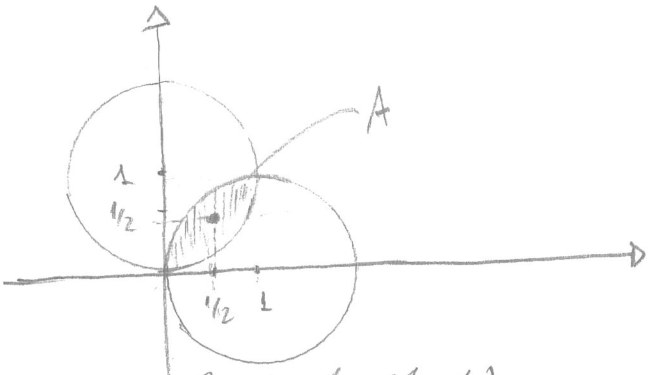
Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
SECONDA PROVA PARZIALE – 29 Gennaio 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(6 punti)** Sia $A = B((1,0),1) \cap B((0,1),1)$. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando A intorno all'asse x.



Baricentro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Per questioni di simmetria il ~~baricentro ha coordinate (1/2, 1/2)~~

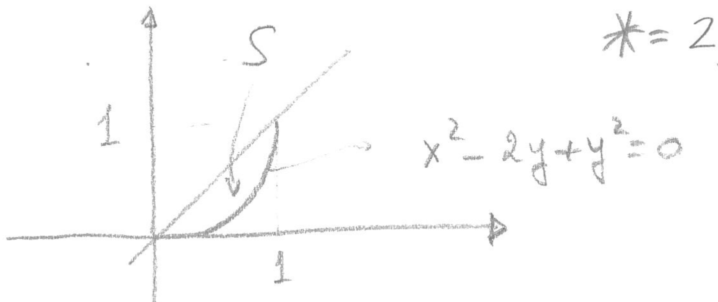
Area di A = 2 Area di S = $*$

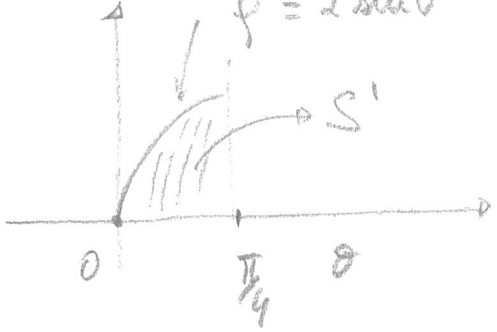
passando in coordinate polari:

$$* = 2\iint_S dx\,dy = 2\iint_{S'} \rho \, d\rho \, d\theta = 2\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho \, d\rho =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} 2\sin^2\theta \, d\theta = 2\left[\theta - \cos\theta\sin\theta\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$





Quindi il volume richiesto è $(2\pi)\underbrace{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi(\pi - 2)}{2}$

distanza del Baricentro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dall'asse di rotazione (asse x)

2. **(8 punti)** Per $\alpha > 0$ sia

$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{y}{(z^2+x^2+y^2)\,(x^2+y^2)^\alpha}$$

a. **(4 punti)** Si determini α tale che f_α sia integrabile in

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 < z^2 < x^2+y^2,\ x>0,\ y>0,\ |z| < x^2+y^2 < 1\};$$

Posto $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ e $z=z$ il corrispondente di D è

$D' = \{(\rho,\theta,z);\ \rho|\cos\theta| < |z| < \rho \quad \cos\theta>0, \sin\theta>0 \text{ e } |z|<\rho^2<1\}$

Quindi $\{(\rho,\theta,z) :\ 0<\theta<\frac{\pi}{2};\ \rho\cos\theta<|z|<\rho^2;\ 1>\rho>\cos\theta\} = D'$ Poiché

$f(x,y,z)=f(x,y,-z)$ si ha $\int_D f(x,y,z) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^1 d\rho \int_{\rho\cos\theta}^{\rho^2} \frac{\rho^2\sin\theta\, dz}{[\rho^2+z^2]\rho^{2\alpha}} =$

