Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
10 Luglio 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Per ogni a reale si consideri

$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n^a}$$

a. **(2 punti)** Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$ l'insieme di definizione di f_a.

Posto $t = (1-x^2)$ dobbiamo esaminare la serie di potenze $\sum_1^{+\infty} \frac{t^n}{n^a}$:

Raggio di convergenta 1 $\forall a$. Quindi $-1 < 1-x^2 < 1$; $|x| < \sqrt{2}$; $x \neq 0$

Se $|x| = \sqrt{2}$ $f_a(x) = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ convergente per $a > 0$; se $x = 0$ $f_a(x) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ $a > 1$

Se $a > 1$ $f_a(x)$ è definita in $[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$

Se $0 < a \leq 1$ " " " $[-\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\sqrt{2}]$

Se $a \leq 0$ $f_a(x)$ è definita in $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\sqrt{2})$

b. **(4 punti)** Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$ l'insieme di convergenza uniforme delle serie.

per $a > 1$ la serie converge uniformemente in $[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$

per $0 < a \leq 1$ la serie non converge uniformemente in $[-\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\sqrt{2}]$ per il teorema del doppio limite: $\lim_{x \to 0} f_a(x) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^a} = +\infty$!

Si ha convergenza uniforme in ogni compatto contenuto in $[-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}]$ poiché per $|1-x^2| \leq r < 1$ converge uniformemente come serie di potenze $\forall r < 1$ quando $1 < |x| \leq \sqrt{2}$ diventa una serie a segni alterni del tipo $\sum_1^{+\infty} (-1)^n \frac{|1-x^2|^n}{n^a}$ posto $f_n(x) = \frac{|1-x^2|^n}{n^a}$ si ha $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ e ho convergenza uniforme per Leibniz (*)

c. **(2 punti)** Stabilire, giustificando la risposta, per quali valori di a risulta

$$\int_{1/2}^{1} f_a(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/2}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{n^a} dx$$

l'uguaglianza è SEMPRE VERA per via del punto b.

(*) infatti $\left| \sum_1^{N} (-1)^n \frac{|1-x^2|^n}{n^a} - f_a(x) \right| \leq \frac{|1-x^2|^{N+1}}{(N+1)^a} \leq \frac{1}{(N+1)^a}$ se $1 < |x| \leq \sqrt{2}$

(**) Se $a \leq 0$ non converge uniformemente in $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\sqrt{2})$ sempre per il teorema del doppio limite; ho invece convergenza uniforme in ogni compatto del tipo $0 < r_1 \leq |x| \leq r_2 < \sqrt{2}$

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f(x,y) = (x+y)e^{-y^2-x}$.

a. **(3 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della f nel suo dominio.

• $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}^2$ •• $\nabla f(x,y) = \left((1-x-y)e^{-y^2-x}, (1-2yx-2y^2)e^{-y^2-x}\right)$

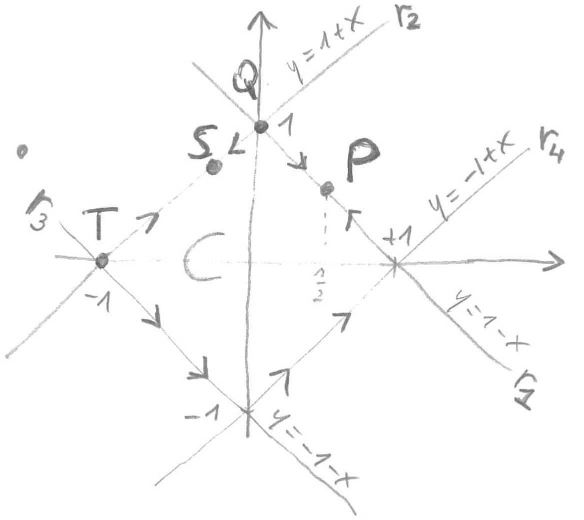
e si ottiene $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff x = y = \frac{1}{2}$. Sia $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$

••• $$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} e^{-y^2-x}(x+y-2) & e^{-y^2-x}(2yx+2y^2-2y-1) \\ e^{-y^2-x}(2xy+2y^2-2y-1) & e^{-y^2-x}(-2x-2y+4xy^2+4y^3-4y) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-3/4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ definita negativa. P è Massimo locale

b. **(5 punti)** si determinino i massimi e minimi assoluti della funzione f in

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$



•• C è compatto, f è continua quindi esistono Max e Min.

••• Nell'interno di C il gradiente non è mai nullo $\Rightarrow$ Max e Min sono su ∂C.

•••• $\partial C = r_1 \cup r_2 \cup r_3 \cup r_4$.

