Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
25 Gennaio 2021

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

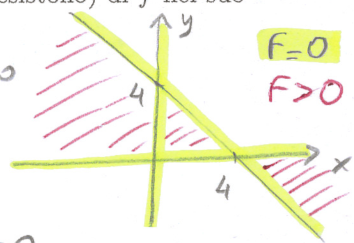
---

1. **(8 punti)** Sia
$$f(x,y) = x^2y(4-x-y).$$

   a. **(1 punto)** Scrivere il polinomio di Mc Laurin arrestato al terzo ordine di f.

   F è un polinomio del quarto ordine. Quindi il polinomio richiesto è $4x^2y$.

   b. **(5 punti)** Determinare i massimi e i minimi relativi e assoluti (se esistono) di f nel suo insieme di definizione.



• Studiamo il segno di F, cioè $F(x,y) \geq 0$: otteniamo

•• $\lim_{x\to\infty} F(x,-x) = -\infty \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} F = -\infty$ e $\nexists$ Minimo assoluto

$\lim_{x\to-\infty} F(x,-x) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} F = +\infty$ e $\nexists$ Massimi assoluti

••• Cerchiamo Max/Min relativi: $\nabla F = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy(8-3x-2y)=0 \\ x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono

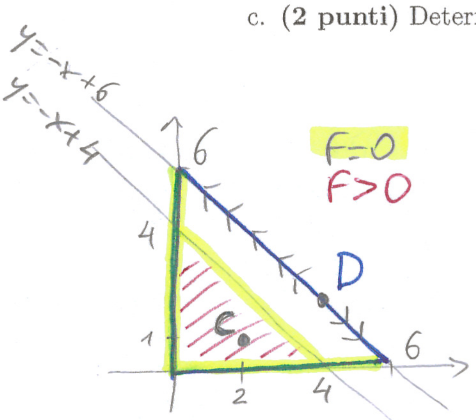
$A_{y_0} = (0,y_0)$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}$
$B = (4,0)$
$C = (2,1)$

> I punti A_{y_0} per $y_0 \in (0,4)$ sono minimi relativi
> I punti A_{y_0} per $y_0 > 4$ e $y_0 < 0$ sono massimi relativi
> I punti $(0,0)$, $(0,4)$ e $(4,0)$ non sono nulla
> Il punto C è Max locale per il Teorema di Weierstrass

SI VEDANO I SEGNI DI F

N.B. In modo più pedante $\text{Hess}\, F(2,1) = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ è definita negativa

   c. **(2 punti)** Determinare i massimi e i minimi assoluti di f nell'insieme
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : x \geq 0 \,, y \geq 0 \,, x+y \leq 6\}$$



• Dallo studio dei segni di F
> è ovvio che C è Max assoluto di F in D
> il Min assoluto, che esiste, è ovviamente lungo l'ipotenusa del Triangolo D (non essendoci altri punti interni che annullano ∇F)

•• $g(x) = F(x, 6-x) = -2x^2(6-x)$, $x \in [0,6]$

$g'(x) = 6x(x-4) > 0$ se $x > 4$

Quindi $E = (4,2)$ è Min assoluto per F in D

2. **(7 punti)** Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + x^{2n}}.$$

a. **(3 punti)** Stabilire l'insieme E di convergenza puntuale.

• $x=0$, converge

•• $|x|<1$, $\left|\frac{x^n}{n+x^{2n}}\right| \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$ e si ha convergenza puntuale ($\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge per $|q|<1$)

••• $x=1$, $\frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ termine generale serie divergente

•••• $x=-1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge per il Teorema di Leibnitz

••••• $|x|>1$, $\left|\frac{x^n}{n+x^{2n}}\right| \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{|x|^n}$ e si ha convergenza puntuale

IN CONCLUSIONE $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b. **(2 punti)** Stabilire se la convergenza risulta uniforme su E.

Non si può avere convergenza uniforme su E per il Teorema del doppio limite

c. **(2 punti)** Stabilire se esiste qualche $a > 0$ tale che la convergenza risulta uniforme su $[a, +\infty)$ e, nel caso esista, esibire almeno un valore di a.

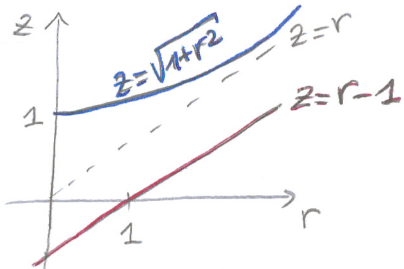
Sia $f_n(x) = \frac{x^n}{n+x^{2n}}$. Abbiamo $f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}(n - x^{2n})}{(n+x^{2n})^2} > 0$ in $[0,\infty)$

se e solo se $x \in (0, \sqrt[2n]{n})$. Cioè $0 \nearrow x_n = \sqrt[2n]{n} \searrow$, con $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1^+$.