$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^1 \rho^{2-2\alpha}\sin\theta\, \frac{1}{\rho}[\arctan\rho - \arctan\cos\theta]\, d\rho$. Poiché $\frac{\arctan\rho}{\rho} \to 1$ per $\rho\to 0$

analizziamo $\int_{\cos\theta}^1 \rho^{1-2\alpha}\arctan\cos\theta\, d\rho = \arctan\cos\theta \left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right]_{\cos\theta}^1$ per $\alpha \neq 1$

$= \arctan\cos\theta\,[\log\rho]_{\cos\theta}^1$ per $\alpha=1$

Quindi bisogna analizzare il comportamento di

$\frac{\sin\theta(\arctan\cos\theta)}{(\cos\theta)^{2\alpha-2}}$ per $\alpha\neq 1$

$\sin\theta(\arctan\cos\theta)\log\cos\theta$ per $\alpha=1$

in un intorno di $\theta=\frac{\pi}{2}$:

$\alpha=1$: $\arctan\cos\theta\cdot\log\cos\theta \to 0$ per $\theta\to\frac{\pi}{2}$; quindi integrabile

$\alpha\neq1$: $\frac{\arctan\cos\theta}{(\cos\theta)^{2\alpha-2}} \sim \frac{1}{(\cos\theta)^{2\alpha-1}}$

è integrabile per $2\alpha-1<1$

$\alpha<1$

Quindi $\alpha\leq 1$

b. **(4 punti)** si calcoli

$$\int_D f_{1/2}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

$\int_D f_{1/2}(x,y,z) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^1 d\rho \int_{\rho\cos\theta}^{\rho^2} \frac{\rho\sin\theta}{(\rho^2+z^2)}\, dz =$

$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^1 \sin\theta\,[\arctan\rho - \arctan\cos\theta]\, d\rho$

$= 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta(-\arctan\cos\theta)(1-\cos\theta) + 2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\int_{\cos\theta}^1 \arctan\rho\, d\rho$

$= 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta\left[-\arctan\cos\theta + \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)\right] + \frac{1}{2}\sin\theta\log(1+\cos^2\theta)\, d\theta$

$2\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right] + \left(\frac{\pi}{2}-\log 2\right) + \int_0^{\pi/2}\sin\theta\log(1+\cos^2\theta)\, d\theta =$

$\pi - 2\log 2 + \log 2 - 2 - \frac{\pi}{2}$

3. **(8 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = a \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si stabilisca, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se esiste unica la soluzione locale e in caso affermativo determinarla;

Soluzioni dell'omogenea $x^2y''-3xy'+4y=0$ sono $c_1x^2+c_2x^2\log|x|$. Soluzione particolare della non omogenea: $y=x^3$ quindi l'integrale generale è: $c_1x^2+c_2x^2\log|x|+x^3$

$y(1)=0 \Rightarrow c_1=-1$

$y'(1)=a \Rightarrow c_2=a-1$

Soluzione del P.C.:

$y(x)=-x^2+(a-1)x^2\log x+x^3$

b. **(3 punti)** stabilire se esistono valori di a per cui la soluzione locale é definita su tutto $\mathbb{R}$ e discuterne l'eventuale unicitá;

Affinché la soluzione sia definita su Tutto $\mathbb{R}$ il termine $x^2\log x$ non deve comparire: quindi $a=1$. In tal caso questa soluzione ha il seguente comportamento per $x\to 0$: $y(0)=y'(0)=0$ e $y''(0)=-2$. Quindi l'unico raccordo possibile con le soluzioni definite per $x<0$ (che sono del tipo $y(x)=c_1x^2+c_2x^2\lg|x|+x^3$) è per $c_2=0$ e $c_1=-1$. Quindi tale soluzione è unica!

c. **(3 punti)** si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = b \end{cases}$$

determinare al variare di $b \in \mathbb{R}$ tutte le possibili soluzioni locali.

