Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
23 Febbraio 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Sia
$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$$

   a. **(2 punti)** Si calcoli
$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = 0$$

infatti, posto $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\sin\theta$

$$|f(x,y)| \le \rho|\cos\theta+\sin\theta|e^{-\rho^2} \le 2\rho e^{-\rho^2} \to 0 \quad \text{per } \rho\to+\infty$$

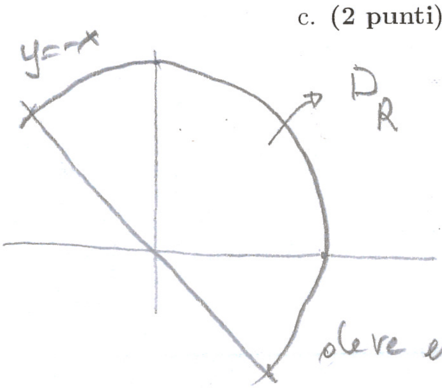
   b. **(3 punti)** si determinino massimi e minini relativi di f nel suo dominio precisando se si tratta di massimi/minimi assoluti.

$$\begin{cases} f_x = e^{-x^2-y^2} - 2x(x+y)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f_y = e^{-x^2-y^2} - 2y(x+y)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x(x+y) = 2y(x+y)$$

$x+y=0$ non dà soluzioni

quindi $x = y = \pm\frac{1}{2}$ sono le uniche soluzioni

   c. **(2 punti)** si disegni un grafico qualitativo della curva di livello passante per $(1,1)$.



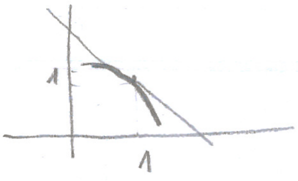
Sia R abbastanza grande in modo che $f(R\cos\theta, R\sin\theta) < f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ In D_R la funzione è ≥ 0. I punti $(x,-x)$ sono minimi relativi a D_R, per il teorema di Weierstrass il massimo deve esistere, non potendo trovarsi sul bordo, è in $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Quindi $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è punto di massimo assoluto e analogamente $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ è minimo assoluto.

Punto c: $f_y(1,1) = -3e^{-2} \neq 0$ sia $y=y(x)$ definita implicitamente dall'equazione $(x+y)e^{-x^2-y^2} = 2e^{-2}$ in $U(1,1)^1$ $y'(x) = -\dfrac{(1-2x(x+y(x)))}{(1-2y(x)(x+y(x)))} \Rightarrow$

$y'(1) = -1$

$y''(1) = -8/3$

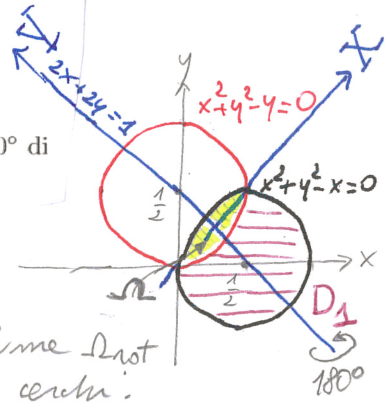


2. **(10 punti)**

a. **(3 punti)** Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione per 180° di

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < x^2 + y^2 < x\}$$

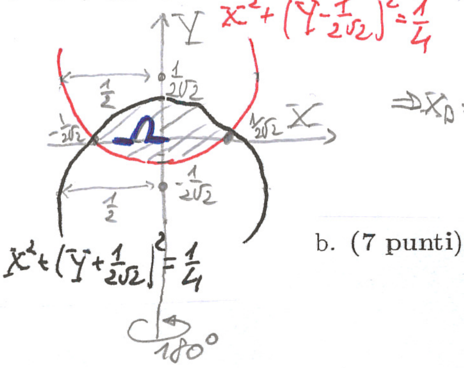
intorno alla retta $2x + 2y = 1$ del piano $\mathbb{R}^2$;



- D_1 è la regione interna a $x^2+y^2-x=0$ ed esterna a $x^2+y^2-y=0$
- Il volume richiesto è una sfera di raggio $\frac12$ a cui viene tolto il volume Ω_{rot} ottenuto dalla rotazione di Ω che è la regione comune ai due cerchi.