• Se $a \in (0,1]$ in $[a,\infty)$ non possiamo avere convergenza uniforme

•• Se $a>1$, $\sup_{x\in[a,\infty)} |f_n(x)| \underset{\text{per n grande}}{=} f_n(a) = \frac{a^n}{n+a^{2n}} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Poiché $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n < \infty$, abbiamo convergenza uniforme in $[a,\infty)$



3. **(7 punti)** Si consideri

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ xy > 0,\ 0 < z < \sqrt{1+x^2+y^2},\ \sqrt{x^2+y^2} < z+1\right\}.$$

a. **(3 punti)** Si calcoli il volume di $D \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1\} = E$

• Per $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $0<z<\sqrt{1+r^2}$ mentre $r \le z+1$ è sempre vero in $r\le 1$

Quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = 2\int_{\left\{\substack{x\ge 0,\, y\ge 0,\, 0\le z\le \sqrt{1+x^2+y^2},\\ x^2+y^2\le 1}\right\}} 1\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr = \pi\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2^{3/2}-1}{3}\pi$$

b. **(4 punti)** Dopo aver verificato che esiste finito

$$\int_D \frac{y}{(z+1)\sqrt[4]{(x^2+y^2)^5}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

lo si calcoli.

• Poiché $(x,y,z)\in D \Leftrightarrow (-x,-y,z)\in D$ e $f(x,y,z) = -f(-x,-y,z)$ se l'integrale esiste, come chiede di verificare il testo, è nullo.

•• Poiché $f\ge 0$ in $D\cap\{(x,y,z);\ x\ge 0\} = D^+$ e $f\le 0$ in $D\cap\{(x,y,z)\ x\le 0\}$, verifichiamo che $\int_{D^+} f\,dx\,dy\,dz < \infty$.

Per $r=\sqrt{x^2+r^2}$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ con $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ abbiamo
$\mathrm{Max}(0, r-1) \le z \le \sqrt{1+r^2}$. Quindi

$$\int_{D^+} f\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1+r^2}} \frac{r^2\sin\theta}{(z+1)\,r^{5/2}}\,dz\,dr\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\infty}\int_{r-1}^{\sqrt{1+r^2}} \frac{r^2\sin\theta}{(z+1)\,r^{5/2}}\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\log(z+1)\Big|_0^{\sqrt{1+r^2}}\right)dr + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\log(z+1)\Big|_{r-1}^{\sqrt{1+r^2}}\right)dr$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r}}\log\left(1+\sqrt{1+r^2}\right)dr}_{\underset{r\to 0^+}{\sim}\ \frac{\log 2}{\sqrt{r}}\ \text{integrabile in } 0^+} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}\log\left(\frac{1+\sqrt{1+r^2}}{r}\right)dr}_{\underset{r\to+\infty}{\sim}\ \frac{1}{r^{3/2}}\ \text{integrabile a } +\infty}$$

Quindi $\int_{D^+} f\,dx\,dy\,dz < \infty$

4. **(8 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - \dfrac{10}{3}xy' + 4y = x^4 \\ y(1) = \dfrac{3}{8} \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si determini la soluzione locale.

• $x = e^t > 0$ e $z(t) = y(e^t) \Rightarrow z'' - \frac{13}{3}z + 4z = e^{4t} \Rightarrow$

OMOGENEA ASSOCIATA

$z'' - \frac{13}{3}z + 4z = 0$

$\lambda^2 - \frac{13}{3}\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 3 \\ \frac{4}{3} \end{cases}$

SOLUZIONE PARTICOLARE

$\tilde{z} = Ae^{4t}$ con $A = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow z = c_1 e^{3t} + c_2 e^{\frac{4}{3}t} + \frac{3}{8}e^{4t} \Rightarrow \underset{x>0}{y(x)} = c_1 x^3 + c_2 x^{4/3} + \frac{3}{8}x^4$

•• le condizioni del problema danno

$$y(x) = \underbrace{\left(\frac{3}{5}b - \frac{9}{10}\right)}_{c_1}x^3 + \underbrace{\left(\frac{9}{10} - \frac{3}{5}b\right)}_{c_2}x^{4/3} + \frac{3}{8}x^4 \quad \text{per } x>0 \quad (*)$$

b. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono valori di b per cui essa è definita su tutto $\mathbb{R}$.

• Per $x<0$, conti simili forniscono, $\tilde{y}(x) \underset{x<0}{=} \tilde{c}_1 x^3 + \tilde{c}_2 x^{4/3} + \frac{3}{8}x^4$ ▨

•• la soluzione in (*) e in ▨ sono C^2 in $x=0$ solo se $c_2 = \tilde{c}_2 = 0$,

cioè per $\bar{y}(x) = \frac{3}{8}x^4$ e $b = \frac{3}{2}$

c. **(3 punti)** Nel caso ci siano soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ se ne discuta l'unicità.

• Per $b = \frac{3}{2}$ abbiamo trovato $y(x) = \frac{3}{8}x^4$ per $x \in \mathbb{R}$

Si osservi che $\bar{y}'(0) = \bar{y}(0) = 0$ e che per $\begin{cases} x^2y'' - \frac{10}{3}xy' + 4y = x^4 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

non si può garantire il Teo di $\exists!$ locale, potrebbero esserci delle soluzioni $\tilde{y}$ come in ▨ definite per $x<0$ che si "attaccano" bene a $\bar{y}$ in $x=0$. Dobbiamo chiedere se $\tilde{y}$ ha $\tilde{y}'(0) = \bar{y}'(0) = 0$ e $\tilde{y}''(0) = \bar{y}''(0) = 0$: la prima è sempre vera, la seconda è vera solo se $\tilde{c}_2 = 0$.

Quindi

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^4 & \text{per } x \geq 0 \\ \tilde{c}_1 x^3 + \frac{3}{8}x^4 & \text{per } x<0 \end{cases}$$ sono tutte soluzioni