Capitolo 1 - Introduzione alla fisica dei plasmi

1 Criteri per definire un plasma

In un grafico bi-logaritmico, avente per assi la densità elettronica n_e nell'intervallo da 10^6 a 10^{25} particelle / m^3 e la temperatura T nell'intervallo da 0.01 a 10^5 eV, rappresentare le linee su cui sono costanti la lunghezza di Debye λ_D e il numero N_D di particelle nella sfera di Debye. Sullo stesso grafico, posizionare poi i seguenti punti, per i quali n_e e T sono espressi in m^{-3} ed eV, rispettivamente:

1. Un tipico reattore a fusione: $n_e = 10^{21}$, $T = 10^4$
2. Ionosfera: $n_e = 10^{11}$, $T = 0.05$
3. Scarica a bagliore: $n_e = 10^{15}$, $T = 2$
4. Fiamma: $n_e = 10^{14}$, $T = 0.1$
5. Plasma al cesio: $n_e = 10^{17}$, $T = 0.2$
6. Spazio interplanetario: $n_e = 10^6$, $T = 0.01$

Per ciascuno di questi esempi, verificare che si tratta effettivamente di plasmi.

2 Schermo di Debye in tre dimensioni

Si consideri una carica q immersa in un plasma omogeneo ed indefinito fatto di specie cariche individuate dall'indice α. Ciascuna specie ha carica q_α e densità e temperatura di equilibrio pari a $n_{0\alpha}$ e $T_{0\alpha}$, rispettivamente.

1. Seguendo la procedura vista durante le lezioni per ottenere lo schermo di Debye nel caso dell'esempio uno-dimensionale, mostrare che, per questo caso, l'equazione di Poisson per il potenziale $\phi(r)$ è

$$\nabla^2 \phi = -q\delta(\mathbf{r})/\epsilon_0 + \frac{\phi(r)}{\lambda_D^2} \tag{1}$$

dove il simbolo δ indica la funzione impropria delta di Dirac e $\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_{D\alpha}^2} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_{0\alpha}}{\epsilon_0 T_{0\alpha}}$ indica l'inverso del quadrato della lunghezza di Debye.

2. Usando coordinate sferiche, si consideri per prima cosa l'equazione 1 nella regione $r > 0$. Usando l'espressione dell'operatore di Laplace in tali coordinate, si cerchi una soluzione dell'equazione 1 del tipo $\phi(r) = g(r)/r$ dove $g(r)$ è una funzione da determinare. Si verifichi, per sostituzione nell'equazione 1, che $g(r)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2 g}{dr^2} = \frac{g(r)}{\lambda_D^2} \tag{2}$$

Si mostri quindi che la soluzione generale fisicamente significativa dell'equazione 1 per $r > 0$ è

$$\phi(r) = A \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r} \tag{3}$$

dove A è una costante arbitraria.

3. Si verifichi che il campo elettrico $\mathbf{E}$ associato al potenziale $\phi(r)$ determinato in precedenza ha espressione

$$\mathbf{E} = \frac{A}{r^2} \exp(-r/\lambda_D) \left(1 + \frac{r}{\lambda_D}\right) \hat{\mathbf{r}} \tag{4}$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore radiale.

4. Applicando il teorema di Gauss per l'elettrostatica ad una sfera centrata in $r = 0$, ed usando l'espressione per il campo elettrico sopra determinata, mostrare che

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \tag{5}$$

e, dunque,

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r} \tag{6}$$