Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
6 Luglio 2020

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} y e^{\frac{-1}{|9x^2+y^2-1|}} & \text{se } 9x^2+y^2-1\neq 0 \\ 0 & \text{se } 9x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

a. (2 punti) Verificare che f è continua in $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile nel punto $(\frac{1}{3},0)$;

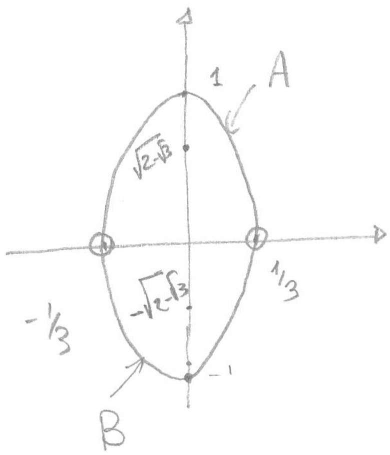
se $9x^2+y^2\neq 1$ f è banalmente continua. Sia ora (x_0,y_0) un punto dell'ellisse di equazione $9x^2+y^2=1$ chiaramente $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0$ in quanto l'esponente di e tende a $-\infty$ (si passi in coordinate "polari" $x=\rho\frac{\cos t}{3}$, $y=\rho\sin t$)

$\frac{\partial f}{\partial x}(1/3,0)=0$ poiché $f(t,0)\equiv 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1/3,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/3,t)-f(1/3,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t e^{\frac{-1}{|t^2|}}}{t}=0$

$$\left|\left\{f(\tfrac{1}{3}+h,k)-f(1/3,0)-\nabla f(1/3,0)(h,k)\right\}\right|\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot e^{\frac{-1}{|9h^2+\frac{2h}{3}+k^2|}}\leq e^{-\frac{1}{|9h^2+k^2+\frac{2}{3}h|}}\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$$

b. (5 punti) Determinare i massimi e i minimi relativi di f in $\mathbb{R}^2$

$f(x,y)>0$ se $y>0$ e $9x^2+y^2\neq 1$ $\quad f(x,y)=0$ se $y=0$ oppure $9x^2+y^2=1$



Sia A la parte di ellisse sopra all'asse x
" B " " " sotto " "

I punti $(-1/3,0)$ e $(1/3,0)$ non sono né massimi né minimi in quanto f cambia segno in ogni loro intorno.
I punti di A sono minimi relativi
" " " B sono massimi relativi

All'interno dell'ellisse $f(x,y)=y\,e^{\frac{1}{9x^2+y^2-1}}$

e quindi $f_x=\frac{-18xy}{(9x^2+y^2-1)^2}\exp\left(1/9x^2+y^2-1\right)=0$

$f_y=\exp\left(1/9x^2+y^2-1\right)\left\{1-\frac{2y^2}{(9x^2+y^2-1)^2}\right\}=0$

Tutti i punti $(x,0)$ non sono estremanti quindi, dalla prima equazione, si ha che $x=0$ e $y^2=2\pm\sqrt{3}$ e, visto che $9x^2+y^2\leq 1$, $\Rightarrow y^2=2-\sqrt{3}$

il punto $(0,\sqrt{2-\sqrt{3}})$ è un massimo relativo (Teo. di Weierstrass) mentre $(0,-\sqrt{2-\sqrt{3}})$ è un minimo relativo.

All'esterno dell'ellisse $f(x,y)=y\,e^{\frac{-1}{9x^2+y^2-1}}$ e $f_y=\exp\left(-1/9x^2+y^2-1\right)\left\{1+\frac{2y^2}{(9x^2+y^2-1)^2}\right\}\neq 0$

quindi non ci sono estremi relativi all'esterno.

2. Sia $a \geq 0$ e sia data la serie di funzioni

$$S_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(1+e^{nx})n^{ax}} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^a(x)$$

a. (4 punti) Stabilire, al variare di a, l'insieme E_a di convergenza puntuale di S_a.

