

Le regole di derivazione per somma, prodotto, quoziente e composizione si estendono senza difficoltà alla derivata complessa.

Ci proponiamo ora di esaminare la relazione tra la derivabilità in senso complesso di f e la differenziabilità della corrispondente \mathbf{F} .

Sia $z_0 = x_0 + iy_0$. La differenziabilità di \mathbf{F} in (x_0, y_0) equivale ad affermare che

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

e

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right).$$

Possiamo scrivere le due equazioni precedenti in forma compatta moltiplicando la seconda per i , sommando membro a membro e usando la notazione complessa; si ricava:

$$(2.10) \quad f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|),$$

per $z \rightarrow z_0$.

La derivabilità complessa di f in z_0 equivale invece a scrivere

$$(2.11) \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

Il seguente teorema indica che la (2.11) implica la (2.10) insieme a una relazione quantitativa su f_x e f_y :

■ **TEOREMA 2.2** *Siano $f: \mathbb{C} \supseteq A \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in A$; f è derivabile in senso complesso in z_0 se e solo se \mathbf{F} è differenziabile in (x_0, y_0) e vale la relazione (di Cauchy-Riemann):*

$$(2.12) \quad f_y(z_0) = if_x(z_0).$$

Dimostrazione. Sia f derivabile in senso complesso. Dalla (2.11) si ha:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(x - x_0) + if'(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

che implica la (2.10) con $f'(z_0) = f_x(z_0)$ e $if'(z_0) = f_y(z_0)$. Vale dunque anche la (2.12).

Sia \mathbf{F} differenziabile in (x_0, y_0) ; vale allora la (2.10), che, usando la relazione di Cauchy-Riemann, si può scrivere nella forma seguente:

$$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Quest'ultima relazione indica che f è derivabile con $f'(z_0) = f_x(z_0)$. □

Osserviamo che, nelle ipotesi del teorema, si ottiene $f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$.

Esempi

2.13 Sia $f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Le funzioni $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dunque differenziabili in tutto il piano. Inoltre:

$$\begin{aligned} f_x(z) &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ f_y(z) &= e^x(-\sin y + i \cos y) = if_x(z). \end{aligned}$$

Quindi la (2.12) è verificata e $f(z)$ è olomorfa in \mathbb{C} ; inoltre $f'(z) = f_x(z) = e^z$.

2.14 Sia $f(z) = \sin z$; poiché $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ si deduce che $\sin z$ è olomorfa in \mathbb{C} e

$$f'(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Analogamente se $f(z) = \cos z$, f è olomorfa in \mathbb{C} e $f'(z) = -\sin z$.

2.15 Sia $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Le funzioni $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$ sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Inoltre:

$$f_x(z) = 1, \quad f_y(z) = -i.$$

Perciò \bar{z} non è derivabile in alcun punto di \mathbb{C} .

La condizione di Cauchy-Riemann equivale alle due seguenti, ottenute uguagliando le parti reali e quelle immaginarie nella (2.12):

$$(2.13) \quad \begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y). \end{cases}$$

Abbiamo visto che la derivabilità in senso complesso implica la differenziabilità di u e v e le equazioni (2.13).

In realtà implica molto di più e infatti si dimostra che una funzione olomorfa in un aperto A del piano complesso ha derivate (in senso complesso) di ogni ordine; ciò implica che u, v siano di classe $C^\infty(A)$.

Deriviamo allora la prima delle (2.13) rispetto a x e la seconda rispetto a y ; si ottiene:

$$(2.14) \quad \begin{cases} u_{xx}(x, y) = v_{xy}(x, y) \\ u_{yy}(x, y) = -v_{yx}(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in A.$$

Per il teorema di Schwarz, $v_{xy}(x, y) = v_{yx}(x, y)$ e quindi, sommando le (2.14) membro a membro, si ricava l'importante risultato

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

e cioè che u è armonica in A . Analogamente, deriviamo la prima delle (2.13) rispetto a y , la seconda rispetto a x e sottraiamo membro a membro; si ottiene

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

ovvero, anche v è armonica in A . Se $f = u + iv$ è olomorfa in A , u e v si dicono armoniche coniugate.

