedere che, per le stesse ragioni appena discusse, la direzione dell'incremento del livello di utilità è da S-E verso N-O.

ESERCIZIO 1

Utilizzando i risultati ottenuti, rappresentare le curve di indifferenza nel piano media – deviazione standard della funzione di utilità quadratica. $U = y - \frac{1}{5}y^2$ Interpretare il fatto che SMS è positivo crescente.

ESEMPIO GENERALIZZATO

Generalizziamo l'esempio della funzione quadratica. Sia $U(y) = y - by^2$ con b sempre positivo. Supponiamo che y segua una distribuzione continua $G(y)$ con $g(y) = dG/dy$ definita solo sulla parte crescente della U. Poniamo quindi

$G(0) = 0$ e $G(1/2b) = 1$

Allora

$$E[U(y)] = \int_0^{1/2b} \left(y - by^2 \right) g(y)dy = \int_0^{1/2b} yg(y)dy - b\int_0^{1/2b} y^2 g(y)dy$$

$$= \mu_y - bE[y^2]$$

Usando la formula della varianza

$$E[U(y)] = \mu_y - b\left(\sigma_y^2 + \mu_y^2 \right)$$

Visto che ci siamo, possiamo aggiungere che l'utilità attesa può essere espressa in termini di media-varianza anche per funzioni non quadratiche purché la distribuzione di probabilità della r.v. in oggetto sia normale. Illustriamo senza approfondire. Sia una U(y) generica (ovviamente, crescente, monotona, continua, …). Allora, nell'ipotesi di normalità,

$$E[U(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]} dy$$

Se poniamo la media pari a zero e la varianza unitaria possiamo aggiungere la media alla y moltiplicata per la deviazione standard dentro la U e sostituire alla normale nell'integrale la normale standardizzata. Avremo

$$E[U(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma y + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{y^2}{2} \right]} dy$$

Che è una funzione di media e deviazione standard. La trattazione più diretta è però quella che segue.

Distribuzione normale e funzione di utilità "qualsiasi"

Sia una qualche $U(y)$ soddisfacente come funzione di utilità. Passiamo all'approssimazione data dal polinomio della E[U] espandendo intorno alla media e procedendo oltre la derivata prima e seconda avremmo. Prendendo i valori attesi di ciascun termine del polinomio abbiamo:

$$E[U(y)] \approx \mu_y + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dy^2}\sigma_y^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3U}{dy^3}E\left(y-\mu_y\right)^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4U}{dy^4}E\left(y-\mu_y\right)^4 + ...$$

Il valore atteso dei termini di grado > 2 sono i momenti della distribuzione superiori alla varianza. La Normale ha Skewness e (eccesso di) Kurtosis pari a zero e quindi se $y \sim N(\mu,\sigma^2)$ i suddetti termini sono nulli anche se le derivate di *U(y)* sono non nulle (quindi quale che sia la forma funzionale di *U*). Ovviamente, anche in questo caso se è nulla la derivata seconda l'utilità attesa corrisponde alla media (neutralità al rischio).

ESERCIZIO 1a

Siano due funzioni di utilità: a) $U(y) = ln(y)$ e b) $U(y) = 2 + 2ln(y)$. 1) Calcolare A(y) e R(y) e le loro derivate nei due casi e interpretare i risultati. 2) dire di che tipo è la trasformazione di a in b e spiegare perché essa non ha alterato le indicazioni sulla struttura delle preferenze ricavabili da A(y) e R(y) e loro derivate nei due casi.
[*Suggerimento parte 2*: le funzioni di utilità sono uniche a meno di …][2]

ESERCIZIO 2 (facoltativo)

Una persona ottiene utilità consumando "calorie", z, in presenza di diverse condizioni ambientali (es. temperatura *t che supponiamo casuali*) che influiscono sul suo benessere alimentare. Sia la funzione di utilità

$$U(z_t) = \frac{z_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \text{ con } 0 < \gamma < 1$$

Se ogni valore della temperatura ha una probabilità p_t, scrivere nel discreto la funzione di utilità attesa della persona. Poi, mostrare a) che la funzione è CRRA; b) che Il Saggio Marginale di Sostituzione del consumo in corrispondenza di due valori della temperatura t e $t+1$ è $SMS_{t,t+1} = \left(z_{t+1} / z_t\right)^\gamma$ e che c) l'elasticità di sostituzione tra i livelli di consumo z_t e z_{t+1} è pari a $1/\gamma$.

ESERCIZIO 3 (facoltativo)

Si supponga che y segua una distribuzione *N(0,1)* su [-∞,∞]. Dato che $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{Exp}[-(\frac{y2}{2})]$:

[2] Una trasformazione affine è equivalente ad una trasformazione lineare seguita da una traslazione.

a) Con $U = y^2$ (amore per il rischio), mostrare che

$$E[U(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)\, dy = 1$$

e che allo stesso risultato si perviene mediante espansione di Taylor (scegliete voi il grado) centrata sulla media e valutata in valore atteso con $y \sim N(0,1)$ su [-∞,∞].

b) Con $U = 5y - 2y^2$ (aversione al rischio) mostrare che

$$E[U(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} (5y - 2y^2) f(y)\, dy = -2$$

E che allo stesso risultato si perviene mediante espansione di Taylor (scegliete voi il grado) centrata sulla media e valutata in valore atteso con $y \sim N(0,1)$ su [-∞,∞]. Dare una spiegazione del valore negativo dell'utilità attesa come calcolata sopra.

c) Con $U = 2 + 2y$ (neutralità al rischio) mostrare che

$$E[U(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} (2 + 2y) f(y)\, dy = 2$$

E che allo stesso risultato si perviene mediante espansione di Taylor (scegliete voi il grado) centrata sulla media e valutata in valore atteso con $y \sim N(0,1)$ su [-∞,∞].

