Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 18 Giugno 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)**
   Siano α e β positivi. Data

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\sqrt{6y^4 + 2x^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Si stabilisca

   a. **(3 punti)** per quali valori di α e β la funzione f è continua nell'origine;

   b. **(2 punti)** per quali valori di α e β f ammette tutte le derivate direzionali nell'origine;

   c. **(3 punti)** per quali valori di α e β f è differenziabile nell'origine.

2. **(5 punti)** Sia

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x > 0; \ y > 0; \ 0 < xy < 1; \ 1 < \frac{x}{y} < 4 \right\}$$

e sia $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2} \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Calcolare

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

3. **(4 punti)** Verificare che l'equazione $e^x - 2e^y + 3x - 4y + 1 = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $(0,0)$, una funzione $y = f(x)$. Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f, centrato in $x = 0$ e tracciare il grafico di f in un intorno di $x = 0$.

4. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n}}.$$

a. **(3 punti)** Si determini l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme della successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$;

b. **(2 punti)** si determini l'insieme di convergenza puntuale e l'insieme di convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x);$$

c. **(3 punti)** si verifichi che si ha convergenza puntuale su $\mathbb{R}$ e convergenza uniforme su ogni compatto della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x).$$

5. **(8 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{(x+1)^2} = x^2 y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ e senza risolvere l'equazione differenziali, si discuta l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del problema;

b. **(3 punti)** al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, si determinino tutte le soluzioni locali del problema di Cauchy assegnato;

c. **(2 punti)** per quali valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$?