$E_a = [1, +\infty)$ se $a > 1$

$E_a = (1, +\infty)$ se $0 \leq a \leq 1$

per $x = 1$ $f_n^a(1) = \dfrac{e^n}{(1+e^n)n^a}$ conv. se $a > 1$

se $x < 0$ $\dfrac{e^n}{(1+e^{nx})n^{ax}} \not\to 0$

se $x \neq 0$

$f_n^a(x) \simeq \dfrac{e^{n(1-x)}}{n^{ax}}$

se $0 < x < 1$ div.

se $x > 1$ la serie converge sempre $\forall a$

b. (4 punti) Stabilire per quali valori di a la convergenza è uniforme su E_a

Per il teorema del doppio limite risulta che

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^n}{(1+e^{nx})n^{ax}} = \sum_{1}^{N} \frac{e^n}{(1+e^n)n^a}$$ che NON è di Cauchy per $0 \leq a \leq 1$

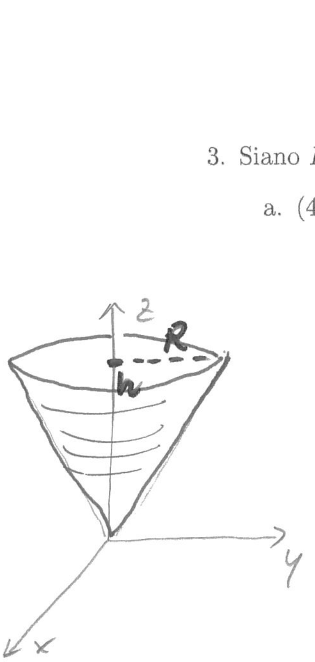
Quindi in questi casi la convergenza NON è uniforme su E_a

Se invece $a > 1$ risulta $f_n^a(x) \leq \dfrac{e^n}{(1+e^n)n^a}$ e quindi c'è convergenza uniforme per il teorema di Weierstrass

3. Siano R e h positivi e fissati.

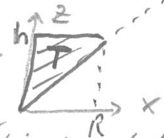
a. (4 punti) Si fornisca un disegno e si calcoli il volume (in almeno due modi) di

$$C_{R,h} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \le \left(\frac{Rz}{h}\right)^2, \; 0 \le z \le h \right\}.$$



• $\mathrm{Vol}(C_{R,h}) = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{Rz}{h}} r \, dr = \frac{\pi R^2 h}{3}$

cilindriche

• Considero il triangolo T  ; $\mathrm{Vol}(C_{R,h}) = 2\pi x_c \, \mathrm{Area}(T)$

ove (x_c, z_c) sono le coordinate del baricentro di T.

$x_c = \frac{1}{\mathrm{Area}(T)} \int_0^h \int_0^{\frac{zR}{h}} x \, dx \, dz = \ldots \frac{R}{3} \Rightarrow \mathrm{Vol}(C_{R,h}) = 2\pi \frac{R}{3} \frac{Rh}{2} = \frac{\pi R^2 h}{3}$

b. (4 punti) Si stabilisca, al variare di α intero, quando esiste finito

$$\lim_{h\to\infty} \int_{C_{R,h}} x^\alpha \, dx \, dy \, dz. = \lim_{h\to\infty} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{Rz}{h}} r^{\alpha+1} \cos^\alpha \theta \, dr \, d\theta \, dz$$

• $\alpha = 0$ $\lim_{h\to\infty} \mathrm{Vol}(C_{R,h}) = +\infty$

• $\alpha > 0$ pari $\lim_{h\to\infty} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos^\alpha \theta \, d\theta \right)}_{\text{NUMERO POSITIVO } C_\alpha} \left(\int_0^h \frac{1}{\alpha+2} \left(\frac{Rz}{h}\right)^{\alpha+2} dz \right) = \lim_{h\to\infty} \frac{C_\alpha R^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\, h^{\alpha+2}} \frac{h^{\alpha+3}}{\alpha+3} = +\infty$

• $\alpha > 0$ dispari, simile a prima ma $\int_0 \cos^\alpha \theta \, d\theta = 0 \Rightarrow$ limite richiesto è 0

• $\alpha = -1$ $\lim_{h\to\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta} d\theta \right) \left(\int_0^h \frac{Rz}{h} dz \right)$

problemi di integrabilità per $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$. Studio $\theta = \frac{\pi}{2}$ ponendo $\theta = \frac{\pi}{2} + s$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + s\right) = -\sin s \underset{\theta \to \frac{\pi}{2} \text{ cioè } s \to 0}{\sim} -s = -\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$; quindi

$\frac{1}{\cos\theta} \sim -\frac{1}{\theta - \frac{\pi}{2}}$ in un intorno di $\frac{\pi}{2}$ e NON È INTEGRABILE.