6 L'equivalente certo; il premio per il rischio e il problema (lasciato in sospeso) se

$$E[U(y)] \overset{>}{\underset{<}{=}} U(E[y])$$

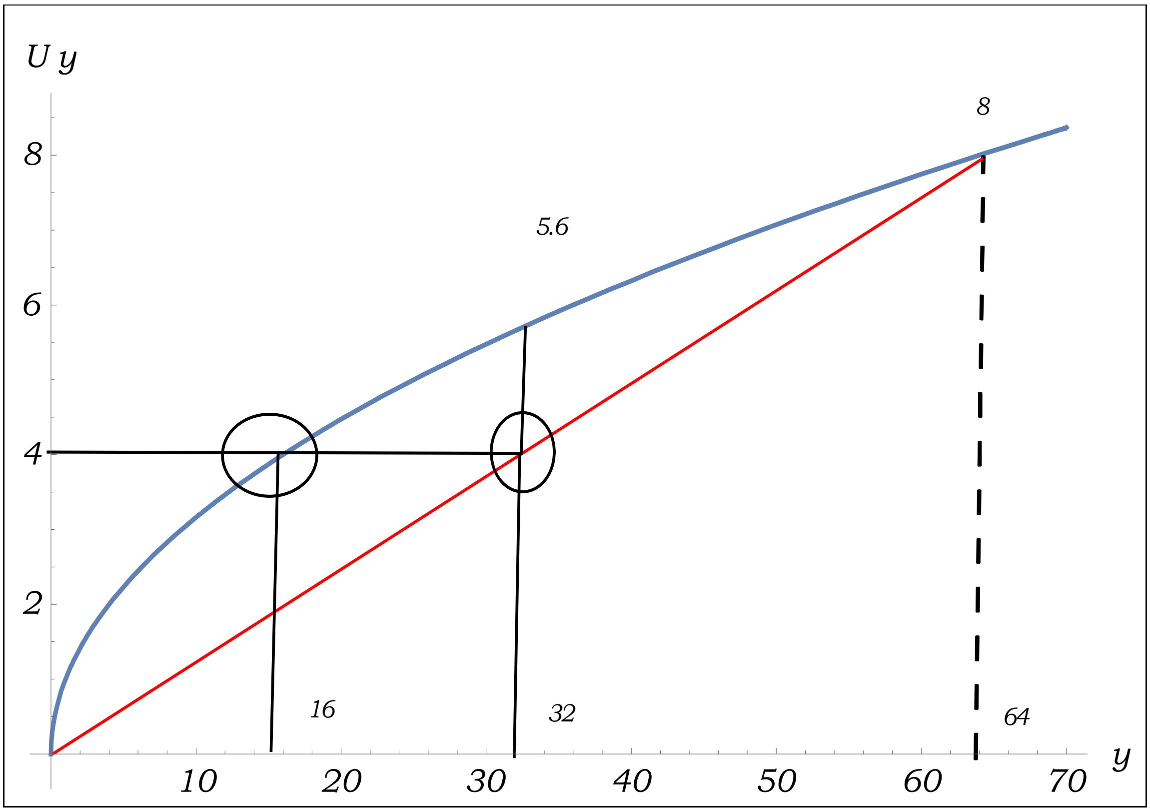
Supponiamo di avere la funzione $f: R_+ \rightarrow R$ continua crescente e derivabile (almeno due volte) $U(y) = \sqrt{y}$. Prima di ogni altra cosa calcoliamo le prime due derivate che sono

$$\frac{dU(y)}{dy} = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{d^2U(y)}{dy^2} = -\frac{y^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

Abbiamo a che fare con una funzione concava e quindi con un individuo avverso al rischio. Per completezza diciamo anche che, per la nostra funzione, $A(y) = 1/(2y)$ e che $R(y) = 1/2$. Supponiamo:

- che y sia il valore della casa dell'individuo
- che con probabilità 1/2 la casa possa bruciare completamente portando $y = 0$
- che con la stessa probabilità la casa possa scampare il pericolo e mantenere il suo valore di "mercato", diciamo $y = 64$.
- Evidentemente, $E[y] = 32$

Il grafico seguente riproduce la funzione e misura le sue ordinate in corrispondenza dei valori rilevanti delle ascisse.



