

Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
5 Luglio 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordinati o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(8 punti)** Sia la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

a. **(3 punti)** si calcoli, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

b. **(2 punti)** Si determinino, se esistono, gli estremi relativi di f nel suo dominio;

c. **(3 punti)** Si determinino, se esistono, gli estremi assoluti di f in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x \leq 1, |y| \leq x^2\}.$$

2. (10 punti) Sia

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 ; x^2 - 2x + y^2 > 0 ; x^2 + 2x + y^2 > 0 ; \frac{4}{5}x^2 + \frac{y^2}{5} \leq 1 \right\}$$

a. (1 punto) Disegnare D

b. (4 punti) Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare D di 360° intorno all'asse x

c. (5 punti) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare, quando esiste,

$$\int_D \frac{2xy^\alpha}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

3. (7 punti) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n)! 2n} x^{2n}.$$

a. (2 punti) Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;

b. (3 punti) si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$;

c. (2 punti) si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-3} , l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x} dx.$$

4. **(7 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y' = x(y^2 - 4) \\ y(0) = a \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si determini la soluzione locale $\bar{y}(x)$ nel caso $a = 1$

b. **(1 punto)** Si determini l'insieme di definizione di $\bar{y}(x)$.

c. **(3 punti)** Si stabilisca per quali valori di a per cui la soluzione è definita su tutto \mathbb{R} e se ne dia una giustificazione teorica.