Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
9 Giugno 2020

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Siano $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 \leq z^4\}$ e

$$f(x, y, z) = \frac{|z|^3}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 + x^2 + y^2 + z^4)^2}.$$

a. **(3 punti)** Si osservi che $B = A \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : 0 \leq z \leq 1\}$ é un solido di rotazione: si calcoli l'area di $C = B \cap \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x \geq 0\}$ e si calcoli il volume di B sfruttando il fatto che é di rotazione;

b. **(4 punti)** stabilire se esiste e, in caso affermativo, calcolare

$$\int_A f(x, y, z) dx\, dy\, dz.$$

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - 3xy + 2y^2)e^x.$$

a. **(5 punti)** Si determinino, se esistono, massimo e minimo assoluti di f in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -4 \leq x \leq y \leq x + 1 \leq 1\};$$

b. **(3 punti)** si tracci una grafico qualitativo locale (é richiesta retta tangente e concavitá) della curva di livello di f passante per il punto $(4, 3)$.

3. **(8 punti)** Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n-1)x^n}{(n+1)}$$

a. **(3 punti)** Si determini l'insieme E di convergenza puntuale e si stabilisca in quali suoi sottoinsiemi la convergenza risulta essere uniforme.

b. **(3 punti)** Detta $S(x)$ la somma della serie, si fornisca l'espressione analitica di $S(x)$ giustificando la risposta.

c. **(2 punti)** Si calcoli

$$\int_0^{\frac{1}{2}} S(x)dx$$

con un errore inferiore a 10^{-2}.

4. **(8 punti)** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{x(x-1)} = 6x(x-1)\sqrt{y} \\ y(\frac{1}{2}) = y_0 \end{cases}$$

a. **(4 punti)** Si stabilisca per quali valori di y_0 il problema ammette una soluzione locale e per tali valori la si determini.

b. **(4 punti)** Si stabilisca se esistono dei valori di y_0 per cui la soluzione può essere prolungata su tutto $\mathbb{R}$ e per tali valori se ne discuta l'unicità.