Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
9 Giugno 2020

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

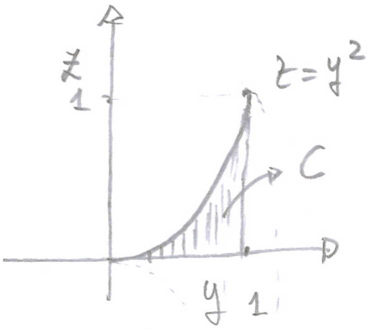
---

1. **(7 punti)** Siano $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+z^2 \leq y^4\}$ e

$$f(x,y,z) = \frac{|y|^3}{\sqrt{x^2+z^2}(1+x^2+z^2+y^4)^2}.$$

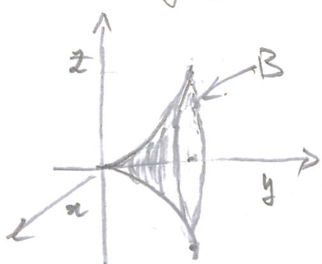
a. **(3 punti)** Si osservi che $B = A \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 0 \leq y \leq 1\}$ é un solido di rotazione: si calcoli l'area di $C = B \cap \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : z \geq 0\}$ e si calcoli il volume di B sfruttando il fatto che é di rotazione;

Area di C : $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{y^2} dz = \int_0^1 y^2 = \frac{1}{3}$



Ordinata del baricentro : $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{y^2} z\,dz = \int_0^1 \frac{y^4}{2} dy = \frac{1}{10}$

Volume di B $= 2\pi \cdot \frac{1}{10} = \frac{\pi}{5}$



b. **(4 punti)** stabilire se esiste e, in caso affermativo, calcolare

$$\int_A f(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

$f(x,y,z) = f(x,-y,z)$
e A è simmetrico rispetto a y ho che

$\displaystyle\int_A f = 2\int_{A'} f$ dove $A' = A \cap \{y > 0\}$

posto $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho \sin\theta \\ y = y \end{cases}$

e detto $D' = \{0 \leq \theta < 2\pi,\ y^2 > \rho;\ y > 0\}$ si ha che $\displaystyle\int_A f = 2\int_{D'} \frac{\rho\, y^3}{\rho\,(1+\rho^2+y^4)^2} =$

$$= 2\cdot 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{4} \int_{\sqrt{\rho}}^{+\infty} \frac{4y^3\,dy}{(1+\rho^2+y^4)^2} = \pi \int_0^{+\infty} d\rho \left[-\frac{1}{(1+\rho^2+y^4)}\right]_{\sqrt{\rho}}^{+\infty} = \pi \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{1+2\rho^2} =$$

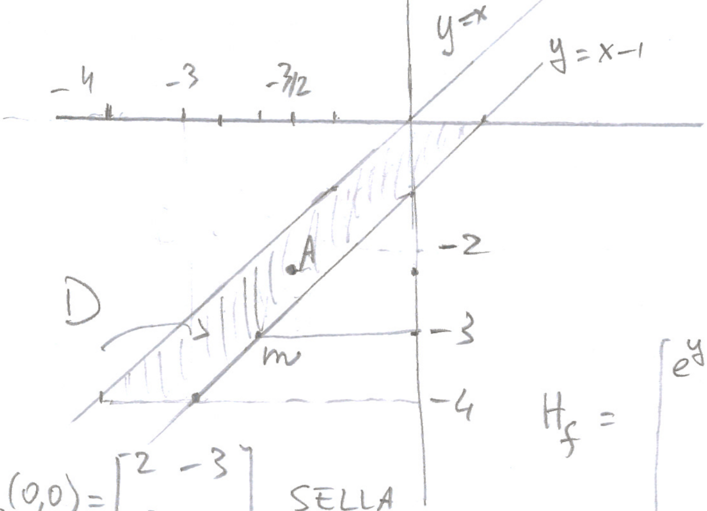
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{2}\rho\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$$

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = (y^2 - 3xy + 2x^2)e^y.$$

a. **(5 punti)** Si determinino, se esistono, massimo e minimo assoluti di f in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -4 \le y \le x \le y + 1 \le 1\};$$



