Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
29 Gennaio 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(8 punti)** Sia f la funzione
$$f(x,y) = e^{|y|-|x|+1}.$$

a. **(4 punti)** Si determinino massimi e minimi locali e globali della funzione nel suo dominio; si determinino inoltre estremo superiore e inferiore di f.

• $f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y)$
ragiono in $[0,\infty)^2$.

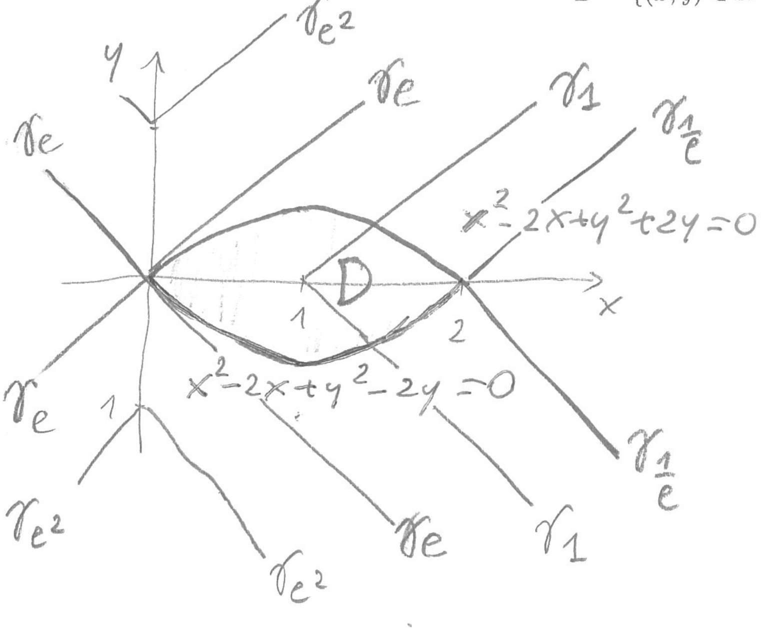
$\nabla f(x,y) \underset{x>0 \text{ e } y>0}{=} (-e^{y-x+1}, e^{y-x+1}) \neq (0,0)$ sempre

$x \to f(x,0)$ è decrescente per $x \geq 0$
$y \to f(0,y)$ è crescente per $y \geq 0$ $\Rightarrow$ Non ci sono Max/Min

• Sup $f = \infty$ poiché $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = \infty$

• Inf $f = 0$ poiché $f \geq 0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = 0$

b. **(4 punti)** Si determinino, se esistono, i valori massimi e minimi assunti da f in
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 2x + y^2 + 2|y| \leq 0\}.$$



le curve di livello γ_K sono

$\gamma_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = K\}$

$e^{|y|-|x|+1} = K \qquad K>0$

$|y| = |x| - 1 + \ln K$

le pongo nel disegno...

È facile notare che

$(0,0) \in \gamma_e \cap \partial D$ e $(2,0) \in \gamma_{\frac{1}{e}} \cap \partial D$

Quindi $(0,0)$ è Max assoluto di f in D
$(2,0)$ è Min assoluto di f in D

2. **(8 punti)** Per $\alpha > 0$ sia

$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{y}{(z^2+x^2+y^2)\,(x^2+y^2)^\alpha}$$

a. **(4 punti)** Si determini α tale che f_α sia integrabile in

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 < z^2 < x^2+y^2, \; x>0, \; y>0, \; |z| < x^2+y^2 < 1\};$$

Posto $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ e $z = z$ il corrispondente di D è

$D' = \{(\rho,\theta,z) : \; \rho|\cos\theta| < |z| < \rho \quad \cos\theta > 0, \sin\theta > 0 \text{ e } |z| < \rho^2 < 1\}$

Quindi: $\{(\rho,\theta,z) : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}; \; \rho\cos\theta < |z| < \rho^2; \; 1 > \rho > \cos\theta\} = D'$ Poiché

