Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
5 Luglio 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

   a. **(3 punti)** si calcoli, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}. = \lim_{r\to 0^+} \overbrace{r^{4-2\alpha}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}^{A} - \overbrace{4r^{2-2\alpha}\sin\theta\cos\theta}^{B}$$

• se $\alpha<1 \Rightarrow \underbrace{r^{4-2\alpha}}_{\to 0}\underbrace{(\quad)}_{\text{limitata}} - 4\underbrace{r^{2-2\alpha}}_{\to 0}\underbrace{(\quad)}_{\text{limitata}} \xrightarrow{r\to 0^+} 0$

•• se $1\le\alpha<2 \Rightarrow \underbrace{r^{4-2\alpha}}_{\to 0}\underbrace{(\quad)}_{\text{limitata}} - 4\underbrace{r^{2-2\alpha}}_{\substack{\text{tende a } 1 \text{ se } \alpha=1\\ \text{tende a } +\infty \text{ se } 1<\alpha<2}}\overbrace{[\quad]}^{\text{limitata che cambia segno al variare di } \theta} \Rightarrow$ Il lim non esiste

••• se $\alpha\ge 2 \Rightarrow \underbrace{r^{2-2\alpha}}_{\to+\infty}(\underbrace{r^2}_{\to 0}\underbrace{(\quad)}_{\text{limitata}} + \underbrace{(\quad)}_{\text{limitata che cambia segno al variare di } \theta}) \Rightarrow$ il lim non esiste

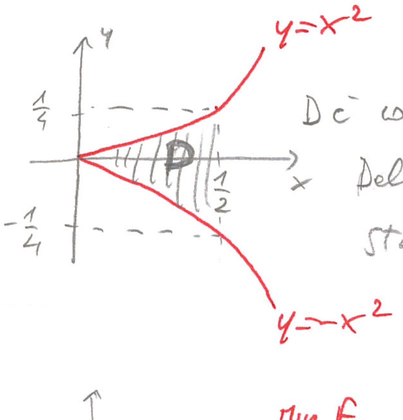
   b. **(2 punti)** Si determinino, se esistono, gli estremi relativi di f nel suo dominio;

• $\nabla f=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^3-y)=0 \\ 4(y^3-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \to A=(0,0) \\ x=y=1 \to B=(1,1) \\ x=y=-1 \to C=(-1,-1) \end{cases}$ •• Hess $f = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$

Hess $f(A)$ è non definita $\Rightarrow$ A sella
Hess $f(B)$ = Hess $f(C)$ definita positiva $\Rightarrow$ B e C Minimi relativi

   c. **(3 punti)** Si determinino, se esistono, gli estremi assoluti di f in

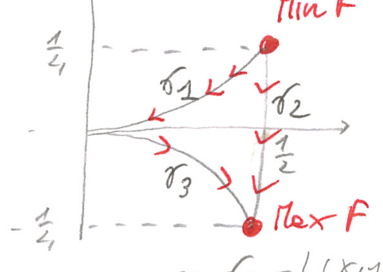
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le 2x \le 1, \; |y| \le x^2\}.$$



D è compatto $\Rightarrow \exists$ Max/Min assoluti.
Dal punto b non ci sono pti estremi in int(D).
Studio i bordi

• $\gamma_1 = \{(x,y)\in D : 0\le 2x\le 1, \; y=x^2\}$

$f|_{\gamma_1} = f(x,x^2) = x^4+x^8-4x^3 =: g_1(x) \quad g_1'(x) = 8x^7+4x^3-12x^2$



Siccome $g_1'(0)=0$, $g_1'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -12x^2$ e $g_1'(x)\le 0$ in $(0,\frac{1}{2})$ ($x^7<x^2$ e $x^3<x^2$) $\Rightarrow g_1$ sempre decrescente

