Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
27 Settembre 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^{2x} + (2y)^y$$

nel suo dominio Ω.

a. **(3 punti)** Si determinino, se esistono, i punti di massimi e di minimi locali di f in Ω; si determinino, se esistono, i punti di massimi e di minimi assoluti di f in Ω;

• $\mathrm{dom}\, f = \Omega = (0,\infty) \times (0,\infty)$ •• $f \geq 0 \ \forall (x,y) \in \Omega$

••• $\nabla f(x,y) = \left(2x^{2x}(\ln x + 1),\ (2y)^y(\ln(2y)+1)\right) = (0,0) \iff (x,y) = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right) = A$

•••• $\mathrm{Hess}\, f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x^{2x}\left(2(\ln x+1)^2 + \frac{1}{x}\right) & 0 \\ 0 & (2y)^y\left((\ln(2y)+1)^2 + \frac{1}{y}\right) \end{bmatrix}$ è semidefinita positiva $\forall (x,y) \in \Omega$ e quindi f è convesse.

Quindi f ha minimo globale assoluto in A. Poiché $\lim_{x\to\infty} f(x,1) = +\infty$, f non ha Massimi assoluti ne locali

b. **(1 punti)** si scriva il polinomio di Taylor di f al secondo ordine nel punto $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$;

Dal punto precedente $\nabla f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}) = (0,0)$, $\mathrm{Hess}\, f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}) = \begin{bmatrix} 2e^{1-2/e} & 0 \\ 0 & e^{1-\frac{1}{2e}} \end{bmatrix}$

Polinomio $= f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}) + (0,0)(x-\frac{1}{e}, y-\frac{1}{2e})^t + \frac{1}{2}(x-\frac{1}{e}, y-\frac{1}{e})[\ \ ]\begin{pmatrix} x-\frac{1}{e} \\ y-\frac{1}{2e} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}} + \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2e}} + e^{1-\frac{2}{e}}(x-\frac{1}{e})^2 + \frac{1}{2}e^{1-\frac{1}{2e}}(y-\frac{1}{2e})^2$

c. **(3 punti)** sia γ l'insieme/cruva di livello della funzione f passante per il punto $P = (1, \frac{1}{2e})$: tracciare un grafico di γ in un intorno di P individuando la retta tangente e la concavità/convessità.

• Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists$ per il Teorema del Dini $g: U_{\frac{1}{2e}} \to U_1 : g(\frac{1}{2e}) = 1$ e $f(g(y), y) \overset{*}{=} f(1, \frac{1}{2e}) \quad \forall y \in U_{\frac{1}{2e}}$

$U_{\frac{1}{2e}}$: INTORNO DI $\frac{1}{2e}$; U_1: INTORNO DI 1

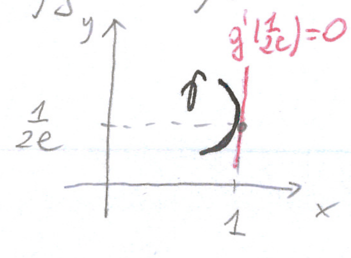
•• Derivo $*$ rispetto a y e poi pongo $y = \frac{1}{2e}$

$g(y)^{g(y)}(2\ln(g(y)) + 2)\, g'(y) + (2y)^y(\ln(2y)+1) \overset{\boxtimes}{=} 0 \quad \forall y$; essendo $g(\frac{1}{2e}) = 1$

$\Rightarrow g'(\frac{1}{2e}) = 0$

••• Derivo $\boxtimes$ rispetto a y e poi pongo $y = \frac{1}{2e}$

$g(y)^{g(y)}(2\ln(g(y))+2)^2(g'(y))^2 + g(y)^{g(y)}\frac{2}{g(y)}(g'(y))^2 + g(y)^{g(y)}(2\ln(g(y))+2)g''(y) + (2y)^y\left[(\ln(2y)+1)^2 + \frac{1}{y}\right] = 0 \quad \forall y$; otteniamo $g''(\frac{1}{2e}) = -e^{+1-\frac{1}{2e}}$