$f(x,y,z) = f(x,y,-z)$ si ha $\displaystyle\int_D f(x,y,z) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^1 d\rho \int_{\rho\cos\theta}^{\rho^2} \frac{\rho^2 \sin\theta \, dz}{[\rho^2+z^2]\,\rho^{2\alpha}} =$

$\displaystyle = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^1 \rho^{2-2\alpha} \sin\theta \, \frac{1}{\rho}\left[\arctan\rho - \arctan\cos\theta\right] d\rho$. Poiché $\frac{\arctan\rho}{\rho} \to 1$ per $\rho \to 0$

analizziamo $\displaystyle\int_{\cos\theta}^1 \rho^{1-2\alpha} \arctan\cos\theta \, d\rho = \arctan\cos\theta \left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right]_{\cos\theta}^1$ per $\alpha \neq 1$

$= \arctan\cos\theta \left[\log\rho\right]_{\cos\theta}^1$ per $\alpha = 1$

Quindi bisogna analizzare il comportamento di

$\displaystyle\frac{\sin\theta\,[\arctan\cos\theta]}{(\cos\theta)^{2\alpha-2}}$ per $\alpha \neq 1$

$\sin\theta\,(\arctan\cos\theta)\log\cos\theta$ per $\alpha = 1$

in un intorno di $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$\alpha = 1$: $\arctan\cos\theta \cdot \log\cos\theta \to 0$ per $\theta \to \frac{\pi}{2}$; quindi integrabile

$\alpha \neq 1$: $\displaystyle\frac{\arctan\cos\theta}{(\cos\theta)^{2\alpha-2}} \sim \frac{1}{(\cos\theta)^{2\alpha-1}}$

è integrabile per $2\alpha - 1 < 1$

$\alpha < 1$

Quindi $\alpha \leq 1$

b. **(4 punti)** si calcoli

$$\int_D f_{1/2}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

$\displaystyle\int_D f_{1/2}(x,y,z) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^1 d\rho \int_{\rho\cos\theta}^{\rho^2} \frac{\rho\sin\theta}{(\rho^2+z^2)}\, dz =$

$\displaystyle = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^1 \sin\theta\left[\arctan\rho - \arctan\cos\theta\right] d\rho$

$\displaystyle = 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta(-\arctan\cos\theta)(1-\cos\theta) + 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta \int_{\cos\theta}^1 \arctan\rho \, d\rho$

$\displaystyle = 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta\left[-\arctan\cos\theta + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\right)\right] + \frac{1}{2}\sin\theta \log(1+\cos^2\theta)\, d\theta$

$\displaystyle 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\right] + \left(\frac{\pi}{2} - \log 2\right) + \int_0^{\pi/2} \sin\theta \log(1+\cos^2\theta)\, d\theta =$

$\pi - 2\log 2 + \log 2 - 2 - \frac{\pi}{2}$

3. **(8 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = a \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si stabilisca, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se esiste unica la soluzione locale e in caso affermativo determinarla;

Soluzioni dell'omogenea $x^2y''-3xy'+4y=0$ sono $c_1x^2+c_2x^2\log|x|$. Soluzione particolare della non omogenea: $y=x^3$ quindi l'integrale generale è: $c_1x^2+c_2x^2\log|x|+x^3$

$y(1)=0 \Rightarrow c_1=-1$

$y'(1)=a \Rightarrow c_2=a-1$

Soluzione del P.C.:

$y(x)=-x^2+(a-1)x^2\log x+x^3$

b. **(3 punti)** stabilire se esistono valori di a per cui la soluzione locale é definita su tutto $\mathbb{R}$ e discuterne l'eventuale unicitá;

Affinché la soluzione sia definita su tutto $\mathbb{R}$ il termine $x^2\log x$ non deve comparire: quindi $a=1$. In tal caso questa soluzione ha il seguente comportamento per $x\to 0$: $y(0)=y'(0)=0$ e $y''(0)=-2$. Quindi l'unico raccordo possibile con le soluzioni definite per $x<0$ (che sono del tipo $y(x)=c_1x^2+c_2x^2\lg|x|+x^3$) è per $c_2=0$ e $c_1=-1$. Quindi tale soluzione è unica!

c. **(3 punti)** si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = b \end{cases}$$

determinare al variare di $b \in \mathbb{R}$ tutte le possibili soluzioni locali.