$r_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1-x,\ 0 \leq x \leq 1\}$, $f_1 = f|_{r_1} : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_1(x) = f(x, 1-x) = e^{-x^2+x-1}$

$f_1'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x-1} > 0 \iff x \in (0, \frac{1}{2})$

$r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1+x,\ -1 \leq x \leq 0\}$, $f_2 = f|_{r_2} : [-1,0] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = f(x, 1+x) = (2x+1)e^{-x^2-3x-1}$

$f_2'(x) = -(4x^2+8x+1)e^{-x^2+x-1} > 0 \iff x \in (-1, -1+\frac{\sqrt{3}}{2})$. Sia $S = \left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$r_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1-x,\ -1 \leq x \leq 0\}$, $f_3 = f|_{r_3} : [-1,0] \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = f(x, -1-x) = -e^{-x^2-3x-1}$

$f_3'(x) = (2x+3)e^{-x^2-3x-1} > 0 \iff x \in (-1, 0)$

$r_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1+x,\ 0 \leq x \leq 1\}$, $f_4 = f|_{r_4} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = f(x, x-1) = (2x-1)e^{-x^2+x-1}$

$f_4'(x) = -(4x^2-4x-1)e^{-x^2+x-1} > 0 \iff x \in (0,1)$.

•••• T e Q candidati ad essere Min assoluti: $f(T) = -e$ è Min assoluto

P e S candidati ad essere Max assoluti: $\mathrm{Max}(f(P), f(S))$ è Max assoluto

3. **(8 punti)** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = 3x^2 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$$

a. **(4 punti)** Si determini, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione locale.

posto $x = e^t$ e $\varphi(t) = y(e^t)$ l'equazione diventa $\varphi'' - 2\varphi' + \varphi = 3e^{2t}$; Integrale generale: $\varphi(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + 3e^{2t}$ quindi $y(x) = c_1 x + c_2 x \log x + 3x^2$. Imponendo le condizioni iniziali si ha

$c_1 + 3 = a$

$c_1 + c_2 + 6 = b$

Quindi $y(x) = (a-3)x + (b-a-3)x \log x + 3x^2$

b. **(2 punti)** Si stabilisca se esistono valori di a e b per cui tale soluzione é definita su tutto $\mathbb{R}$.

Affinché $y(x)$ sia prolungabile in $x = 0$ deve essere $b - a = 3$. In tal caso $y(x)$ si prolunga con una soluzione del tipo $\tilde{y}(x) = Ax + 3x^2$. Imponendo che il raccordo in 0 sia di classe $\mathcal{C}^2$ otteniamo

$A = a - 3$

c. **(2 punti)** Si discuta l'unicitá di eventuali soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

per quanto detto sopra il prolungamento è univocamente determinato imponendo il raccordo $\mathcal{C}^2$ in 0; quindi la soluzione è unica

$0 < z < \sqrt{x} < \sqrt[4]{y} < \sqrt[8]{z} \Rightarrow z \in (0,1)$

4. **(9 punti)** Si consideri l'insieme E definito da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y > x^2, \ z > y^2, \ x > z^2\}.$$

a. **(3 punti)** Si verifichi che il volume di E é 1/7;

$E = \{(x,y,z) : 0 < z < 1;\ z^2 < x < \sqrt[4]{z},\ x^2 < y < \sqrt{z}\}$

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_0^1 \int_{z^2}^{\sqrt[4]{z}} \int_{x^2}^{\sqrt{z}} dy\,dx\,dz = \ldots \frac{1}{7}$$

b. **(4 punti)** si derminimo gli α interi e maggiori di -3 tali che esiste finito

$$\int_E x^\alpha \, dx \, dy \, dz;$$

• $\bar{E}$ è compatto. Per $\alpha \geq 0$, $f(x,y,z) = x^\alpha$ è continua su $\bar{E} \Rightarrow$ esiste finito.

•• $\alpha = -1$ $\displaystyle\int_0^1 \int_{z^2}^{\sqrt[4]{z}} \int_{x^2}^{\sqrt{z}} \frac{1}{x}\, dy\,dx\,dz = \int_0^1 \int_{z^2}^{\sqrt[4]{z}} \left(\frac{\sqrt{z}}{x} - x\right) dx\,dz =$

$\displaystyle = \int_0^1 \left(\sqrt{z}\ln\sqrt[4]{z} - \sqrt{z}\ln z^2 - \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}z^4\right) dz$ esiste finito essendo integrale di funzione continua su intervallo limitato

••• $\alpha = -2$ $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[4]{z}} \int_{x^2}^{\sqrt{z}} \frac{1}{x^2}\, dy\,dx\,dz = \int_0^1 \int_{z^2}^{\sqrt[4]{z}} \left(\frac{\sqrt{z}}{x^2} - 1\right) dx\,dz =$

$\displaystyle = \int_0^1 \left(\sqrt{z}\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{z}} + \frac{1}{z^2}\right) - \sqrt[4]{z} + z^2\right) dz \underset{z\to 0^+}{\sim} z^{-\frac{3}{2}}$ non integrabile. $\nexists$ finito

c. **(2 punti)** in $\mathbb{R}^3$ si consideri l'insieme F ottenuto ruotando l'insieme

$$E \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1/2\}$$

intorno all'asse z; si calcoli il volume di F.

• Poiché l'insieme che facciamo ruotare è contenuto nel piano $z = \frac{1}{2}$, facendolo ruotare intorno all'asse z si ottiene ancora un oggetto nel piano $z = \frac{1}{2}$. Essendo limitato, il volume di F è zero.