2. **(7 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

a. **(1 punto)** Usando i risultati noti dalla teoria, si stabilisca se esiste ed è unica la soluzine locale del problema assegnato;

• Sia $f(x,y) = e^{y/x} + \frac{y}{x}$

Essendo f e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{y/x} + \frac{1}{x}$ continue in un intorno del punto $(2,0)$, $\exists!$ la soluzione locale del problema

b. **(4 punti)** si determini la soluzione locale;

• Poniamo $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ da cui l'eq. differenziale diventa $z'x + z = e^z + z$

cioè $z'x = e^z \underset{\text{per } x \neq 0}{\Rightarrow} \int e^{-z} dz = \int \frac{1}{x} dx + c.$

In $x>0$ abbiamo $-e^{-z} = \ln x + c$. Poiché $y(2)=0$ implica $z(2)=0$

abbiamo $c = -1 - \ln 2$ e quindi $z(x) = -\ln(1 - \ln(\frac{x}{2}))$. Da cui

$y(x) = -x \ln(1 - \ln(\frac{x}{2}))$ in un intorno di 2

c. **(2 punti)** si determini il piu' grande intervallo di definizione della soluzione locale trovata nel punto precedente.

• la soluzione locale appena trovata è definita per $\begin{cases} \frac{x}{2} > 0 \\ 1 - \ln(\frac{x}{2}) > 0 \end{cases}$

cioè $x \in (0, 2e)$

$\lim_{x \to (2e)^-} y(x) = +\infty$ per cui non si può prolungare in $x = 2e$

$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0$ da cui posso prolungare in $x=0$ la y con continuità;

USANDO DE L'HÔPITAL

ma $\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\ln(1 - \ln\frac{x}{2}) - x \frac{-1/x}{1 - \ln\frac{x}{2}} \right) = -\infty$

per cui y' non posso prolungarla con continuità in $x = 0$.

$\Rightarrow$ Intervallo richiesto è $(0, 2e)$

Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica – 27 Settembre 2021

NOME E COGNOME:

3. **(8 punti)** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{\alpha}(x+n)^2 e^{nx}$$

si determini, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

a. **(3 punti)** l'insieme E_α di convergenza semplice;

per $x>0$ $\quad f_n(x) \to +\infty \quad \forall \alpha$

per $x<0$ $\quad f_n(x) \to 0 \quad \forall \alpha$

$x=0$ $\quad f_n(0) = n^{\alpha+2} \begin{cases} \to +\infty & \alpha>-2 \\ \to 1 & \alpha=-2 \\ \to 0 & \alpha<-2 \end{cases}$

$E_\alpha = (-\infty, 0]$ se $\alpha \le -2$

$E_\alpha = (-\infty, 0)$ se $\alpha > -2$

b. **(3 punti)** si stabilisca per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza é uniforme su E_α.

$f_n'(x) = n^\alpha (x+n) e^{nx} \left[2 + nx + n^2\right] \qquad f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -n - \frac{2}{n} \vee x > -n$

$f_n\left(-n-\frac{2}{n}\right) = n^\alpha \frac{4}{e^2 n^2} e^{-n^2} \to 0 \quad \forall \alpha \qquad \sup_{x<0} f_n(x) = f_n(0) = n^{\alpha+2} \xrightarrow[\alpha<-2]{} 0$

se $\alpha = -2$ la funzione limite è discontinua.

se $\alpha > -2$ per il teorema del doppio limite non c'è convergenza uniforme

c. **(2 punti)** Detta $f(x)$ la funzione limite, si stabilisca infine per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{0} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$$

$\int_{-n}^{0} f_n(x) = \left\{ n - \left[\frac{2}{n^2}(x+n)e^{nx}\right]_{-n}^{0} + 2\int_{-n}^{0} \frac{e^{nx}}{n^2} \right\} n^\alpha = n^\alpha \left\{ n - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^3} - 2\frac{e^{-n^2}}{n^3} \right\} \sim n^{\alpha+1}$

