La logica proposizionale

Logica formale (o matematica)

-Linguaggio, formule ben formate
-Semantica
-Apparato deduttivo

Logica proposizionale — sintassi

$PA = \{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots\}$ proposizioni atomiche

$\bot , \top$ costanti logiche

$\neg , \vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow$ connettivi

$(\; , \;)$ delimitatori

Definiamo induttivamente F_P insieme delle formule ben formate

1. $\bot , \top \in F_P$
2. Per ogni $p_i \in PA$, $p_i \in F_P$
3. Se $A, B \in F_P$, allora

$$(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), \dots \in F_P$$

Esempio $(x < 0 \wedge (\neg (Y \geqslant Z)))$

Logica proposizionale – semantica

Funzione di valutazione $\quad v : PA \rightarrow \{0, 1\}$

FALSO $\quad$ VERO

Estendiamo induttivamente v a F_P

$$I_v : F_P \rightarrow \{0, 1\}$$ interpretazione

1. $I_v(\bot) = 0 \qquad I_v(\top) = 1$
2. Per ogni $p_i \in PA \quad I_v(p_i) = v(p_i)$
3. $I_v(\neg A) = 1 - I_v(A)$

$I_v(A \vee B) = 1$ se, e solo se, $I_v(A) = 1$ o $I_v(B) = 1$

...

$I(A \rightarrow B) = 1$ se, e solo se, $I_v(B) = 1$ o $I_v(A) = 0$

Logica proposizionale – semantica

A è SODDISFATTA da I_V se $I_V(A) = 1$

A è SODDISFACIBILE se esiste I_V tale che $I_V(A) = 1$

A è una TAUTOLOGIA se $I_V(A) = 1$ per ogni I_V

A è CONTRADDITTORIA se $I_V(A) = 0$ per ogni I_V

Esempi di tautologie $\quad A \to (B \to A) \qquad \bot \to A$

EQUIVALENZA LOGICA $\quad A \equiv B$ se, e solo se $I_V(A) = I_V(B)$ per ogni I_V

$$A \land (A \lor B) \equiv A \qquad \neg\neg A \equiv A \qquad \neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$$

$$A \lor \neg A \equiv \top \qquad A \to B \equiv \neg B \to \neg A \qquad A \land \neg A \equiv \bot$$

Modello

$$M \subseteq PA \qquad I_M : F_P \to \{0,1\} \qquad I_M(p_i) = 1 \text{ sse } p_i \in M$$

$M \models A \qquad M$ MODELLA A, A è SODDISFATTA in M

Logica proposizionale – apparato deduttivo

Regola di inferenza $\dfrac{A_1, \ldots, A_N}{B}$ $A_i \in F_P$ premesse $B \in F_P$ conclusione

Calcolo della deduzione naturale

$$\frac{A_1 \qquad A_2}{A_1 \wedge A_2} \qquad \frac{A_1 \wedge A_2}{A_1} \qquad \frac{A_1 \wedge A_2}{A_2}$$

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \text{ MODUS PONENS} \qquad \frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A} \text{ MODUS TOLLENS}$$

...

Dimostrazione Catena di applicazioni di regole $A_1, \ldots, A_N \vdash B$

Teorema Se $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ allora $A_1, \ldots, A_n \vDash B$ validità, correttezza

Teorema Se $A_1, \ldots, A_n \vDash B$ allora $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ completezza