Per esempio $x^2 - y^2$ e $2xy$ sono armoniche coniugate; così pure $e^x \cos y$ ed $e^x \sin y$.

La teoria delle funzioni olomorfe è ricca di una grande quantità di importanti risultati, che non possono essere contenuti nei limiti della presente trattazione.

2.4 Il teorema di inversione locale

Se ℓ è una funzione (trasformazione) lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n , fissato il sistema di riferimento in \mathbb{R}^n , essa è rappresentata da una matrice \mathbf{M} , quadrata di ordine n . Ovvero se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (\text{vettori colonna}).$$

Un noto teorema di algebra lineare (*teorema di Cramer*) afferma che ℓ realizza una corrispondenza biunivoca tra \mathbb{R}^n ed \mathbb{R}^n se e solo se \mathbf{M} è non singolare; in tal caso per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ l'equazione (sistema di n equazioni lineari scalari)

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

ha esattamente una soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}$.

Ciò equivale ad affermare che la funzione inversa di ℓ , ℓ^{-1} , pure lineare, è rappresentata da \mathbf{M}^{-1} . Di conseguenza la matrice jacobiana di ℓ^{-1} , \mathbf{M}^{-1} , coincide con l'inversa della matrice jacobiana di ℓ .

Il problema dell'inversione delle trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n è quindi completamente risolto.

Ci proponiamo ora di affrontare lo stesso problema nel caso *non lineare*.

Sia $f: \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, A aperto e sia $B = \text{im}(f)$ (immagine di f). Vogliamo studiare l'invertibilità di f o, in altre parole, risolvere l'equazione

$$(2.15) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \quad \text{per } \mathbf{y} \in B.$$

Scriviamo per una volta la (2.15) esplicitamente:

$$(2.15') \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

Mentre nel caso lineare il teorema di Cramer è *globale* ($\ell: \mathbb{R}^n \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^n$), nel caso non lineare il principale risultato è di tipo *locale*. La dicotomia *globale-locale* associata a *lineare-non lineare* si presenta spesso in matematica. Risultato di tipo locale, nel caso specifico della (2.15), significa fissare un punto $\mathbf{x}_0 \in A$, considerare l'immagine $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ e cercare un intorno V di \mathbf{x}_0 e uno W di \mathbf{y}_0 che siano in corrispondenza biunivoca tramite f (Fig. 7.15).

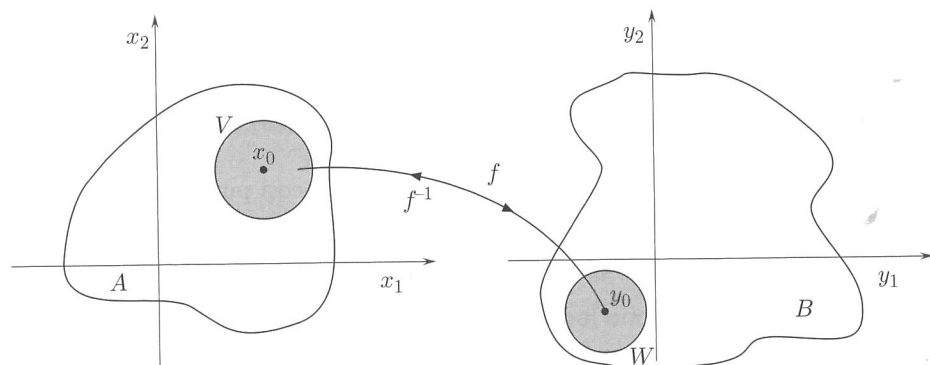


Figura 7.15. Intorni di \mathbf{x}_0 e \mathbf{y}_0 in corrispondenza 1-1.

L'idea è di sfruttare le informazioni in nostro possesso riguardanti le trasformazioni lineari, *linearizzando* l'equazione intorno a \mathbf{x}_0 .

Ciò vuol dire: considerare l'equazione (2.15) nella forma equivalente

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0,$$

e approssimare l'incremento a primo membro con il differenziale di f in \mathbf{x}_0 ; cioè:

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \simeq \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$$

che è un sistema *lineare*.

