Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 12 Dicembre 2018

FILA A

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}e^{-\frac{x^2}{y^4}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

I punti critici sono del tipo $(x_0, 0)$

$x_0 = 0$ $\quad |f(x,y)| \leq \sqrt[3]{|x|} \to 0$ per $(x, y) \to (0,0)$

$x_0 \neq 0$ $\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = \sqrt[3]{x_0} \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} e^{-x^2/y^4} = 0$ poiché $\frac{x^2}{y^4} \to +\infty$

b. **(2 punti)** si determinino i punti di $\mathbb{R}^2$ in cui esiste il gradiente;

I punti da esaminare sono: $(x_0, 0)$ e $(0, y_0)$: in tutti gli altri casi f è C^1

$(0,0)$: $\nabla f(0,0) = 0$ banalmente in quanto f è nulla sugli assi cartesiani

analogamente $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0}\, e^{-x_0^2/t^4}}{t} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t}\, e^{-t^2/y_0^4}}{t} = +\infty$ Quindi $\nexists\, \nabla f$ nei punti $(0, y_0)$ se $y_0 \neq 0$

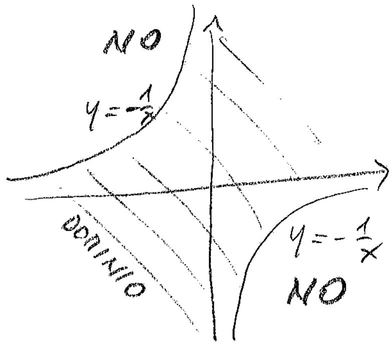
c. **(2 punti)** si calcolino tutte le derivate direzionali nell'origine;

$v = (a, b)$
con $a \cdot b \neq 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{at}\, \exp\left(-\frac{a^2}{t^2 b^4}\right)}{t} = 0$

d. **(2 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

$F(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}\, e^{-x^2/y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sia $y^2 = x$

$F(y^2, y) = \frac{e^{-1}\, y^{2/3}}{\sqrt{y^2+y^4}} \sim e^{-1} \frac{y^{2/3}}{|y|} \not\to 0$ per $y \to 0$ Quindi f NON è differenziabile in $(0,0)$



2. **(8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \log(1+xy) + y^2 - 1$$

nel suo dominio.

a. **(4 punti)** Si determinino i massimi e i minimi locali, stabile se sono assoluti. Si determinino inoltre sup e inf di f nel suo dominio.

• $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = +\infty \Rightarrow \sup f = +\infty$ •• $\lim_{x\to 1^-} f(x,-1) = -\infty \Rightarrow \inf f = -\infty$

••• $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{y}{xy+1},\ \frac{x}{xy+1}+2y\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ unico punto candidato ad essere Max/Min

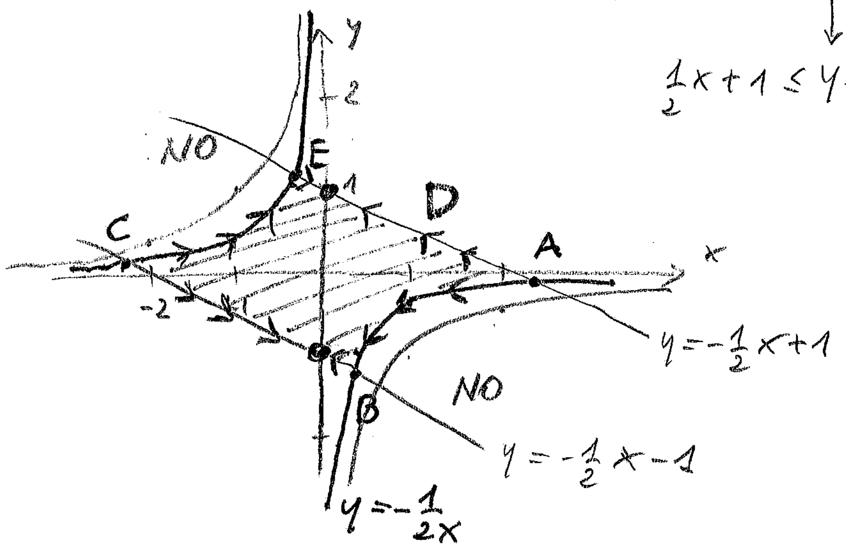
•••• $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrice non definita $\Rightarrow (0,0)$ è sella

b. **(4 punti)** Sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{|x+2y| \le 2}_{\Downarrow},\ \ 2xy+1 \ge 0\}.$$

Si determinino eventuali punti di massimo e minimo di f in D.