Il limite richiesto NON ESISTE.

• $\alpha \le -2$ $\lim_{h\to\infty} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^{-\alpha} \theta} d\theta \right)}_{\text{come prima } \nexists} \left(\int_0^h \int_0^{\frac{Rz}{h}} r^{\alpha+1} dr \, dz \right)$ NON ESISTE

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \log x \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

a. (2 punti) Si stabilisca al variare di $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$ l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione del problema assegnato;

$y'' = \frac{-xy' - y + \log x}{x^2} = f(x, y, y')$ è continua per $x > 0$ e $(y, y') \in \mathbb{R}^2$ e lineare in y e y' e quindi Lipschitz rispetto a y e y'.

$\Rightarrow \forall (x_0, y_1, y_2) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ $\exists!$ la soluzione locale.

b. (3 punti) per $x_0 = y_0 = y_1 = 1$, si determinino la soluzione locale, determinandone il massimo intervallo di definizione;

Pongo $x = e^t > 0$ $z(t) = y(e^t) \Rightarrow z' = y'e^t$, $z'' = y''e^{2t} + y'e^t$

$\Rightarrow z'' + z = t$ in $t > 0$ $\xrightarrow{\text{SOL OMOG}}$ $z = c_1 \sin t + c_2 \cos t$; $\xrightarrow{\text{SOL PART}}$ $z = t$; $z(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t$

Essendo $t = \ln x \Rightarrow y(x) = c_1 \sin(\ln x) + c_2 \cos(\ln x) + \ln x$

$\Rightarrow y'(x) = c_1 \frac{\cos(\ln x)}{x} - c_2 \frac{\sin(\ln x)}{x} + \frac{1}{x}$

$y(1) = y'(1) = 1 \Rightarrow c_2 = 1,\ c_1 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = \cos(\ln x) + \ln x \text{ definita in } (0, \infty)}$

c. (4 punti) si determini la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \dfrac{1}{\cos(\log x)} \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$

Pongo $x = e^t > 0 \Rightarrow z'' + z = \frac{1}{\cos t}$ $t > 0$. Soluzione OMOG. ASSOCIATA

$z = c_1 \sin t + c_2 \cos t$

Per trovare la particolare uso variazione costanti arbitrarie:

$\begin{cases} c_1' \sin t + c_2' \cos t = 0 \\ c_1' \cos t - c_2' \sin t = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$ osservo $x_0 = 1$ implica $t = 0$ e $\cos t \neq 0$ in $t = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} c_2' = -c_1' \frac{\sin t}{\cos t} \\ c_1' \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow c_1 = t$

$c_2 = -\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \ln|\cos t| \Rightarrow z = \underbrace{c_1 \sin t + c_2 \cos t}_{\text{SOL OMOG. ASS.}} + \underbrace{t \sin t + \ln|\cos t| \cos t}_{\text{SOL. PARTICOLARE}}$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \sin(\ln x) + c_2 \cos(\ln x) + \log x \sin(\ln x) + \ln|\cos(\ln x)| \cos(\ln x)$

$y'(x) = c_1 \frac{\cos(\ln x)}{x} - c_2 \frac{\sin(\ln x)}{x} + \frac{1}{x} \sin(\ln x) + \ln x \frac{\cos(\ln x)}{x} - \frac{\sin(\ln x)}{x} - \frac{\ln|\cos(\ln x)| \sin(\ln x)}{x}$

$y(1) = y'(1) = 1 \Rightarrow c_2 = c_1 = 1$

$$\boxed{y(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) + \log x \sin(\ln x) + \ln|\cos(\ln x)| \cos(\ln x)}$$