Ricapitolando le informazioni fornite dal grafico: quando $y = 0$ abbiamo $U = 0$ e quando $y = 64$ abbiamo $U = 8$. Calcoliamo adesso

$$E[U(y)] = \frac{1}{2}\sqrt{0} + \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4 \quad \text{con} \quad E[y] = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}64 = 32 \ .$$

Se 32 fosse un valore certo (ma non lo è!) U sarebbe pari a 5.6. Si tracci adesso la retta passante per i punti (0, 0) e (64, 8) che ha per equazione[3] $U = y/8$ e la si valuti quando $y = 32$ che è il valore di E[y]. Per tale valore di y l'ordinata della retta vale 4. Ma 4 è anche E[U(y)]. Allora chiediamoci: quale valore di y, se ottenuto con certezza, ci darebbe $U = 4$? La risposta è ovviamente $y = 16$. Tutti questi punti sono illustrati nel grafico. Sulla base di queste "costatazioni" facciamo le seguenti riflessioni.

Prima riflessione: a cosa corrisponde la retta U = y/8?

Riscrivo l'equazione della retta usando come variabile dipendente E[$U(y)$] e variabile indipendente la y. Quindi

$\dfrac{E[U(y)] - 0}{8 - 0} = \dfrac{y - 0}{64 - 0}$ da cui $E[U(y)] = \dfrac{y}{8}$. Allora la retta (che altro non è che la corda sottostante alla funzione concava per tutte le y tra 0 e 64 e quindi e la combinazione lineare delle ordinate) indica il valore che

[3] Pro memoria. L'equazione della retta passante per i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

prenderebbe l'utilità attesa in corrispondenza di tutti i possibili valori di y tra 0 e 64, date le probabilità utilizzate nell'esempio. Infatti ponendo $y = 32$ otteniamo $E[U(y)] = 4$ che è minore di 5.6 e ciò ci dice che, anche per questa funzione $E[U(y)] < U(E[y])$. Ma è evidente che tale risultato dipende dalla concavità della funzione di utilità; anzi è una proprietà delle funzioni di utilità concave. Su questo torneremo.

Seconda riflessione: l'equivalente certo

Il valore 4 può essere conseguito o lungo la $E[U(y)] = \frac{y}{8}$ quando $y = 32$ o lungo la U(y) con y =16. Ciò vuol dire che se una compagnia di assicurazioni dicesse al proprietario della casa che in cambio del pagamento (certo e immediato!) di euro 32 – 16 = 16 gli offrirebbe una qualche copertura dal rischio di incendio, il proprietario si troverebbe in questa situazione: se non pagasse il premio (16 euro) otterrebbe un valore pari a 4 dell'utilità in "versione" attesa, ovvero correndo il rischio; se pagasse quanto richiesto otterrebbe sempre un livello 4 di utilità, ma senza correre rischi perché y = 16 è garantito dall'assicurazione. Allora, 16 rappresenta quel (minimo) valore di y che **se ottenuto con certezza** (l'assicurazione rimborsa in parte il danno e porta l'individuo da y = 0 dopo l'incendio a y = 16 dopo il rimborso) **pone il benessere dell'individuo allo stesso livello dell'utilità attesa**. Per tale motivo esso prende il nome di **Equivalente Certo** (qualcuno per rendere più esplicito il significato lo chiama il "*cash equivalent*" della lotteria, del gioco, della scommessa, …). Di contro il pagamento misurato da E[y] – Equivalente Certo (ovvero 32 – 16, nel nostro caso) indica il c.d. **premio per** (eliminare) **il rischio**, che in taluni casi si esprime in termini percentuali (32 – 16)/32 = 50%. In questo caso, il nostro individuo sarebbe disposto a sacrificare il 50% della sua ricchezza per "annullare" gli effetti del rischio. Per approfondire ulteriormente il concetto di equivalente certo e di premio per il rischio analizziamo il seguente nuovo esempio[4].

ESEMPIO 2

Una persona ha una funzione di utilità logaritmica: $U(y) = \ln(y)$ dove y è la somma di cui dispone. Quindi è avversa/o al rischio visto che la funzione è strettamente concava in y. Supponiamo che la persona abbia un valore "di partenza" di $y = y_0$. Le/gli prospettano la seguente lotteria (L): vincere o perdere un certo quantitativo di denaro h se, in seguito al lancio di una monetina non truccata, esce rispettivamente testa o croce. A quanto ammonta il valore dell'utilità attesa della ricchezza partecipando ad L? A quanto ammonta l'equivalente certo per la persona in questione? A quanto ammonta il premio per il rischio? Prima di rispondere diamo (magari servirà dopo) la definizione generale di lotteria L.
Definizione (generale) di L:

$$L = ((0.5) \circ (y_0 + h), (0.5) \circ (y_0 - h))$$

dove i due elementi legati da $\circ$ si leggono Evento ($y_0 + h$) *con* probabilità (0.5) ed Evento ($y_0 - h$) *con* probabilità (0.5). Quanto vale la lotteria?

$$E[L] = (0.5)(y_0 + h) + (0.5)(y_0 - h) = y_0$$

che è il valore atteso della ricchezza generato dalla lotteria dato y_0 di partenza.

Prima domanda. Utilità attesa?

[4] Secondo Nicolas Bernoulli il *cash equivalent* del gioco di San Pietroburgo sarebbe 4 rubli.

$$
\begin{aligned}
E[U(y)] &= (0.5)\ln(y_0 + h) + (0.5)\ln(y_0 - h) \\
&= \ln(y_0 + h)^{0.5} + \ln(y_0 - h)^{0.5} \\
&= \ln[(y_0 + h)(y_0 - h)]^{0.5} \\
&= \ln[y_0^2 - h^2]^{0.5}
\end{aligned}
$$

Seconda domanda. Equivalente certo?