•• $\gamma_2 = \{(x,y)\in D : x=\frac{1}{2}, \; |y|\le\frac{1}{4}\}$

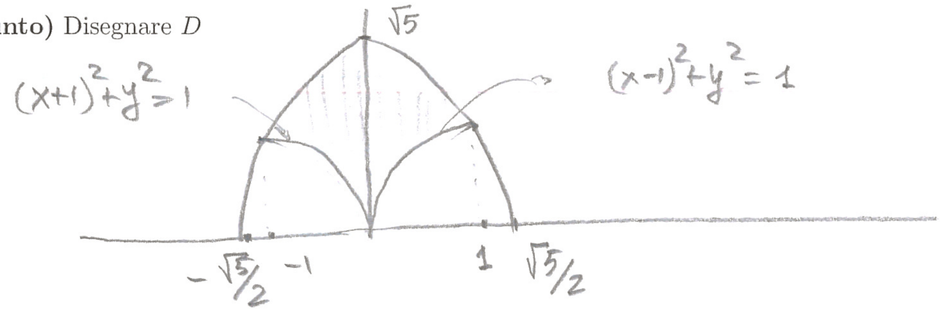
$f|_{\gamma_2} = f(\frac{1}{2},y) = \frac{1}{2^4}+y^4-2y =: g_2(y)$, $g_2'(y) = 2(2y^3-1) > 0$ se $y > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{4} \Rightarrow g_2'$ sempre $<0 \Rightarrow g_2$ sempre decrescente

••• $\gamma_3 = \{(x,y)\in D : 0\le 2x\le 1, \; y=-x^2\}$ $f|_{\gamma_3} = f(x,-x^2) = x^4+x^8+4x^3$ ovviamente sempre crescente

2. **(10 punti)** Sia

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ : y\geq 0\,;\, x^2-2x+y^2>0\,;\, x^2+2x+y^2>0\,;\, \frac{4}{5}x^2+\frac{y^2}{5}\leq 1\right\}$$

a. **(1 punto)** Disegnare D



b. **(4 punti)** Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare D di 360^o intorno all'asse x

Occorre calcolare $\int_D y\,dxdy = 2\int_{D^+} y\,dxdy$ dove $D^+ = \{x\geq 0\}\cap D$

$\int_{D^+} y\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{5-4x^2}} y\,dy = \frac{3}{2}$ Quindi il volume richiesto è

$2\pi\cdot 3 = 2\pi\, m(D)\cdot\frac{1}{m(D)}\int_D y\,dxdy$

c. **(5 punti)** Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ calcolare, quando esiste,

$$\int_D \frac{2xy^\alpha}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

Se l'integrale esiste è nullo poiché $f(-x,y) = -f(x,y)$ e il dominio è simmetrico rispetto all'asse y.

Per l'esistenza: l'integrale che dà problemi è quello corrispondente ai valori di y compresi tra 0 e 1. Quindi discutiamo l'esistenza di $\int_{\tilde D} f(x,y)$ dove $\tilde D = D\cap\{y\leq 1\}$. Considero quindi $\int_{\tilde D}|f|$ e mi limito a $x>0$:

$$\int_0^1 y^\alpha dy\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}}\frac{2x\,dx}{(x^2+y^2)^2} = \int_0^1 y^\alpha\cdot\left[-\frac{1}{x^2+y^2}\right]_0^{1-\sqrt{1-y^2}}dy =$$

$$\int_0^1 y^\alpha\cdot\left[\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2(1-\sqrt{1-y^2})}\right]$$

per $y\to 0$ l'integrando si comporta come: $y^\alpha\cdot\frac{y^4/4}{y^2\cdot y^2}$ (*)

Quindi $\alpha > -1$

(*) $1-\sqrt{1-y^2} = \frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{8}+o(y^4)$

3. **(7 punti)** Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{(2n+1)}{(2n)!\,2n}}_{a_n} x^{2n}. = \sum_{1}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n \quad \text{con } t = x^2$$

a. **(2 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice, e gli insiemi di convergenza uniforme;

$\bullet$ $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n)!\,2n}{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!\,(2n+2)(2n+1)} = 0 \Rightarrow$ Raggio di convergenza è $+\infty$. La serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e uniformemente su ogni compatto

b. **(3 punti)** si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$;