$\Rightarrow Vol = \frac43\pi\left(\frac12\right)^3 - Vol(\Omega_{rot})$. Calcoliamo questo secondo volume

- Introduco i nuovi assi (X,Y) in figura. $Vol(\Omega_{rot}) = 2\pi X_B \, area(\Omega^+)$ ove $\Omega^+ = \Omega \cap \{X \geq 0\}$ e (X_B, Y_B) sono le coordinate del baricentro di Ω^+.



$$\Rightarrow X_B = \frac{1}{Area(\Omega^+)}\int_{\Omega^+} X\,dX\,dY = \frac{1}{Area(\Omega^+)}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt2}} X \int_{-\sqrt{\frac14-X^2}+\frac{1}{2\sqrt2}}^{\sqrt{\frac14-X^2}-\frac{1}{2\sqrt2}} 1 \, dY = \frac{1}{Area(\Omega^+)}\,\frac23\left(\left(\frac14\right)^{3/2}-\left(\frac18\right)^{3/2}\right)$$

$\Rightarrow$ Volume richiesto $= \frac43\pi\frac18 - \frac43\pi\left(\left(\frac14\right)^{3/2}-\left(\frac18\right)^{3/2}\right)$

b. **(7 punti)** si verifichi che $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{(y^2 + z^2)^2}$ é integrabile in

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y < x^2 + y^2 < x < z\}$$

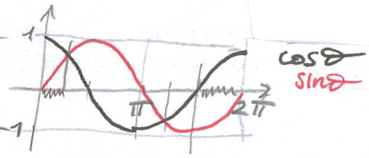
e si calcoli $\displaystyle\int_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

- $f \geq 0$ per i punti di D in cui $y \geq 0$
- Coordinate polari $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r\sin\theta < r^2 < r\cos\theta < z$

$\Rightarrow \sin\theta < r < \cos\theta$

$\Downarrow$

$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac32\pi, 2\pi\right)$



Se $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\theta < r < \cos\theta$ e $z > r\cos\theta$: in questo insieme $f \geq 0$

se $\theta \in \left(\frac32\pi, 2\pi\right) \Rightarrow 0 < r < \cos\theta$ e $z > r\cos\theta$: in questo insieme $f \leq 0$

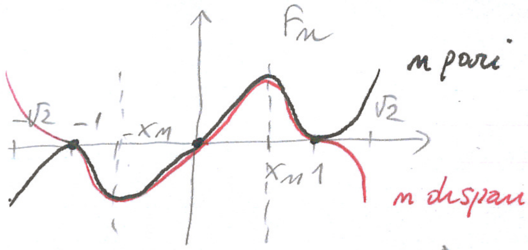
$$\int_D f\,dx\,dy\,dz \underset{\text{se } \exists}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\int_{r\cos\theta}^{\infty} \frac{z r^3 \cos\theta\sin\theta}{(r^2\sin^2\theta + z^2)^2}\,dz\,dr\,d\theta + \int_{\frac32\pi}^{2\pi}\int_0^{\cos\theta}\int_{r\cos\theta}^{\infty} \frac{z r^3 \cos\theta\sin\theta}{(r^2\sin^2\theta + z^2)^2}\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} r^3\, \frac12\left(\frac{-1}{r^2\sin^2\theta + z^2}\right)\Bigg|_{r\cos\theta}^{\infty} dr\,d\theta + \int_{\frac32\pi}^{2\pi} \cos\theta\sin\theta \int_0^{\cos\theta} r^3\, \frac12\left(\frac{-1}{r^2\sin^2\theta + z^2}\right)\Bigg|_{r\cos\theta}^{\infty} dr\,d\theta$$

$$= \frac12\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{r^3}{r^2}\,dr\,d\theta + \frac12\int_{\frac32\pi}^{2\pi} \cos\theta\sin\theta \int_0^{\cos\theta} \frac{r^3}{r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \frac12\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta \left(\frac12 r^2\Big|_{\sin\theta}^{\cos\theta}\right) d\theta + \frac12\int_{3/2\pi}^{2\pi} \cos\theta\sin\theta \left(\frac12 r^2\Big|_0^{\cos\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac14\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) d\theta + \frac14\int_{\frac32\pi}^{2\pi} \cos^3\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{32} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{32}$$