Il valore dell'equivalente certo (chiamiamo tale valore CE) per L deve soddisfare la condizione per cui l'utilità $ln(y)$ valutata in corrispondenza di tale valore sia uguale a E[U]. Quindi

$$ln(CE) = \ln[y_0^2 - h^2]^{0.5} \quad \text{da cui} \quad CE = [y_0^2 - h^2]^{0.5} < y_0$$

dove la diseguaglianza ci dice che CE < E[L], come ci attendevamo per una funzione concava (avversione al rischio).

Terza domanda. Premio per il rischio?

Quanto sarà disposta a pagare la persona in questione per evitare la lotteria? Il premio per il rischio (chiamiamolo *PR*) è

$$PR = E[L] - CE = y_0 - [y_0^2 - h^2]^{0.5} > 0$$

Interpretazione. Se la lotteria fosse il risultato dello svolgimento di un'attività lavorativa rischiosa per la salute che la persona deve svolgere in aggiunta alle normali mansioni, y_o fosse il salario pattuito per le attività prive di rischio ed h fosse il guadagno monetario aggiuntivo derivante dall'attività rischiosa se tutto andasse bene (nessuna malattia professionale) o il costo delle spese mediche (che diminuirebbero y_o) se le cose andassero male, la persona (se potesse permetterselo…) pagherebbe *PR* per avere in modo certo un livello di utilità pari a quello atteso generato dallo svolgimento delle attività rischiose.

Terza riflessione: valore atteso dell'utilità e utilità del valore atteso

Torniamo alla funzione di utilità attesa nel discreto

$$E[U(y)] = \sum_{i=1}^{N} U(y_i) p_i$$

Se la funzione $U(y)$ è una finzione strettamente **convessa/concava** di una variabile reale, e a_i è una costante positiva il risultato riportato di seguito prende in nome di *Diseguaglianza di Jensen*:

$$U\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i a_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i}\right) \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} U(y_i) a_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i}\right) \quad \text{per funzioni convesse}$$

$$U\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i a_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i}\right) \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} U(y_i) a_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i}\right) \quad \text{per funzioni concave}$$

L'eguaglianza vale nel caso di funzioni U lineari o nel caso di valori di y_i tutti uguali tra loro. Supponete adesso che le a_i sommino a 1; quindi

$$U\left(\sum_{i=1}^{N} y_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} U(y_i) a_i \qquad \text{per funzioni convesse}$$

$$U\left(\sum_{i=1}^{N} y_i a_i\right) \geq \sum_{i=1}^{N} U(y_i) a_i \qquad \text{per funzioni concave}$$

Sostituendo le p_i (che sommano a 1 per la probabilità totale) alle a_i troviamo l'applicazione al caso della funzione di utilità attesa. Allora la relazione tra valore atteso dell'utilità e utilità del valore atteso dipende dalla convessità/concavità di U:

$$\underbrace{U\left(\sum_{i=1}^{N} y_i p_i\right)}_{\text{Utilità del valore atteso}} \leq \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} U(y_i) p_i}_{\text{Valore atteso dell'Utilità}}\right) \qquad \text{per funzioni convesse}$$

$$\overbrace{U\left(\sum_{i=1}^{N} y_i p_i\right)} \geq \left(\overbrace{\sum_{i=1}^{N} U(y_i) p_i}\right) \qquad \text{per funzioni concave}$$

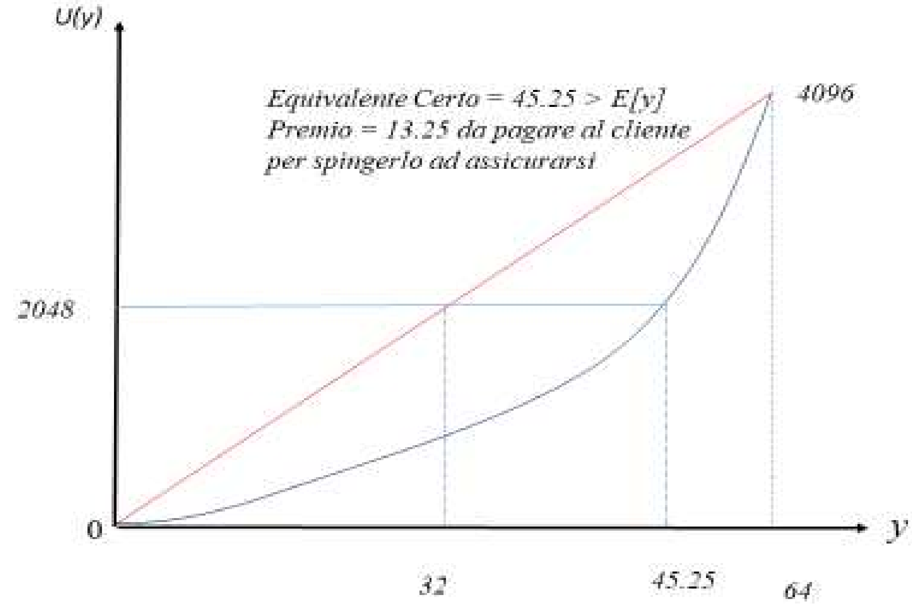
In statistica di base la diseguaglianza di Jensen è usata per dimostrare che la media aritmetica è maggiore della media geometrica. Infatti ponendo la funzione delle osservazioni numeriche y_i pari a $ln(y_i)$ e le singole a_i uguali l'una alle altre abbiamo

