Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
20 Giugno 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = (x + y)e^{-y^2-x}.$$

a. **(2 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione f nel suo dominio;

- $\nabla F(x,y) = e^{-y^2-x}(1-x-y,\ 1-2xy-2y^2) = 0 \iff (x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$HF(x,y) = \begin{bmatrix} e^{-y^2-x}(x+y-2) & e^{-y^2-x}(2yx+2y^2-2y-1) \\ e^{-y^2-x}(2yx+2y^2-2y-1) & e^{-y^2-x}(-2x-2y+4xy^2+4y^3-4y) \end{bmatrix} \underset{x=y=\frac{1}{2}}{=} e^{-\frac{3}{4}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Essendo $HF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ definita negativa, $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è Massimo locale.

b. **(3 punti)** si determinino gli eventuali massimi e minimi assoluti della funzione f in

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\};$$

- $0 = x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = (x+y-1)^2$ cioè il vincolo è $y = -x+1$: non essendo il vincolo compatto non possiamo garantire l'esistenza di Max / Min assoluti
- $g(x) = F(x, -x+1) = e^{-x^2+x-1} \Rightarrow g'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x-1} \Rightarrow g'$ Max $x=\frac{1}{2}$

notando che $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ sul vincolo, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è Max assoluto e Min assoluto non esiste

c. **(3 punti)** determinare, se esistono, la retta tangente alla curva di livello di f passante per il punto $(1/2, 1/2)$ e la retta tangente alla curva di livello di f passante per $(2, 1)$.

- la curva di livello $F(x,y) = F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è formata dal solo punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ essendo tale punto un Massimo locale per F: la retta tg non esiste
- la curva di livello $F(x,y) = F(2,1) = 3e^{-3}$:

definiamo $F(x,y) = (x+y)e^{-y^2-x} - 3e^{-3}$; abbiamo $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{-y^2-x}(1-2xy-2y^2) \underset{\text{per } x=2 \text{ e } y=1}{=} -5e^{-3}$

Essendo $F(2,1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(2,1) \neq 0 \Rightarrow \exists \phi : U_2 \to V_1$ tale che $\phi(2) = 1$ e $F(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in U_2$. la retta tangente a tale funzione (che rappresenta la curva di livello richiesta) è

$y = \phi(2) + \phi'(2)(x-2)$

$\Rightarrow y = 1 - \frac{2}{5}(x-2)$

$$\phi'(2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(2,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(2,1)} = -\frac{-2}{-5e^{-3}} = -\frac{2}{5}$$

2. **(7 punti)** Sia

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : 2x^2 + 2y^2 + z^2 < 1\,; z > \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

a. **(4 punti)** Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste

$$\int_D \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^a}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z;$$

passando in coordinate cilindriche: $D' = \{(\rho, \vartheta, z) : 2\rho^2 + z^2 < 1\,;\ z > \rho,\ \vartheta \in [0, 2\pi]\} = \{0 \le \rho < \frac{1}{\sqrt{3}},\ \rho < z < \sqrt{1-2\rho^2},\ \vartheta \in [0, 2\pi]\}$

$$\int_D \frac{\rho z \, d\vartheta d\rho dz}{(\rho^2 + z^2)^a} = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\rho}{2} \int_\rho^{\sqrt{1-2\rho^2}} \frac{2z}{(\rho^2+z^2)^a}\, dz\, d\rho =$$

$a \neq 1$

$$= 2\pi \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\rho}{2} \left[\frac{1}{1-a} (1-\rho^2)^{1-a} - \frac{(2\rho^2)^{1-a}}{1-a} \right] d\rho \ \exists \text{ se } \ 2a-3<1$$

$a < 2$

b. **(3 punti)** si calcoli, se esiste, il precedente integrale nel caso $a = 1$.

$$a = 1 \qquad \int_{D'} \frac{\rho z\, dz d\rho d\vartheta}{\rho^2 + z^2} = \pi \int_0^{1/\sqrt{3}} \rho \left(\log(1-\rho^2) - \log(2\rho^2) \right) d\rho =$$

$$= \pi \left\{ \left[\frac{\rho^2}{2} \log(1-\rho^2) \right]_0^{1/\sqrt{3}} + \int_0^{1/\sqrt{3}} -\rho + \frac{\rho}{1-\rho^2} - \int_0^{1/\sqrt{3}} \rho \log 2\rho^2 \right\} =$$

$$\pi \left[\frac{1}{6} \log\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \log\frac{2}{3} \quad - \frac{1}{6} \log\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right] = -\frac{\pi}{2} \log\frac{2}{3}$$

3. **(8 punti)** Sia data la serie di funzioni, con $a \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \frac{(2x)^n}{1+x^{2n}}. \quad = \sum f_{n,a}(x)$$

a. **(5 punti)** Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme E_a di convergenza semplice;