Se supponiamo $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$ non singolare abbiamo:

$$(2.16) \quad \mathbf{x} \simeq \mathbf{x}_0 + (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0))^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0).$$

Possiamo allora considerare il valore a secondo membro della (2.16) come un valore approssimato di \mathbf{x} e iterare il procedimento definendo la successione

$$(2.17) \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_k))^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k));$$

naturalmente occorre assicurarsi che $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_k)$ a ogni passo sia non singolare.

Se si riesce a dimostrare che $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$ per $k \rightarrow +\infty$, passando al limite nella (2.17) e supponendo f e \mathbf{J}_f continue si ottiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}))^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

ovvero $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

Quello che abbiamo descritto sommariamente non è altro che la generalizzazione del metodo di Newton per la soluzione delle equazioni del tipo $f(x) = 0$.

Nel caso presente tutto "funziona bene" se f è di classe C^1 e se \mathbf{y} è abbastanza vicino a \mathbf{y}_0 (da qui il carattere locale del procedimento). Questo è quanto affermato nel prossimo importante teorema.

■ **TEOREMA 2.3** (di inversione locale) *Sia $f: \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, A aperto. Se:*

i) $f \in C^1(A)$;

ii) \mathbf{x}_0 è un punto di A tale che $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$ è non singolare;

allora esistono un intorno V di \mathbf{x}_0 e un intorno W di $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tali che:

a) f è una corrispondenza biunivoca tra V e W ;

b) detta $\mathbf{g}: W \rightarrow V$ la funzione inversa di f (ristretta a V), $\mathbf{g} \in C^1(W)$ e se $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, vale la formula

$$(2.18) \quad \mathbf{J}_g(\mathbf{y}) = (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}))^{-1}.$$

La formula (2.18) generalizza l'analoga formula per la derivata delle funzioni inverse di funzioni reali di variabile reale.

Premettiamo alla dimostrazione alcune osservazioni ed esempi.

OSSERVAZIONE 2.1 Supponiamo che: $f \in C^1(A)$, A aperto di \mathbb{R}^n ; $B = f(A)$ e per ogni $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{J}_f(\mathbf{x})$ sia non singolare. Ciò significa che, per ogni coppia di punti \mathbf{x} e $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

si possono trovare due intorni V_x e W_y in corrispondenza biunivoca tramite \mathbf{f} . Si dice allora che \mathbf{f} è un **diffeomorfismo locale** (di classe C^1) tra A e B .

Naturalmente ciò non significa che \mathbf{f} sia $1 \leftrightarrow 1$ da A in B , come mostra il seguente esempio:

Esempio 2.16 Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Chiamiamo (ξ, η) le variabili nel codominio e consideriamo le equazioni

$$\begin{cases} e^x \cos y = \xi \\ e^x \sin y = \eta. \end{cases}$$

Si ha:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

e $\det \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(x, y) = e^{2x} \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Dunque \mathbf{f} è un diffeomorfismo locale (di classe C^∞) da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 . Non è però una corrispondenza biunivoca da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 in quanto

$$\mathbf{f}(0, 0) = \mathbf{f}(0, 2k\pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

OSSERVAZIONE 2.2 Se $|\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)| := \det \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = 0$, non si può affermare nulla in generale riguardo alla possibilità di risolvere l'equazione $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, già nel caso $n = 1$.

Se comunque la funzione inversa \mathbf{g} esiste (localmente) non può essere differenziabile. Se lo fosse, avremmo, per la (2.18) (posto $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$)

$$|\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_0)| \cdot |\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)| = 1$$

che è assurdo, essendo il primo membro dell'equazione uguale a zero.

OSSERVAZIONE 2.3 La (2.18) assegna la seguente formula per le derivate parziali di \mathbf{g} :

$$(2.19) \quad \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})|} \cdot F_{kj}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})),$$

dove F_{kj} è il complemento algebrico di $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ nella matrice $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$.