$$\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}\right) \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \ln(y_i)}{N}\right)$$

da cui

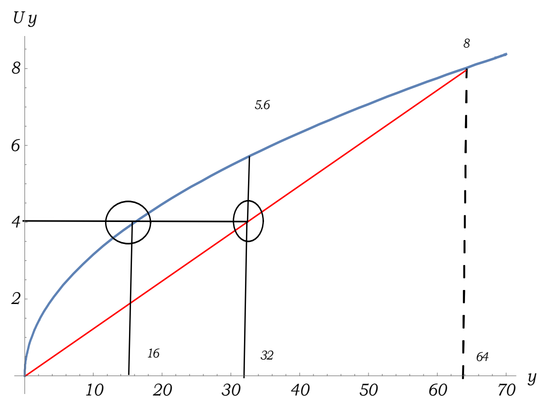
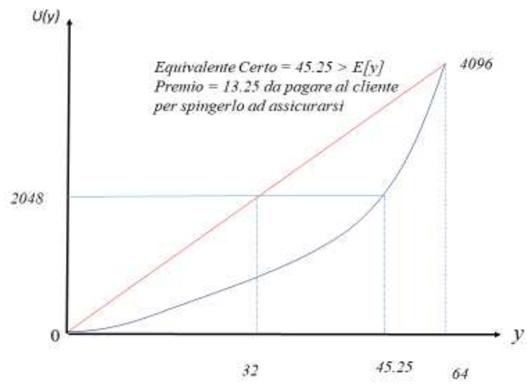
$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots y_N}{N} \geq \sqrt[N]{y_1 y_2 \cdots y_N} \quad .$$

Per completezza rappresentiamo il rapporto tra equivalente certo e E[y] anche per l'individuo amante del rischio. Sia $U = y^2$ con le ipotesi sulle probabilità fatte per il caso di avversione al rischio. Il grafico seguente illustra la situazione.



Come si vede U(32) = U(E[y]) < E[U(y)] e l'equivalente certo è > 32. Se volete che l'individuo ottenga un benessere pari 2048 in modo certo (rinunciando all'ebbrezza del rischio) dovete garantirgli y = 45.25 > 32 pagandogli 45.25 – 32 = 13.25. In molti testi si dice che in questo caso il premio per il rischio è – 13.25 (ovvero 32 – 45.25).

Sintesi

Tipologia	**Presupposto “attitudinale”**	**Derivata seconda di *U***	**Grafico**
Avversione al Rischio Grado di Avversione A(y) assoluta R(y) = A(y)y Relativa	Rifiuta sempre il gioco equo Equivalente Certo < E[y]	$\frac{d^2U}{dy^2} < 0$ anche per y = 0	 Premio per il rischio = Equivalente Certo – E[y] = 32 – 16 = 16 > 0 La persona paga per assicurarsi
Neutralità al Rischio	Indifferente al gioco equo Equivalente Certo = E[y]	$\frac{d^2U}{dy^2} = 0$ anche per y = 0	U è una retta che coincide con la retta E[U] Premio per il rischio = 0.
Amore per il Rischio	Accetta/Preferisce sempre il gioco equo Equivalente Certo > E[y]	$\frac{d^2U}{dy^2} > 0$ anche per y = 0	 Premio per il rischio = Equivalente Certo – E[y] = 32 – 45.25 = -13.25 < 0 La persona deve ricevere un pagamento per assicurarsi

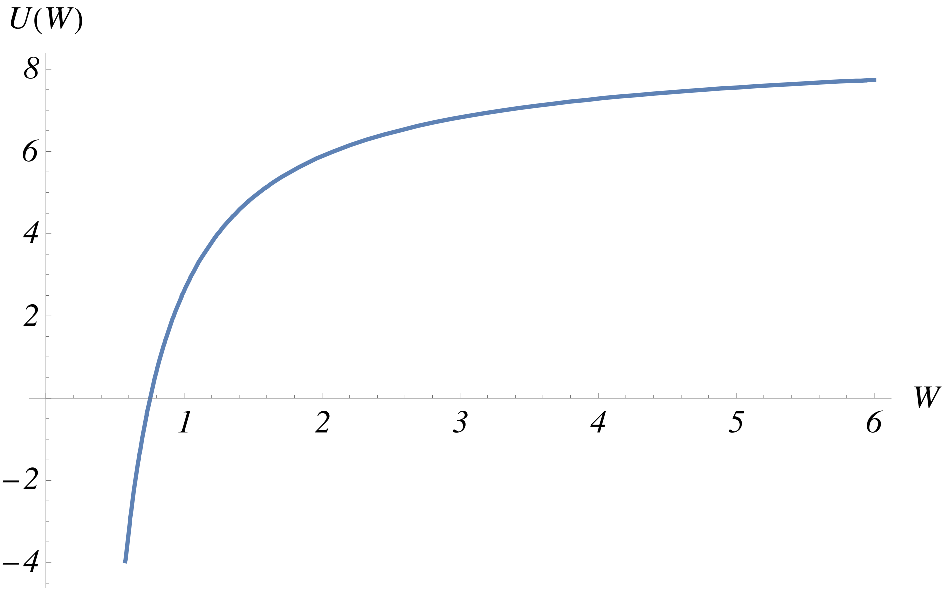
ESERCIZI VARI

E1

[**Caso DARA**] Si supponga che Tizia/o abbia la seguente funzione di utilità

$$U = 10 - e^{2W^{-\frac{1}{2}}}$$

il cui grafico è



Si valuti se il coefficiente che misura l'avversione Assoluta e Relativa al rischio sono crescenti, costanti o decrescenti. Si commenti il risultato.