Se $|2x|<1$ $\quad f_{n,a}(x) \sim n^a (2x)^n$ assolutamente convergente $\forall a$

se $2x=1$ $\quad f_{n,a}(x) = \dfrac{n^a}{1+\frac{1}{2^{2n}}}$ convergente solo per $a<-1$

se $2x=-1$ $\quad f_{n,a}(x) = \dfrac{(-1)^n n^a}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$ convergente per $a<0$ per Leibniz

Se $\frac{1}{2}<|x|<1$ $\quad f_{n,a}(x) \sim n^a (2x)^n \not\to 0$ quindi la serie diverge per $x>0$, non converge per $x<0$

Se $|x|>1$ $\quad f_{n,a}(x) \sim n^a \left(\dfrac{2x}{x^2}\right)^n$ che converge solo se $x^2>|2x|$ cioè $\{x>2\} \cup \{x<-2\}$

(*)

b. **(1 punto)** si stabilisca per quali valori di a la convergenza é uniforme su *tutto* E_a;

$|f_{n,a}(x)| \leq n^a$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$ oppure $|x| \geq 2$ quindi c'è convergente uniforme per $a<-1$. Per gli altri valori di a NON c'è convergente uniforme per il Teorema del doppio limite

c. **(2 punti)** sia, dove esiste, $f(x)$ la somma della serie di funzioni assegnata; si stabilisca, al variare di $a \in \mathbb{R}$, quando è valida l'uguaglianza

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} n^a \frac{(2x)^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x.$$

Se $|x| \leq \frac{1}{4}$ $\quad |f_{n,a}(x)| \leq n^a \left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergente $\forall a$. Quindi per Weierstrass c'è convergente uniforme e l'uguaglianza vale $\forall a$.

(*) Se $x=2$ $\quad f_{n,a}(2) = n^a \dfrac{4^n}{1+4^n}$ converge per $a<-1$

Se $x=-2$ $\quad f_{n,a}(-2) = (-1)^n n^a \dfrac{4^n}{1+4^n}$ converge per $a<0$ per Leibniz

$E_a = (-\infty,-2] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (2,+\infty)$ se $-1 \leq a < 0$

$E_a = (-\infty,-2] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [2,+\infty)$ se $a<-1$

$E_a = (-\infty,-2) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (2,+\infty)$ se $a \geq 0$

4. **(7 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = 0 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione $y_{a,b}$ e, quando possibile, la si determini.

• $y'' = f(x,y,y') = \frac{2y}{x^2}$ è continua per $x \neq 0$ e Lipschitz rispetto a y e y' se $x \neq 0$.

$\Rightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ esiste unica la soluzione locale

• se $x>0$, posto $x = e^t$ e $z(t) = y(e^t)$ otteniamo $z'' - z' + 2z = 0 \Rightarrow z = Ae^{2t} + Be^{-t}$

$\Rightarrow y = Ax^2 + \frac{B}{x}$ con $A, B \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B = a \\ 2A - B = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{a+b}{3} \\ B = \frac{2a-b}{3} \end{cases}$

Quindi $y = \frac{1}{3}\left((a+b)x^2 + \frac{2a-b}{x}\right)$ ✱

b. **(2 punti)** Si determinino $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in modo tale che $y_{a,b}$ possa essere definita su tutto $\mathbb{R}$.

• se $x<0$, posto $x = -e^t$ e $z(t) = y(-e^t)$ otteniamo di nuovo $z'' - z' + 2z = 0$

$\Rightarrow y = Cx^2 + \frac{D}{x}$. Quindi ✱ è soluzione anche in $x<0$.

Poiché la soluzione deve essere $C^2(\mathbb{R})$, necessariamente $2a - b = 0$

$\Rightarrow b = 2a$. $y_{a,2a}(x) = ax^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

c. **(2 punti)** Si determinino, al variare di $c \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = 0 \\ y(0) = c \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

• se $y(0) = c$, da $x^2y''(x) - 2y(x) = 0$ abbiamo $0\,y''(0) - 2c = 0 \Rightarrow c = 0$

• Per cui se $c \neq 0$, certamente non esiste soluzione.

$y = Ax^2 + \frac{B}{x}$ per $x>0$ e $y = Cx^2 + \frac{D}{x}$ per $x<0$ possono essere soluzioni definite in $x=0$ solo se $B = D = 0$.

Otteniamo $y' = 2Ax$, $y'' = 2A$ per $x>0$

e $y' = 2Cx$, $y'' = 2C$ per $x<0$

Dovendo anche $y'(0) = 0$ e y in C^2 in un intorno di $x=0$

abbiamo $y = Ax^2$ sono tutte le soluzioni del problema per $c = 0$

$A = B$