Ogni soluzione del tipo $c_1x^2+c_2x^2\lg|x|+x^3$ soddisfa le condizioni $y(0)=0=y'(0)$. Quindi se $b\neq 0$ il problema non ha soluzioni! Se $b=0$ abbiamo infinite soluzioni del tipo $c_1x^2+x^3$

4. **(12 punti)** Si determini la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

a. **(4 punti)**

$$\begin{cases} x' = 9y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{I° MODO}}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 9\\-1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda^2=-9 \Rightarrow \lambda=\pm 3i$$

$$\begin{pmatrix}-3i & 9\\-1 & -3i\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}_{v} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow v=\begin{pmatrix}-3i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} \text{ autovettore}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\left(\cos 3t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \sin 3t\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right) + \beta\left(+\sin 3t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \cos 3t\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right) \Rightarrow * \begin{cases} x = -3\beta\cos 3t + 3\alpha\sin 3t \\ y = +\beta\sin 3t + \alpha\cos 3t \end{cases}$$

$\boxed{\text{II° MODO}}$

$x'' = 9y' = -9x$

$\Rightarrow x'' + 9x = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i$

$$\bullet \begin{cases} x = a\cos 3t + b\sin 3t \\ y = \frac{x'}{9} = -\frac{a}{3}\sin 3t + \frac{b}{3}\cos 3t \end{cases}$$

le condizioni $x(0)=y(0)=1$ danno

$$\begin{cases} x = \cos 3t + 3\sin 3t \\ y = -\frac{1}{3}\sin 3t + \cos 3t \end{cases}$$

b. **(4 punti)**

$$\begin{cases} x' = 9y \\ y' = -x + t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{I° MODO}}$ cerco una soluzione particolare del tipo $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}At+B\\Ct+D\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 9Ct + 9D \\ C = -At - B + t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+t\\+\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

soluzione generale (da $*$)

$$\begin{cases} x = -3\beta\cos 3t + 3\alpha\sin 3t + t \\ y = +\beta\sin 3t + \alpha\cos 3t + \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow x(0)=y(0)=0$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}\sin 3t + t \\ y = -\frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{9} \end{cases}$$

$\boxed{\text{II° MODO}}$

$x'' = 9y' = -9x + 9t$

$\Rightarrow x'' + 9x = 9t$

cerco soluzione particolare $x = Et + F \Rightarrow 9(Et+F) = 9$

$\Rightarrow x = t$

$\bullet \Rightarrow x = a\cos 3t + b\sin 3t + t$

$\Rightarrow y = \frac{x'}{9} = -\frac{a}{3}\sin 3t + \frac{b}{3}\cos 3t + \frac{1}{9}$

c. **(4 punti)**

$$\begin{cases} x' = 9y \\ y' = -x + \frac{1}{\cos(3t)} \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x'' = 9y' = -9x + \frac{9}{\cos 3t}$$

Uso variazioni delle costanti arbitrarie per trovare una soluzione particolare di $x'' + 9x = \frac{9}{\cos 3t}$ tenendo conto che soluzioni indipendenti della omogenea associata sono $\cos 3t$ e $\sin 3t$

$$\begin{cases} c_1'\cos 3t + c_2'\sin 3t = 0 \\ -3c_1'\sin 3t + 3c_2'\cos 3t = \frac{9}{\cos 3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' = -c_2'\frac{\sin 3t}{\cos 3t} \\ c_2' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = \ln|\cos 3t| \\ c_2 = 3t \end{matrix}$$

soluzione generale è quindi (tenendo conto di $\bullet$)

$$\begin{cases} x = a\cos 3t + b\sin 3t + \cos 3t\ln|\cos 3t| + 3t\sin 3t \\ y = \frac{x'}{9} = -\frac{a}{3}\sin 3t + \frac{b}{3}\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t\ln(\cos 3t) + t\cos 3t \end{cases}$$

$x(0)=y(0)=0$

$\Rightarrow a = b = 0$