Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
6 Luglio 2020

———————————————————————————-

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

———————————————————————————-

NOME E COGNOME:

———————————————————————————-

1. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} ye^{\frac{-1}{|9x^2+y^2-1|}} & \text{se } 9x^2+y^2-1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } 9x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

a. (2 punti) Verificare che f è continua in $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile nel punto $(\frac{1}{3}, 0)$;

b. (6 punti) Determinare i massimi e i minimi relativi di f in $\mathbb{R}^2$

2. Sia $a \geq 0$ e sia data la serie di funzioni

$$S_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(1+e^{nx})n^{ax}}$$

a. (4 punti) Stabilire, al variare di a, l'insieme E_a di convergenza puntuale di S_a.

b. (4 punti) Stabilire per quali valori di a la convergenza è uniforme su E_a

3. Siano R e h positivi e fissati.

   a. (4 punti) Si fornisca un disegno e si calcoli il volume (in almeno due modi) di

$$C_{R,h} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq \left(\frac{Rz}{h} \right)^2, \ 0 \leq z \leq h \right\}.$$

   b. (4 punti) Si stabilisca, al variare di α intero, quando esiste finito

$$\lim_{h \to \infty} \int_{C_{R,h}} x^\alpha \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \log x \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

a. (2 punti) Si stabilisca al variare di $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$ l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione del problema assegnato;

b. (3 punti) per $x_0 = y_0 = y_1 = 1$, si determinino la soluzione locale, determinandone il massimo intervallo di definizione;

c. (4 punti) si determini la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \dfrac{1}{\cos(\log x)} \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$