Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
SECONDA PROVA PARZIALE – 29 Gennaio 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(6 punti)** Sia $A = B((1,0),1) \cap B((0,1),1)$. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando A intorno all'asse x.

2. **(8 punti)** Per $\alpha > 0$ sia

$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{y}{(z^2+x^2+y^2)\,(x^2+y^2)^\alpha}$$

a. **(4 punti)** Si determini α tale che f_α sia integrabile in

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 < z^2 < x^2+y^2, \ x>0, \ y>0, \ |z| < x^2+y^2 < 1\};$$

b. **(4 punti)** si calcoli

$$\int_D f_{1/2}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

3. **(8 punti)** Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = a \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si stabilisca, al variare di $a \in \mathbb{R}$, se esiste unica la soluzione locale e in caso affermativo determinarla;

b. **(3 punti)** stabilire se esistono valori di a per cui la soluzione locale é definita su tutto $\mathbb{R}$ e discuterne l'eventuale unicitá;

c. **(3 punti)** si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = b \end{cases}$$

determinare al variare di $b \in \mathbb{R}$ tutte le possibili soluzioni locali.

4. **(12 punti)** Si determini la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

a. **(4 punti)**

$$\begin{cases} x' = 9y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

b. **(4 punti)**

$$\begin{cases} x' = 9y \\ y' = -x + t \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

c. **(4 punti)**

$$\begin{cases} x' = 9y \\ y' = -x + \dfrac{1}{\cos(3t)} \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$