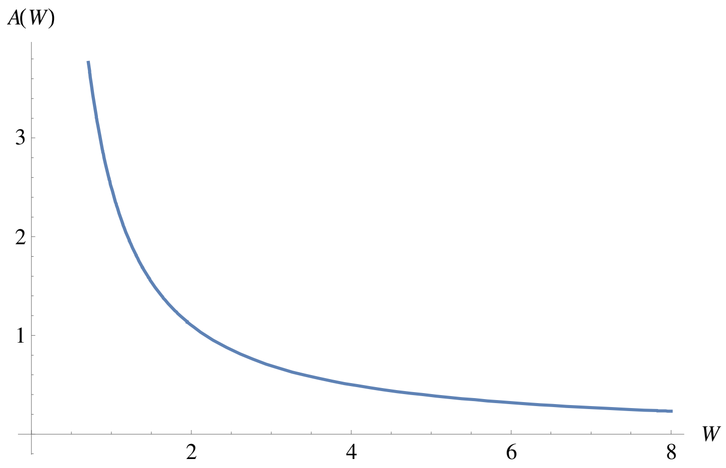
Primo passo: determiniamo $A(W)$ calcolando le derivate prima e seconda e poi il loro quoziente.

$$A(W) = -\frac{d^2U}{dW^2} / \frac{dU}{dW} = \frac{1}{W^{3/2}} + \frac{3}{2W}$$

Allora

$$\frac{dA(W)}{dW} = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{W^{5/2}} + \frac{1}{W^2}\right) < 0$$

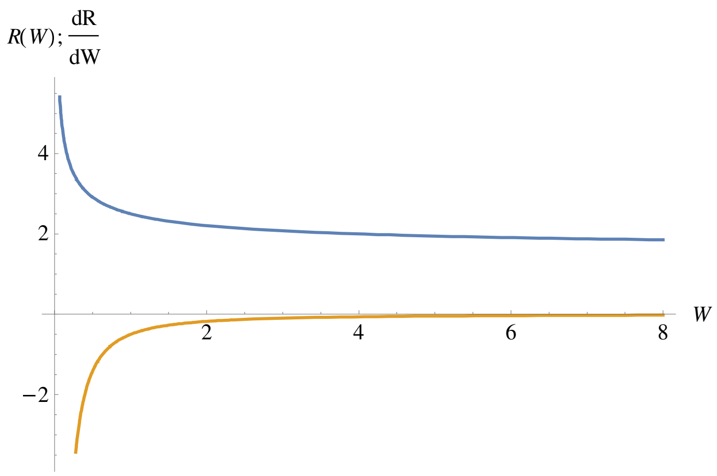
Il segno della derivata di A(W) è negativo e quindi siamo in presenza di un caso DARA. Il grafico seguente illustra l'andamento di $A(W)$ rispetto a W.



Commento: Un individuo DARA diventa meno “ostile” al rischio a mano a mano che diventa più ricco. Un aumento della ricchezza lo indurrà ad aumentare la proporzione della parte (quota, percentuale) rischiosa della ricchezza sulla ricchezza totale.

Secondo passo: determiniamo $R(W)$:

$R(W) = WA(W) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{W}}$ con $\frac{dR(W)}{dW} = -\frac{1}{2W^{\frac{3}{2}}} < 0$. La figura seguente illustra il risultato (la curva nell’ortante positive è $R(W)$).



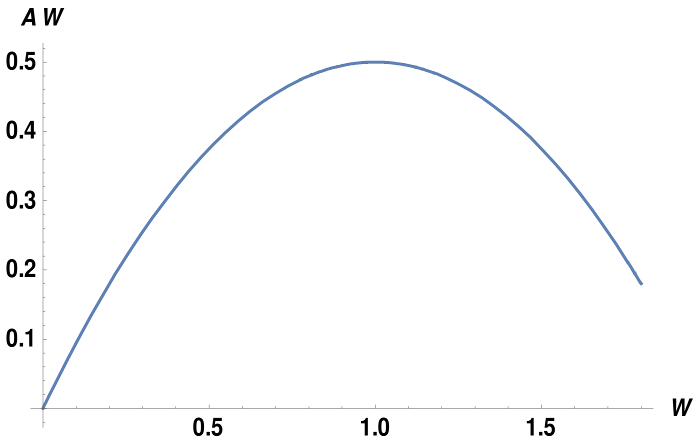
Commento: Un individuo **Decreasing RRA** diventa meno “ostile” al rischio per ciascun valore di W a mano a mano che diventa più ricco. Un aumento della ricchezza lo indurrà ad aumentare la proporzione della parte (quota, percentuale) rischiosa della ricchezza sulla ricchezza totale. Come nel caso DARA.