Ogni soluzione del tipo $c_1x^2+c_2x^2\lg|x|+x^3$ soddisfa le condizioni $y(0)=0=y'(0)$. Quindi se $b\neq 0$ il problema non ha soluzioni! Se $b=0$ abbiamo infinite soluzioni del tipo $c_1x^2+x^3$

4. **(8 punti)** Sia $\{f_n\}_n$ la successione definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(n^2x - nx^2)^2}.$$

a. **(4 punti)** Stabilire l'insieme di convergenza puntuale e tutti gli eventuali insiemi di convergenza uniforme;

$f_n(0) = 1 \ \forall n$; per $x \neq 0$ $f_n(x) \to 0$. Essendo la funzione limite discontinua non c'è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

$$f_n'(x) = \frac{2n^2x(x-n)(n-2x)}{[1+(n^2x-nx^2)^2]^2}$$ Quindi f_n' è

	0	$n/2$	n
$- \ -$	$+ \ +$	$+ \ +$	$+$
$- \ -$	$- \ -$	$- \ -$	$+$
$+ \ +$	$+ \ +$	$- \ -$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$

Insiemi di convergenza uniforme:

$(-\infty, a)$ con $a<0$ $\quad \sup_{x<a} f_n(x) = f_n(a)$

(b, c) con $0<b<c$: definitivamente $\sup_{b<x<c} f_n(x) = f_n(b)$

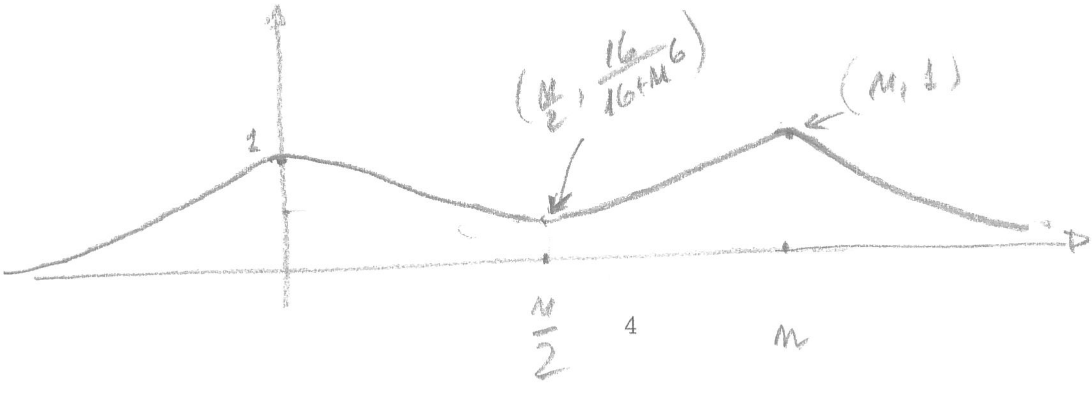
Osserviamo che $f_n(n) = 1$ e quindi in $(b, +\infty)$ NON c'è convergenza uniforme!

b. **(4 punti)** si discuta la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in $[1/2, 2]$.

per quanto detto sopra si ha che

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq x \leq 2} |f_n(x)| = f_n(1/2) \text{ definitivamente}$$

$$f_n\left(\tfrac{1}{2}\right) \simeq \frac{1}{1+n^4/4}$$ e quindi la serie converge uniformemente in $[1/2, 2]$



$$f_n\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{16}{16+n^6}$$