Nel caso $n = 2$, risolvendo

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \xi \\ f_2(x, y) = \eta \end{cases}$$

si ottiene $g_1(\xi, \eta) = x$, $g_2(\xi, \eta) = y$ per la funzione inversa \mathbf{g} . La (2.19) in questo caso dà

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} &= \frac{1}{|\mathbf{J}_{\mathbf{f}}|} \frac{\partial f_2}{\partial y}, & \frac{\partial g_1}{\partial \eta} &= \frac{-1}{|\mathbf{J}_{\mathbf{f}}|} \frac{\partial f_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial \xi} &= -\frac{1}{|\mathbf{J}_{\mathbf{f}}|} \frac{\partial f_2}{\partial x}, & \frac{\partial g_2}{\partial \eta} &= \frac{1}{|\mathbf{J}_{\mathbf{f}}|} \frac{\partial f_1}{\partial x}, \end{aligned}$$

dove occorre naturalmente pensare x e y come funzioni di ξ ed η . Per la funzione dell'Esempio 2.16 queste formule danno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= e^{-2x} e^x \cos y = e^{-x} \cos y; & \frac{\partial g_1}{\partial \eta}(\xi, \eta) &= -e^{-2x} (-e^x \sin y) = e^{-x} \sin y \\ \frac{\partial g_2}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= -e^{-2x} e^x \sin y = -e^{-x} \sin y; & \frac{\partial g_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) &= e^{-2x} (e^x \cos y) = e^{-x} \cos y. \end{aligned}$$

In particolare notando che $(x, y) = (0, 0)$ corrisponde (localmente) a $(\xi, \eta) = (1, 0)$ abbiamo

$$\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prima di iniziare la dimostrazione del Teorema 2.3, osserviamo che si può provare una forma più debole del teorema del valor medio per funzioni vettoriali.

Sia infatti $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^m$, di classe C^1 . Se il segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}]$ è contenuto in A , applicando il teorema del valor medio a ogni componente di \mathbf{f} , si deduce che, per ogni $j = 1, \dots, n$, esiste θ_j , $0 < \theta_j < 1$, tale che

$$(2.20) \quad f_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x}) = \langle \nabla f_j(\mathbf{x} + \theta_j \mathbf{h}), \mathbf{h} \rangle.$$

Se poniamo $\alpha_j = \max_{[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}]} |\nabla f_j|$, dalla (2.20) e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, otteniamo

$$|f_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x})| \leq |\nabla f_j(\mathbf{x} + \theta_j \mathbf{h})| \cdot |\mathbf{h}| \leq \alpha_j |\mathbf{h}|;$$

infine, se $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} |\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| &= \left(\sum_{j=1}^n (f_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x}))^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 |\mathbf{h}|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \alpha |\mathbf{h}|. \end{aligned}$$

La (2.21) è la generalizzazione (in forma più debole per via della disuguaglianza che vi compare) del teorema del valor medio per funzioni vettoriali.

Dimostrazione del teorema di inversione locale. Poiché si tratta di una dimostrazione piuttosto complessa la eseguiamo in vari passi.

1) Riduzione al caso $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{I}_n$ (matrice identità in \mathbb{R}^n), ovvero, riduzione dell'equazione $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ a un'equazione $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$, con \mathbf{u} e \mathbf{w} in un intorno di $\mathbf{0}$, $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}_n$.

L'equazione $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ è equivalente a

$$(2.22) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0.$$

Poniamo $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{x}_0$ e moltiplichiamo entrambi i membri della (2.22) per l'inversa di $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$; si ottiene l'equazione equivalente

$$(2.23) \quad (\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0))^{-1} [\mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)] = (\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0))^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0).$$

Poniamo ora

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0))^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]$$

e

$$\mathbf{w} = (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0))^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0);$$

la (2.23) si scrive

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}.$$

Si ha: $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, \mathbf{F} soddisfa i) nell'aperto $A_0 = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} + \mathbf{x}_0 \in A\}$ e ii) con $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ e inoltre

$$(2.24) \quad \mathbf{J}_F(\mathbf{0}) = (\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0))^{-1} \cdot \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{I}_n.$$

2) Facciamo vedere che \mathbf{F} è iniettiva in un intorno di $\mathbf{0}$. Poniamo

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in A_0,$$

e sia η , $0 < \eta < 1$. Allora $\phi \in C^1(A_0)$ e $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (= matrice nulla).

