Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
20 Giugno 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da
$$f(x, y) = (x + y)e^{-y^2-x}.$$

   a. **(2 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione f nel suo dominio;

   b. **(3 punti)** si determinino gli eventuali massimi e minimi assoluti della funzione f in
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\right\};$$

   c. **(3 punti)** determinare, se esistono, la retta tangente alla curva di livello di f passante per il punto $(1/2, 1/2)$ e la retta tangente alla curva di livello di f passante per $(2, 1)$.

2. **(7 punti)** Sia

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : 2x^2 + 2y^2 + z^2 < 1\, ; z > \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

a. **(4 punti)** Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste

$$\int_D \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^a} \,\mathrm{d}x \;\mathrm{d}y \;\mathrm{d}z;$$

b. **(3 punti)** si calcoli, se esiste, il precedente integrale nel caso $a = 1$.

3. **(8 punti)** Sia data la serie di funzioni, con $a \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \frac{(2x)^n}{1 + x^{2n}}.$$

a. **(5 punti)** Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme E_a di convergenza semplice;

b. **(1 punto)** si stabilisca per quali valori di a la convergenza é uniforme su *tutto* E_a;

c. **(2 punti)** sia, dove esiste, $f(x)$ la somma della serie di funzioni assegnata; si stabilisca, al variare di $a \in \mathbb{R}$, quando è valida l'uguaglianza

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} n^a \frac{(2x)^n}{1 + x^{2n}}\,\mathrm{d}x.$$

4. **(7 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = 0 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione $y_{a,b}$ e, quando possibile, la si determini.

b. **(2 punti)** Si determinino $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in modo tale che $y_{a,b}$ possa essere definita su tutto $\mathbb{R}$.

c. **(2 punti)** Si determinino, al variare di $c \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = 0 \\ y(0) = c \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$