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!\,(2n)} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{D(x^{2n+1})}{(2n)!\,(2n)} \underset{\uparrow}{=} D\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}\right)$$

$$= D\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{(2n)!} \int_0^x t^{2n-1}\,dt\right) \overset{\text{converg uniform sui cpt}}{=} D\left(x \int_0^x \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\,dt\right) =$$

$$= D\left(x \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\,dt\right)$$

c. **(2 punti)** si calcoli, con un errore inferiore a 10^{-3}, l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n)!\,2n} x^{2n-1}\right) dx \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n)!\,2n} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n-1}\,dx\right) =$$

conv. uniforme in $[0, \frac{1}{2}]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n)!\,4n^2} \left(x^{2n}\right|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{(2n)!\,4n^2\,2^{2n}} = S$$

Ho una serie numerica a segni alterni convergente

$$\Rightarrow \left| S - \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!\,4n^2\,2^{2n}} \right| \le \frac{2N+1}{(2N)!\,4N^2\cdot 2^{2N}} \underset{\uparrow}{<} 10^{-3}$$

se $N \geq 2$

$$\Rightarrow S = (-1)\frac{3}{32} + \varepsilon \quad \text{con } |\varepsilon| < 10^{-3}$$

4. **(7 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y' = x(y^2 - 4) \\ y(0) = a \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si determini la soluzione locale $\bar{y}(x)$ nel caso $a = 1$

Se $a=2$ o $a=-2$ abbiamo la soluzione costante $y\equiv 2$ o $y \equiv -2$

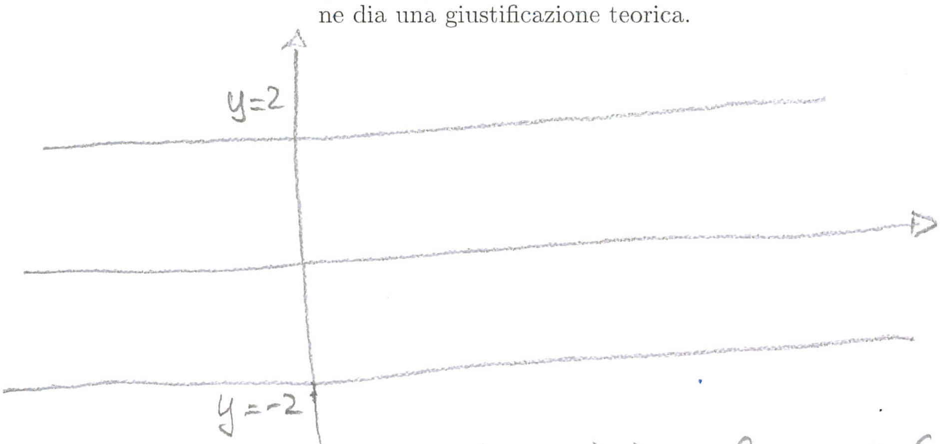
Se $a \neq \pm 2$ $\int \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2} = \int x \Rightarrow \left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^c e^{x^2/2}$ per $a=1$ si ha $c = \log\frac{1}{3}$

e $\frac{2-y}{y+2} = \frac{e^{x^2/2}}{3} \Rightarrow y(x) = \frac{6-2e^{x^2/2}}{3+e^{x^2/2}}$

b. **(1 punto)** Si determini l'insieme di definizione di $\bar{y}(x)$.

$\mathbb{R}$

c. **(3 punti)** Si stabilisca per quali valori di a per cui la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e se ne dia una giustificazione teorica.



$\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ sono verificate le ipotesi del teorema di $\exists!$ locale.
Ciò significa che le soluzioni con valore iniziale $a \in (-2,2)$ non possono uscire dalla striscia delimitata da $y=2$ e $y=-2$: quindi sono a loro volta limitate e, per una delle osservazioni fatte sulla dimostrazione del teorema "in grande" sono definite su tutto $\mathbb{R}$. In alternativa si può osservare che, se $-2<a<2$ $\left|\frac{y(0)-2}{y(0)+2}\right| = \frac{2-y(0)}{2+y(0)}$ e quindi, nel ricavare $y(x)$, otterrò sempre un denominatore strettamente positivo. Infine, se $|a|>2$, $\left|\frac{y(0)-2}{y(0)+2}\right| = \frac{y(0)-2}{y(0)+2}$ e, nel ricavare $y(x)$, avrò un denominatore che si annulla.