$D = \{ x-1 \le y \le x ;\ -4 \le y \le 0 \}$

f è continua $\Rightarrow$ $\exists$ massimo e minimo assoluti

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y(4x - 3y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y\left[2y - 3x + y^2 - 3xy + 2x^2\right]$

$\nabla f = 0$ in $(0,0)$ e in $(-\frac{3}{2}, -2)$

$$H_f = \begin{bmatrix} e^y(y^2 - 3xy + 2x^2 + 4y - 6x + 2) & -e^y(3y - 4x + 3) \\ -e^y(3y - 4x + 3) & 4e^y \end{bmatrix}$$

$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ SELLA

$H_f(-\frac{3}{2}, -2) = \begin{bmatrix} 3/2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ MINIMO relativo in A

b. **(3 punti)** si tracci una grafico qualitativo locale (é richiesta retta tangente e concavitá) della curva di livello di f passante per il punto $(4, 3)$.

$f|_{y=x-1} = e^y(y+2)$; crescente se $y > -3$ quindi $m = (-2,-3)$ è candidato a essere minimo assoluto, ma $f(-2,-3) > f(-\frac{3}{2}, -2) = -\frac{1}{2e^2}$

$f|_{y=-4} = e^{-4}(2x^2 + 12x + 16)$ sempre decrescente se $-4 < x < -3$

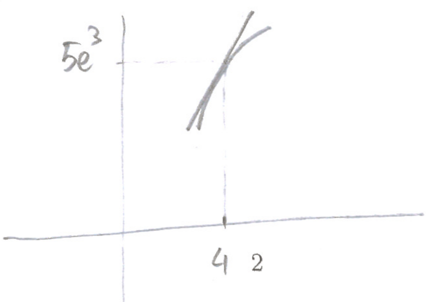
$f|_{y=x} \equiv 0$; $f|_{y=0} = 2x^2$ crescente se $0 < x < 1$. in M c'è un massimo assoluto

A è minimo assoluto. PUNTO b: entrambe le derivate parziali sono non nulle in $(4,3)$. Posto $F = f - 5e^3$ ho che $F(x, y(x)) \equiv 0$ in un intorno di $x = 4$ e $y(4) = 5e^3$

scelgo $\frac{\partial F}{\partial y}(4,3) = -e^3 \neq 0$

$y'(4) = +7$

$y''(4) = -185$



3. (**7 punti**) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)x^n}{(n+1)}$$

sia $a_n = (-1)^n \frac{(n-1)}{(n+1)}$

a. (**2 punti**) Si determini l'insieme E di convergenza puntuale e si stabilisca in quali suoi sottoinsiemi la convergenza risulta essere uniforme.

• $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n-1} = 1 \Rightarrow$ Raggio $= 1$

•• per $x = \pm 1$ si ha che $(-1)^n \frac{n-1}{n+1} x^n \not\to 0$ per $n\to\infty$, quindi in questi due punti non si ha convergenza puntuale

Quindi si ha convergenza puntuale in $E = (-1,1)$ e uniforme in ogni compatto in E

b. (**3 punti**) Detta $S(x)$ la somma della serie, si fornisca l'espressione analitica di $S(x)$ giustificando la risposta.

$$S(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}(n-1) \overset{\text{conv. unif. in } [a,b]}{=} \frac{1}{x}\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^n (n-1)\,dt$$

$\forall x\in[a,b]$ con $-1<a<b<1$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x t^2 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{n-2}(n-1)\,dt =$$

conv. unif in $[a,b]$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x t^2 D\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{n-1}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^x t^2 D\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\right)dt = -\frac{1}{x}\int_0^x t^2 D\left(\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$t\in[a,b]\subset[-1,1]$

c. (**2 punti**) Si calcoli

$$\int_0^{\frac{1}{2}} S(x)dx$$

con un errore inferiore a 10^{-2}.

$$\int_0^{\frac12} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\int_0^{\frac12}x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = S$$

convergenza uniforme in $[0,\frac12]$

$$\left|S - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{n-1}{(n+1)^2}\frac{1}{2^{n+1}}\right| \le \frac{N}{(N+2)^2}\frac{1}{2^{N+2}} \le \frac{1}{100} \quad \forall N\ge 2$$

Per cui $S = \sum_{n=1}^{2}(-1)^n\frac{n-1}{(n+1)^2}\frac{1}{2^{n+1}} + E$ con $|E|<10^{-2}$

4. **(8 punti)** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{x(x-1)} = 6x(x-1)\sqrt{y} \\ y(\frac{1}{2}) = y_0 \end{cases}$$

a. **(4 punti)** Si stabilisca per quali valori di y_0 il problema ammette una soluzione locale e per tali valori la si determini.

