

La logica proposizionale

Logica formale (o matematica)

- Linguaggio, formule ben formate
- Semantica
- Apparato deduttivo

Logica proposizionale — sintassi

$PA = \{ p_1, p_2, \dots, p_i, \dots \}$ proposizioni atomiche

\perp, T costanti logiche

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ Connettivi

$(,)$ delimitatori

Definiamo induttivamente F_P insieme delle formule ben formate

1. $\perp, T \in F_P$

2. Per ogni $p_i \in PA$, $p_i \in F_P$

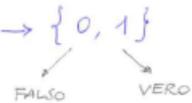
3. Se $A, B \in F_P$, allora

$(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), \dots \in F_P$

Esempio $(x < 0 \wedge (\neg (Y \geq Z)))$

Logica proposizionale - semantica

Funzione di valutazione $v: PA \rightarrow \{0, 1\}$



Estendiamo induttivamente v a F_p

$I_v: F_p \rightarrow \{0, 1\}$ interpretazione

- $I_v(\perp) = 0$ $I_v(\top) = 1$
 - Per ogni $p_i \in PA$ $I_v(p_i) = v(p_i)$
 - $I_v(\neg A) = 1 - I_v(A)$
- $I_v(A \vee B) = 1$ se, e solo se, $I_v(A) = 1$ o $I_v(B) = 1$
- ...
- $I_v(A \rightarrow B) = 1$ se, e solo se, $I_v(B) = 1$ o $I_v(A) = 0$

Logica proposizionale - semantica

- A è SODDISFATTA da I_V se $I_V(A) = 1$
- A è SODDISFACIBILE se esiste I_V tale che $I_V(A) = 1$
- A è una TAUTOLOGIA se $I_V(A) = 1$ per ogni I_V
- A è CONTRADDITTORIA se $I_V(A) = 0$ per ogni I_V

Esempi di tautologie $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ $\perp \rightarrow A$

EQUIVALENZA LOGICA $A \equiv B$ se, e solo se $I_V(A) = I_V(B)$ per ogni I_V

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A \quad \neg \neg A \equiv A \quad \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$
$$A \vee \neg A \equiv T \quad A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A \quad A \wedge \neg A \equiv \perp$$

Modello

$$M \subseteq PA \quad I_M: F_P \rightarrow \{0,1\} \quad I_M(p_i) = 1 \text{ sse } p_i \in M$$

$$M \models A \quad M \text{ MODELLA } A, A \text{ è SODDISFATTA in } M$$

Logica proposizionale - apparato deduttivo

Regola di inferenza $\frac{A_1, \dots, A_N}{B}$ $A_i \in F_p$ premesse
 $B \in F_p$ conclusione

Calcolo della deduzione naturale

$$\frac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2}$$

$$\frac{A_1 \wedge A_2}{A_1}$$

$$\frac{A_1 \wedge A_2}{A_2}$$

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ MODUS PONENS}$$

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A} \text{ MODUS TOLLENS}$$

...

Dimostrazione Catena di applicazioni di regole $A_1, \dots, A_N \vdash B$

Teorema Se $A_1, \dots, A_n \vdash B$ allora $A_1, \dots, A_n \vDash B$ validità, correttezza

Teorema Se $A_1, \dots, A_n \vDash B$ allora $A_1, \dots, A_n \vdash B$ completezza