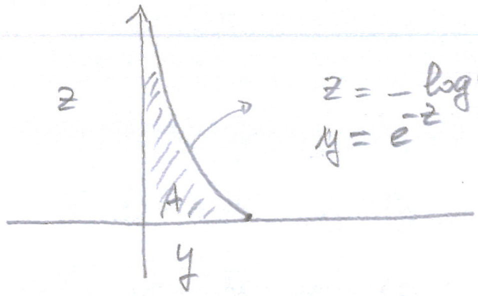
quindi $\int_{-n}^{0} f_n(x) \to 0$ solo se $\alpha < -1$

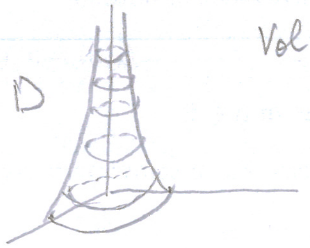
4. **(8 punti)** Sia

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : x = 0\ , 0 < z < |\log(y)|\ , 0 < y < 1\}$$

e sia D il solido ottenuto facendo compiere ad A una rotazione di 360^o attorno all'asse z.

a. **(3 punti)** Calcolare il volume di D.





$$\text{Vol } D = \int_0^{+\infty} \pi e^{-2z} = \frac{\pi}{2}$$

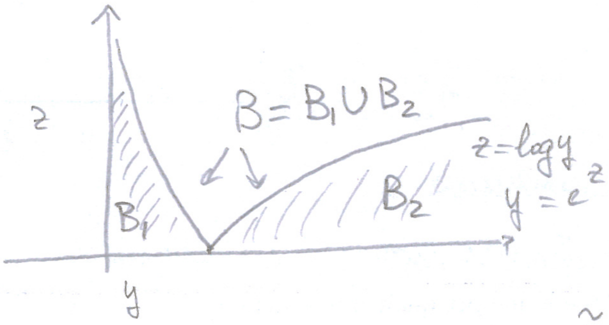
b. **(5 punti)** Sia

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ : x = 0\ , 0 < z < |\log(y)|\}$$

e sia C il solido ottenuto facendo compiere ad B una rotazione di 360^o attorno all'asse z. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{z^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

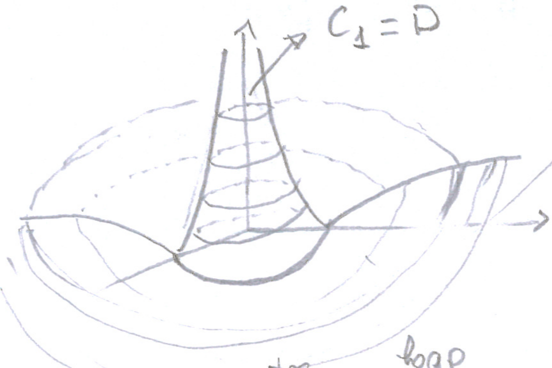
é integrabile su ~~B~~. C



$\int_C \frac{z^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\exists \iff \exists$ separatamente $\int_{C_1} \frac{z^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\int_{C_2} \frac{z^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Passo in coordinate cilindriche: $\tilde{B}_1 = \{(\theta, \rho, z) : 0 \le \theta \le 2\pi\ ;\ 0 < \rho < e^{-z}\ ;\ z > 0\}$

$\tilde{B}_2 = \{(\theta, \rho, z) : 0 \le \theta < 2\pi\ ;\ e^{z} < \rho\ ;\ z > 0\}$ $\tilde{B}_1$ e $\tilde{B}_2$ sono i corrispondenti di C_1 e C_2



$C_2 = \{(x, y, z) : z > 0\ ;\ x^2 + y^2 > e^{2z}\}$

$$\int_{\tilde{B}_1} \frac{z^\alpha}{\rho}\rho = 2\pi \int_0^{+\infty} dz \int_0^{e^{-z}} z^\alpha d\rho = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-z} \cdot z^\alpha$$ integrabile solo se $\alpha > -1$

$$\int_{\tilde{B}_2} z^\alpha = 2\pi \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\log\rho} z^\alpha dz = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \le -1 \\ 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{(\log\rho)^{\alpha+1}}{\alpha+1} d\rho = +\infty & \forall \alpha > -1 \end{cases}$$