$\frac{1}{2}x+1 \le y \le -\frac{1}{2}x+1$



• $A = \left(1+\sqrt{2},\ \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ $B = \left(\sqrt{2}-1,\ -\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}\right)$

$C = -A$ $E = -B$

•• $f(x,y) = f(-x,-y)$

••• Essendo f continua su un compatto e non essendo Max/Min in $\mathrm{int}(D)$, i punti di Max/Min esistono e sono in ∂D

studiamo f lungo $\overline{AE}$ $f(x,y) \underset{\uparrow}{=} f(x,-\frac{1}{2}x+1) = g(x) = \log(1+x-\frac{1}{2}x^2) + (-\frac{1}{2}x+1)^2 - 1$

$1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2}$

$g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-x(x^2-4x+6)}{-x^2+2x+2} > 0$? per $x<0$

studiamo f lungo $\widehat{AB}$ $f(x,y) = f(x,-\frac{1}{2x}) = \log(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4x^2} + 1 = h(x)$

$\sqrt{2}-1 \le x \le 1+\sqrt{2}$

$h'(x) = -\frac{1}{2x^3} > 0$ per $x<0$

Negli altri due parti di Bordo uso ••

$\Rightarrow$ $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono Max
A e C sono Min

3. **(6 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n}$$

a. **(3 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme.

Raggio di convergenza $= \lim_n \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1$

in ± 1 il termine generale non tende a zero $\Rightarrow$ la serie non può convergere. Per il teorema del doppio limite non c'è convergenza uniforme in $(-1, 1)$. C'è convergenza uniforme in $[-r, r]$ con $0 \leq r < 1$.

b. **(3 punti)** Si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} = \sum_{1}^{+\infty} x^{n+1} + x \sum_{1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} =$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x + x \sum_{1}^{+\infty} \int_0^x t^{n-1}\, dt = \frac{1}{1-x} - 1 - x + x \int_0^x \sum_{1}^{+\infty} t^{n-1}\, dt =$$

$$\frac{x^2}{1-x} + x \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = \frac{x^2}{1-x} - x \log(1-x) \qquad \text{per } |x| < 1$$

4. **(4 punti)** Si verifichi che l'equazione

$$F(x,y,z) = e^x + e^{y+z} - e^{x+z} + z - 1 = 0 \qquad F(0,0,0) = 0$$

definisce in un intorno dell'origine una funzione $z = f(x,y)$. Al variare di $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ versore in $\mathbb{R}^2$ si calcoli $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$.

• $\frac{\partial F}{\partial z} = e^{y+z} - e^{x+z} + 1 \underset{x=y=z=0}{=} 1 \neq 0 \Rightarrow \exists f : U_{(0,0)} \to V_0$ t.c. $f \in C^1(U_{(0,0)})$

$F(x, y, f(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in U_{(0,0)}$

•• $\frac{\partial F}{\partial x} \underset{z=f(x,y)}{=} e^x + e^{y+z} \frac{\partial f}{\partial x} - e^{x+z}\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ per $x = y = 0$, $z(x,y) = 0$ abbiamo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{y+z}\left(1 + \frac{\partial f}{\partial y}\right) - e^{x+z} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ per $x = y = 0$, $z(x,y) = 0$ abbiamo $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$

••• Essendo f in C^1 $D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (v_1, v_2) = -v_2$

5. **(8 punti)** Sia $\alpha > 0$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n(x) = n^\alpha x^3 e^{-nx^5}.$$

a. **(4 punti)** Al variare di α, si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ e si determinino gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme;

$f_n(0)=0$ $\forall \alpha$ per $x \neq 0$ $f_n(x)$ converge $\Leftrightarrow x>0$. Quindi $f_n(x) \to 0$ per $x \geq 0$

$f_n'(x) = n^\alpha x^2 e^{-nx^5}[3-5nx^5] \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \left(\frac{3}{5n}\right)^{1/5} = x_n$

$\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = n^\alpha \left(\frac{3}{5n}\right)^{3/5} e^{-3/5} \to 0 \Leftrightarrow \alpha < 3/5$: convergenza uniforme in $[0,+\infty) \Leftrightarrow \alpha < 3/5$. Sia ora $\alpha \geq \frac{3}{5}$ e $a>0$;

$\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a)$ se $x_n < a$. Quindi ho convergenza uniforme in $[a,+\infty)$ $\forall \alpha \geq 3/5$.

b. **(4 punti)** Si determinino gli α per cui la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n$ converge uniformemente in $[0, \infty)$.

1) condizione necessaria è che $f_n(x) \to 0$ uniformemente: $\alpha < \frac{3}{5}$

2) detta $g_x(y) = y^\alpha x^3 e^{-yx^5}$ risulta

$$\frac{\partial}{\partial y} g_x(y) = x^3 y^\alpha e^{-yx^5}\left[\alpha/y - x^5\right] < 0 \quad \text{se } y > \frac{\alpha}{x^5} \quad (x \geq 0)$$

quindi $f_n(x) \downarrow 0$ $\forall x>0$ almeno definitivamente.