Essendo tutte le derivate di ϕ nulle in $\mathbf{0}$ e ivi continue, esiste una palla B_r centrata in $\mathbf{0}$ e di raggio r , tale che, per ogni $j = 1, \dots, n$, $|\nabla \phi_j| < \frac{1}{\sqrt{n}}\eta$.

Dunque, in base alla (2.21) possiamo scrivere, per ogni coppia di punti $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in B_r$:

$$(2.25) \quad |\phi(\mathbf{u}_1) - \phi(\mathbf{u}_2)| \leq \eta|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|.$$

Essendo

$$|\phi(\mathbf{u}_1) - \phi(\mathbf{u}_2)| = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{F}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{F}(\mathbf{u}_2)| \geq |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| - |\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_2)|$$

dalla (2.25) si ricava

$$(2.26) \quad |\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_2)| \geq (1 - \eta)|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|$$

da cui si deduce che $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_2)$ implica $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ e cioè che \mathbf{F} è iniettiva. Si può inoltre scegliere r (eventualmente diminuendolo) in modo che $\mathbf{J}_F(\mathbf{u})$ sia non singolare per ogni $\mathbf{u} \in B_r$.

Si noti inoltre che se \mathbf{G} è l'inversa di $\mathbf{F}|_{B_r}$, posto $\mathbf{w}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{u}_1)$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}_2)$, la (2.26) si può riscrivere nella forma

$$(2.26') \quad |\mathbf{G}(\mathbf{w}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{w}_2)| \leq (1 - \eta)^{-1}|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|$$

che mostra la continuità di \mathbf{G} .

3) Occorre dimostrare ora che $\mathbf{F}(B_r)$ contiene un intorno W dell'origine. La tesi a) del teorema sarà allora verificata con $V = \mathbf{G}(W)$.

Proviamo che come intorno dell'origine si può scegliere B_α con $\alpha = (1 - \eta)\frac{r}{2}$, ovvero la palla di raggio $(1 - \eta)\frac{r}{2}$, dove η è il numero fissato nel passo 2).

Infatti, sia $\mathbf{w} \in B_\alpha$; dobbiamo trovare $\mathbf{u} \in B_r$ tale che $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$. A tale scopo definiamo per ricorrenza la successione seguente:

$$(2.27) \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{w} + \phi(\mathbf{u}_n)$$

e mostriamo che essa è contenuta in B_r , che è di Cauchy e che converge a un punto \mathbf{u} di B_r . Passando poi al limite nella (2.27), essendo ϕ continua, si ha:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \phi(\mathbf{u}) \quad \text{che equivale a} \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}.$$

Procediamo per induzione; evidentemente $\mathbf{u}_0 \in B_r$. Siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in B_r$. Allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$(2.28) \quad |\mathbf{u}_{n+1}| \leq |\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n| + |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}| + \dots + |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0|.$$

Per la (2.25), per ogni $k = 1, \dots, n$, si ha:

$$|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k| = |\phi(\mathbf{u}_k) - \phi(\mathbf{u}_{k-1})| \leq \eta|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}|$$

che, iterata da k fino a 1, dà, essendo $|\mathbf{w}| < (1 - \eta)\frac{r}{2}$,

$$(2.29) \quad |\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k| \leq \eta^k|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0| = \eta^k|\mathbf{w}| < \eta^k(1 - \eta)\frac{r}{2}.$$

Usando la (2.29), dalla (2.28) si ricava

$$(2.30) \quad |\mathbf{u}_{n+1}| \leq (1 - \eta)\frac{r}{2} \sum_{k=0}^n \eta^k = \frac{r}{2}(1 - \eta^{n+1}) < \frac{r}{2}.$$

Perciò anche $\mathbf{u}_{n+1} \in B_r$ e la successione (2.27) è ben definita.

