Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
23 Febbraio 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(7 punti)** Sia

$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$$

a. **(2 punti)** Si calcoli

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)$$

b. **(3 punti)** si determinino massimi e minini relativi di f nel suo dominio precisando se si tratta di massimi/minimi assoluti.

c. **(2 punti)** si disegni un grafico qualitativo della curva di livello passante per $(1,1)$.

2. **(10 punti)**

a. **(3 punti)** Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione per 180° di

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y < x^2 + y^2 < x\}$$

intorno alla retta $2x + 2y = 1$ del piano $\mathbb{R}^2$;

b. **(7 punti)** si verifichi che $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{(y^2 + z^2)^2}$ é integrabile in

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y < x^2 + y^2 < x < z\}$$

e si calcoli $\displaystyle\int_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

3. **(7 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n.$$

a. **(3 punti)** Si determini l'insieme di convergenza puntuale E e si stabilisca se in tale insieme la convergenza è uniforme;

b. **(2 punti)** si stabilisca se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{0} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x;$$

c. **(2 punti)** si stabilisca se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/2}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

4. **(7 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = -3x^3 \log |x| \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = a \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si determini la soluzione locale

b. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono valori di a tali per cui la soluzione é definita su tutto $\mathbb{R}$.

c. **(2 punti)** Nel caso esistano soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ se ne discuta l'unicitá.