E2

[**Caso IARA**] Si supponga che Tizia/o abbia la seguente funzione di utilità

$$U = W - \frac{1}{2}W^2 \text{ nel dominio } W \in [0,1)$$

il cui grafico è



Si valuti se il coefficiente che misura l'avversione media al rischio è crescente, costante o decrescente. Si commenti il risultato.

Primo passo: determiniamo $A(W)$ calcolando le derivate prima e seconda e poi il loro quoziente.

$$\frac{dU}{dW} = 1 - W$$
$$\frac{d^2U}{dW^2} = -1$$

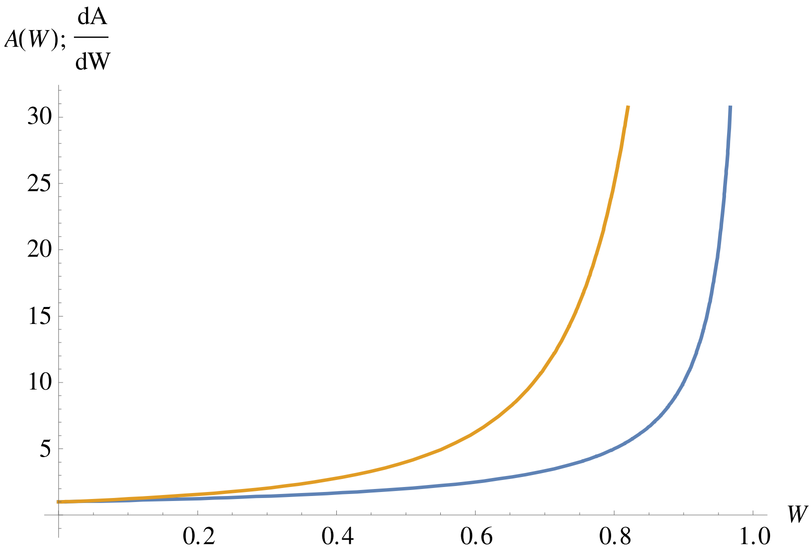
Da cui

$$A(W) = \frac{1}{1-W}$$

Allora

$$\frac{dA(W)}{dW} = \frac{1}{(1-W)^2} > 0$$

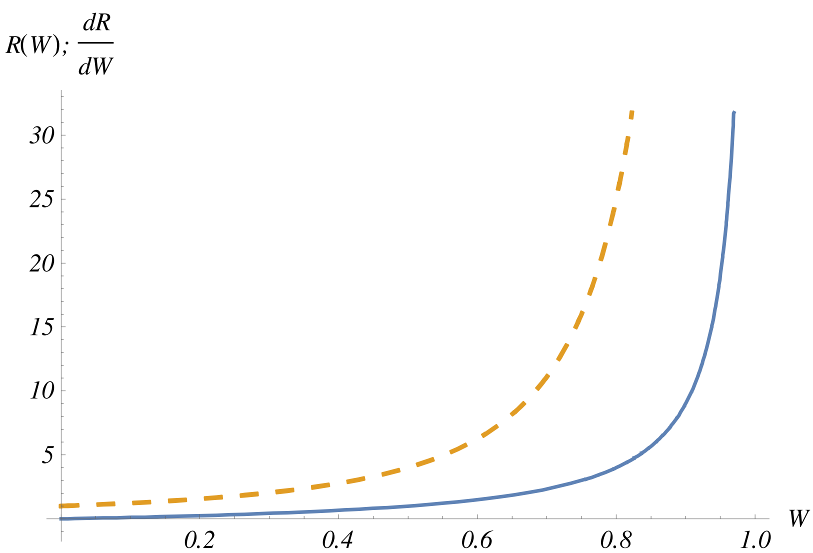
Il segno della derivata è positivo e quindi siamo in presenza di un caso IARA. Il grafico seguente illustra l'andamento di $A(W)$ rispetto a W.



Commento: Un individuo IARA diventa più “ostile” al rischio a mano a mano che diventa più ricco. Un aumento della ricchezza lo indurrà a ridurre la proporzione della parte (quota, percentuale) rischiosa della ricchezza sulla ricchezza totale.

Inoltre

$R(W) = \frac{W}{1-W}$; $\frac{dR}{dW} = \frac{1}{(W-1)^2}$ le cui rappresentazioni grafiche sono



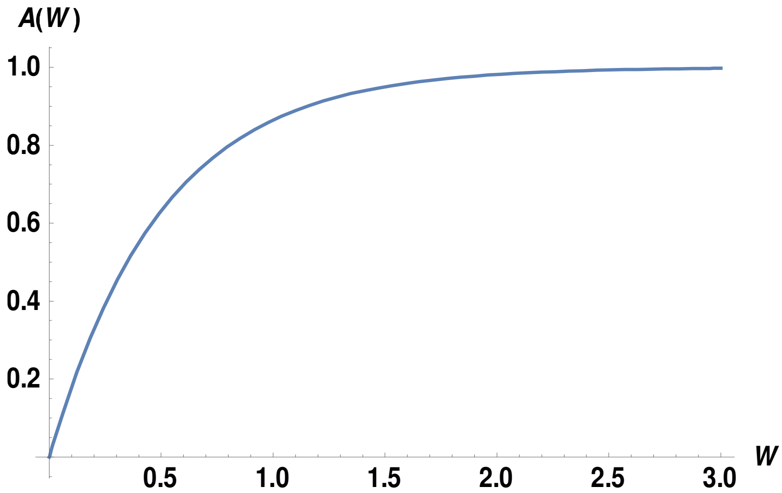
Commento: Vedi sopra

E3

[**Caso CARA**] Si supponga che Tizia/o abbia la seguente funzione di utilità

$$U = 1 - e^{-2W}$$

il cui grafico è



Si valuti se il coefficiente che misura l'avversione media al rischio è crescente, costante o decrescente. Si commenti il risultato.