• Per $y_0 > 0$ esiste unica la soluzione locale del problema. Per $y_0 = 0$ esiste una soluzione $(y(x) = 0)$ ma non è detto sia unica.

•• Fisso $y_0 > 0$: pongo $z(x) = \sqrt{y(x)} \geq 0 \Longrightarrow z' = -\frac{1}{x(x-1)} z + 3x(x-1)$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-\int \frac{1}{x(x-1)} dx} \left[\int 3x(x-1) e^{\int \frac{1}{x(x-1)} dx} + K \right] = \left| \frac{x}{x-1} \right| \left[\int 3x(x-1) \left| \frac{x-1}{x} \right| dx + K \right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ in un intorno di } \frac{1}{2}}}{=} \frac{x}{1-x} \left[-(x-1)^3 + K \right] = \frac{x((x-1)^3 + K)}{x-1} \underset{\substack{\uparrow \\ z(\frac{1}{2}) = \sqrt{y_0}}}{=} \frac{x((x-1)^3 + \frac{1}{8} - \sqrt{y_0})}{x-1}$$

per quelle x per cui questa frazione è ≥ 0 cioè $x \in I_{y_0} = (0, d_{y_0})$ con $d_{y_0} = \min\{1, 1 + (\sqrt{y_0} - \frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}\}$.

$$\Rightarrow y(x) = \left(\frac{x((x-1)^3 + \frac{1}{8} - \sqrt{y_0})}{x-1} \right)^2 \quad \text{per } x \in I_{y_0}$$

••• Per $y_0 = 0 \Rightarrow I_{y_0} = [0, \frac{1}{2}]$; si vede che $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x > \frac{1}{2} \\ \left(\frac{x((x-1)^3 + \frac{1}{8})}{x-1} \right)^2 & \text{per } x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$ è un'altra soluzione.

b. **(4 punti)** Si stabilisca se esistono dei valori di y_0 per cui la soluzione può essere prolungata su tutto $\mathbb{R}$ e per tali valori se ne discuta l'unicità.

• se $1 + (\sqrt{y_0} - \frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} > 1 = d_{y_0} \Leftrightarrow y_0 > \frac{1}{64}$ $y(x)$ in o è definita in $(0, 1)$ e si ha $\lim_{x \to 1^-} y(x) = +\infty$. Per cui non può essere estesa in $(0, \infty)$.

•• se $y_0 = \frac{1}{64} \Rightarrow y(x) \overset{o}{=} x^2(x-1)^4$ in $(0, 1)$. Si vede che $y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$

$$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^4 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \notin [0, 1] \end{cases}$$ è soluzione su tutto $\mathbb{R}$

••• se $y_0 \in [0, \frac{1}{64}) \Rightarrow y(x)$ in o è definita in $(0, 1 + (\sqrt{y_0} - \frac{1}{8})^{\frac{1}{3}})$

e si vede che $y(0) = y(1 + (\sqrt{y_0} - \frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}) = y'(0) = y'(1 + (\sqrt{y_0} - \frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}) = 0$

$$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x((x-1)^3 + \frac{1}{8} - \sqrt{y_0})}{x-1} \right)^2 & \text{in } x \in [0, 1 + (\sqrt{y_0} - \frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ è soluzione su $\mathbb{R}$

•••• se $y_0 = 0$ abbiamo già trovato due soluzioni su tutto $\mathbb{R}$

? per $y_0 \in (0, \frac{1}{64}]$ la soluzione trovata e definita su tutto $\mathbb{R}$ è unica ?

si può osservare (con conti simili a quelli del punto a.) che $y(x) = \left\{ \frac{x}{x-1} \left[(x-1)^3 + K \right] \right\}^2$ è soluzione quando l'argomento dentro le parentesi graffe sono ≥ 0.

In particolare per $K = 0$ si ha $y(x) = x^2(x-1)^4$, Essendo $y(1) = y'(1) = 0$ si "attacca" bene alle soluzioni già trovate che quindi non sono uniche.