3) per il criterio di Leibnitz $\sum_1 (-1)^n f_n(x)$ converge a $S(x)$

4) essendo $f_n(x)>0$ per $x>0$ risulta

$$\sup_{x\geq 0}\left|S(x) - \sum_1^N (-1)^n f_n(x)\right| \leq \sup_{x \geq 0} f_{N+1}(x) \quad \text{e quindi}$$

ho convergenza uniforme per $\alpha < 3/5$

3. **(6 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{n+1}$$

a. **(3 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme.

R = raggio di convergenza $= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1$

in ± 1 il termine generale non tende a $0 \Rightarrow$ la serie non può convergere! Convergenza semplice in $(-1, 1)$; non c'è convergenza uniforme in $(-1, 1)$ per il teorema del doppio limite. c'è convergenza uniforme in $[-r, r]$ con $0 \leq r < 1$

b. **(3 punti)** Si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} = \sum_{1}^{+\infty} x^{n+1} - \sum_{1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - \sum_{1}^{+\infty}\int_0^x t^n dt = \frac{x^2}{1-x} - \int_0^x \sum_{1}^{+\infty} t^n dt =$$

$$\frac{x^2}{1-x} - \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1\right) dt = \frac{x^2}{1-x} + \log(1-x) + x$$

4. **(4 punti)** Si verifichi che l'equazione

$$F(x,y,z) = e^y + e^{x+z} - e^{y+z} + z = 1 \qquad F(0,0,0) = 1$$

definisce in un intorno dell'origine una funzione $z = f(x, y)$. Al variare di $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ versore in $\mathbb{R}^2$ si calcoli $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$.

- $\frac{\partial F}{\partial z} = e^{x+z} - e^{y+z} + 1 \underset{x=y=z=0}{=} 1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, f : V_{(0,0)} \to V_0 \quad f \in C^1(U_{(0,0)})$

  $F(x,y,f(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in V_{(0,0)}$

- $\frac{\partial F}{\partial x} \underset{z=f(x,y)}{=} e^{x+z}\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}\right) - e^{y+z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ per $x = y = 0$, $z = f(0,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$

  $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + e^{x+z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + e^{x+z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - e^{y+z}\left(1 + \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ per $x = y = 0$, $z = f(0,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$

- Essendo $f \in C^1 \Rightarrow D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (v_1, v_2) = -v_1$

5. **(8 punti)** Sia $\alpha > 0$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n(x) = n^\alpha x^5 e^{-nx^3}.$$

a. **(4 punti)** Al variare di α, si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ e si determinino gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme;

$f_n(0) = 0 \ \forall \alpha$ sia $x \neq 0$ $f_n(x)$ converge $\Leftrightarrow x > 0$

L'insieme di convergenza puntuale è $(\forall \alpha > 0)$ $[0, +\infty)$ e $f_n(x) \to 0 \ \forall x \geq 0$

$f_n'(x) = n^\alpha x^4 e^{-nx^3}\left[5 - 3nx^3\right] \geq 0 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{\frac{5}{3n}} = x_n$

$f_n(x_n) = n^\alpha \left(\frac{5}{3n}\right)^{5/3} e^{-5/3} = \sup\limits_{x \geq 0} |f_n(x)| \to 0 \Leftrightarrow \alpha < 5/3$! convergenza uniforme in $[0, +\infty) \Leftrightarrow \alpha < 5/3$. Sia $a \ a > 0$ e $\alpha \geq 5/3$: risulta definitivamente $\sup\limits_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ quindi convergente uniforme su $[a, +\infty)$

b. **(4 punti)** Si determinino gli α per cui la serie di funzioni $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n$ converge uniformemente in $[0, \infty)$.

1) condizione necessaria è che $f_n(x) \to 0$ uniformemente: quindi $\alpha < 5/3$

2) Verifico che $\forall x \in [0, +\infty)$ $f_n(x) \downarrow 0$ per $n \to +\infty$ almeno definitivamente

detta $g_x(y) = y^\alpha x^5 e^{-yx^3}$ si ha che

$\frac{\partial}{\partial y} g_x(y) = x^5 y^\alpha e^{-yx^3}\left[\alpha/y - x^3\right] < 0$ almeno per $y > \frac{\alpha}{x^3}$ $(x > 0)$

3) per il criterio di Leibniz la serie $\sum\limits_{1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$ converge $\forall x \geq 0$ a $S(x) = \sum\limits_{1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$

4) $\sup\limits_{x \geq 0} \left| \sum\limits_{1}^{N} (-1)^n f_n(x) - S(x) \right| \leq \sup\limits_{x \geq 0} f_{N+1}(x)$ e quindi ho convergenza uniforme $\Leftrightarrow \alpha < 5/3$