3. **(7 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n.$$

a. **(3 punti)** Si determini l'insieme di convergenza puntuale E e si stabilisca se in tale insieme la convergenza è uniforme;

• $f_n(-x) = -f_n(x)$

• $f_n(0) = f_n(\pm 1) = 0$

se $|1-x^2|<1$, $x\neq 0$ e $x\neq\pm 1$ $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

se $|1-x^2|\geq 1$ $|f_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

$\Rightarrow$ f_n converge puntualmente in $E=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $f(x)=0$

• $f_n'(x) = n(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$;

se $x_n = \sqrt{\frac{1}{1+2n}}$, in $[0,\sqrt{2}]$ $\quad$ 0 $\quad x_n$ $\quad$ 1 $\quad \sqrt{2}$

n pari $\quad$ n dispari

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})}|f_n(x)-0| \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2n}}\left(\frac{2n}{1+2n}\right) = \infty$$

NON converge uniformemente in E

b. **(2 punti)** si stabilisca se

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x;$$

• Non c'è conv. uniforme in $[-1,0]$ (si noti che $-x_n\in[-1,0]$)

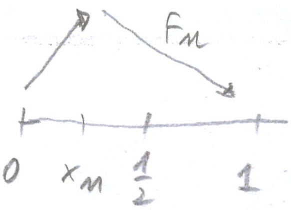
• $\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0} nx(1-x^2)^n dx = \lim_{n\to\infty} -(1-x^2)^{n+1}\frac{n}{2(n+1)}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}$

• $\int_{-1}^{0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx = 0$ $\longleftarrow$ FALSA l'uguaglianza

c. **(2 punti)** si stabilisca se

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/2}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$

• in $x\in[\frac{1}{2},1]$



per n grande f_n è decrescente

$\Rightarrow$ $\sup_{x\in[\frac{1}{2},1]}|f_n(x)| = |f_n(\frac{1}{2})| = \frac{n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n = a_n$

• Poichè $\sum a_n$ è convergente, per il criterio di Weierstrass la $\sum f_n$ converge uniformemente in $[\frac{1}{2},1]$. Quindi vale l'uguaglianza

4. **(7 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 2y = -3x^3\log|x| \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = a \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si determini la soluzione locale

ponendo $x = e^t$ l'equazione diventa: $y''_t - y'_t - 2y_t = -3e^{3t}t$; Soluzioni dell'omogenea sono $c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x}$

per la non omogenea si procede con la variazione delle costanti arbitrarie: Il Wronskiano di $x^2, \frac{1}{x}$ è -3, quindi

b. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono valori di a tali per cui la soluzione é definita su tutto $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} c_1' x^2 + c_2' \frac{1}{x} = 0 \\ c_1' 2x - c_2' \frac{1}{x^2} = -3x\log|x| \end{cases}$$

$c_1' = -\log|x| \Rightarrow c_1 = -x\log|x| + x$

$c_2' = x^3\log|x| \Rightarrow c_2 = \frac{x^4}{4}\log|x| - \frac{x^4}{16}$

Integrale generale: $c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x} + \frac{3}{4}x^3\log|x| + \frac{15}{16}x^3$; imponendo le condizioni iniziale si trova:

c. **(2 punti)** Nel caso esistano soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ se ne discuta l'unicitá.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{15}{16} \\ 2c_1 - c_2 = a - \frac{33}{16} \end{cases}$$

punto b: affinché la soluzione sia definita su tutto R deve essere $c_2 = 0$, quindi

$c_1 = \frac{15}{16}$ e $\frac{15}{8} = a - \frac{33}{16}$ cioè $a = \frac{15}{8} + \frac{33}{16}$

per tale valore di a la soluzione $\bar{y}(x) =$

$\frac{15}{16}x^2 - \frac{3}{4}x^3\log|x| + \frac{15}{16}x^3$ risulta prolungabile con continuità su R

Inoltre anche le due derivate (prima e seconda) risultano prolungabili su R.

punto c): tentiamo di raccordare $\bar{y}(x)$ con $c_1 x^2 + \frac{3}{4}x^3\log|x| + \frac{15}{16}x^2$

(soluzione per $x<0$) imponendo il raccordo C^2 in 0 si vede

che deve essere $2c_1 = \frac{17}{8}$ quindi la soluzione è unica su R