Primo passo: determiniamo $A(W)$ calcolando le derivate prima e seconda e poi il loro quoziente.

$$\frac{dU}{dW} = 2e^{-2W}$$
$$\frac{d^2U}{dW^2} = -4e^{-2W}$$

Da cui

$$A(W) = 2$$

Allora

$$\frac{dA(W)}{dW} = 0$$

La derivata di A(W) è nulla e quindi siamo in presenza di un caso CARA.

Commento: Un individuo CARA non diventa né più né meno "ostile" al rischio a mano a mano che diventa più ricco. Un aumento della ricchezza lo indurrà a mantenere invariata la proporzione della parte (quota, percentuale) rischiosa della ricchezza sulla ricchezza totale.

Invece

$R(W) = 2W$ con $dR/dW = 2 > 0$

Interpretare la differenza dei risultati.

E4

Tizia/o ha la seguente funzione di utilità $U = \ln(W+1)$ e può scegliere tra due possibili "lotterie":

A:

(W = 10 con probabilità = 1/3)
(W = 15 con probabilità = 1/3)
(W = 5 con probabilità = 1/3)

B:

(W = 100 con probabilità = 1/2)
(W = 10 con probabilità = 1/4)
(W = 0 con probabilità = 1/4)

Valutare 1) se le due lotterie sono compatibili con il suo ordinamento di preferenze; 2) quale delle due preferisce

1) Tizia/o è chiaramente avverso al rischio perché

$$\frac{dU}{dW} = \frac{1}{W+1}$$
$$\frac{d^2U}{dW^2} = -\frac{1}{(W+1)^2}$$

Allora, data la concavità della funzione, deve verificarsi che

$$\underbrace{\ln(1+E[W])}_{U(E[W])} > \underbrace{E[\ln(1+W)]}_{E[U(W)]}$$

Nel caso A: E[W] = 10; U(E[W]) = ln(11) = 2.397; E[U(W)] = (1/3)×[ln(11) + ln(16) + ln(6)] = 2.320. Quindi con A:

E[U(W)] < U(E[W]) che soddisfa la condizione di avversione al rischio

Nel caso B: E[W] = 17.5 ; U(E[W]) = ln(18.5) = 2.917 ; E[U(W)] = (1/2)×[ln(101)] +(1/4) × ln(11)] = 2.907.
Quindi con B:

E[U(W)] < U(E[W]) che soddisfa la condizione di avversione al rischio.

2) Entrambe le lotterie sono compatibili con il suo sistema di preferenze, ma Tizia/o sceglierà la lotteria B che dà un valore più alto di E[U(W)]).

E5

Utilizzando le due "lotterie" di cui all'esercizio precedente

A:

(W = 10 con probabilità = 1/3)
(W = 15 con probabilità = 1/3)
(W =   5 con probabilità = 1/3)

B:

(W = 100 con probabilità = 1/2)
(W =   10 con probabilità = 1/4)
(W =   0 con probabilità = 1/4)

e supponendo che Tizia/o ha una funzione di utilità U(W) = 2 + W^2, valutare 1) se le due lotterie sono compatibili con il suo ordinamento di preferenze; 2) quale delle due preferisce

1) Tizia/o è chiaramente amante del rischio perché

$$\frac{dU}{dW} = 2 + 2x$$
$$\frac{d^2U}{dW^2} = 2$$

e

$$A(W) = -\frac{2}{2+2x} = -\frac{1}{x+1}$$

Allora, data convessità della funzione, deve verificarsi che

$$\underbrace{(2+E[W]^2)}_{U(E[W])} < \underbrace{E[2+W^2]}_{E[U(W)]}$$

Nel caso A: E[W] = 10 e E[U(W)] = 2 +(1/3)×[10^2 + 15^2 + 5^2]. Quindi con A:

$$\left(2+10^2\right) < 2+\frac{10^2+15^2+5^2}{3}$$
$$102 < 335.3\overline{3}$$

Nel caso B: E[W] = 17.5; U(E[W]) = 2 + [(1/2) × $(100)^2$ + (1/4) × (10^2) + 0] = 2.907. Quindi con B:

$$\left(2+17.5^2\right) < 2+\frac{100^2}{2}+\frac{10^2}{4}$$
$$308.25 < 5027$$

E[U(W)] < U(E[W]) che soddisfa la condizione di avversione al rischio.

2) Entrambe le lotterie sono compatibili con il suo sistema di preferenze, ma Tizia/o sceglierà la lotteria B che dà un valore più alto di E[U(W)]).