Per vedere che è di Cauchy, dalla (2.29) e dalla disuguaglianza triangolare si ottiene, per $m > n$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_n| &\leq |\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_{m-1}| + \dots + |\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n| \leq (1 - \eta)\frac{r}{2} \sum_{k=n}^m \eta^k = \\ &= \eta^n(1 - \eta)\frac{r}{2} \sum_{k=0}^{m-n} \eta^k = \eta^n(1 - \eta^{m-n+1})\frac{r}{2} < \eta^n\frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Essendo $\eta < 1$, $|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$; di conseguenza $\{\mathbf{u}_n\}$ è di Cauchy ed esiste un punto \mathbf{u} tale che $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$.

Dalla (2.30), poiché $|\mathbf{u}_n| \rightarrow |\mathbf{u}|$, si ottiene che $\mathbf{u} \in \overline{B}_{r/2} \subset B_r$.

4) Rimane da dimostrare che $\mathbf{G} \in C^1(W)$ e che vale la formula (2.18).

Siano \mathbf{w} e $\mathbf{w} + \mathbf{k}$ punti di W ($\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$); poniamo $\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{w})$ e $\mathbf{h} = \mathbf{G}(\mathbf{w} + \mathbf{k}) - \mathbf{G}(\mathbf{w})$. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{h} = \mathbf{G}(\mathbf{w} + \mathbf{k})$, che equivale a $\mathbf{F}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) = \mathbf{w} + \mathbf{k}$ ovvero a $\mathbf{k} = \mathbf{F}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{u})$. Poiché \mathbf{F} è di classe C^1 , si può scrivere

$$\mathbf{k} = \mathbf{J}_F(\mathbf{u})\mathbf{h} + \mathbf{E}(\mathbf{h}) \quad \text{dove} \quad \frac{|\mathbf{E}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Essendo $\mathbf{J}_F(\mathbf{u})$ non singolare per $\mathbf{u} \in B_r$ (vedi punto 1) abbiamo allora:

$$(2.31) \quad \mathbf{G}(\mathbf{w} + \mathbf{k}) - \mathbf{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{h} = (\mathbf{J}_F(\mathbf{u}))^{-1}\mathbf{k} + (\mathbf{J}_F(\mathbf{u}))^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{h}).$$

Ricordiamo ora che, dalla (2.26') si deduce $|\mathbf{h}| \leq (1 - \eta)^{-1}|\mathbf{k}|$ (dunque $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ se $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$); inoltre è facile verificare che

$$(2.32) \quad |(\mathbf{J}_F(\mathbf{u}))^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{h})| \leq nc|\mathbf{E}(\mathbf{h})|$$

dove c è una costante che maggiore in modulo tutti gli elementi della matrice $(\mathbf{J}_F(\mathbf{u}))^{-1}$. Si può allora scrivere:

$$\frac{|(\mathbf{J}_F(\mathbf{u}))^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{k}|} \leq \frac{nc}{1 - \eta} \frac{|\mathbf{E}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Si conclude dalla (2.31) che \mathbf{G} è differenziabile in \mathbf{w} con matrice jacobiana $(\mathbf{J}_F(\mathbf{u}))^{-1}$, dove $\mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{w})$. La (2.18) è quindi dimostrata per \mathbf{G} e con essa il fatto che \mathbf{G} sia di classe $C^1(W)$; è poi facile reinterpretare le conclusioni per \mathbf{f} e la sua inversa \mathbf{g} . \square

Esercizi

1. Scrivere la matrice jacobiana per le seguenti funzioni vettoriali in un punto generico dello spazio.

a) $\mathbf{f}(x, y) = (ye^{x^2}, \sin(x+y))$;

b) $\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{z}{x^2+1}, y-3z, 4x^2+e^y, z^3-x\right)$.

2. Scrivere esplicitamente $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ se $\tilde{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

3. Interpretare geometricamente l'immagine delle seguenti funzioni da $\mathbb{R} \supseteq I$ in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 oppure da $\mathbb{R}^2 \supseteq T$ in \mathbb{R}^3 .

a) $\mathbf{r}(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t)$ $a, b \in \mathbb{R}_+, t \in [0, 2\pi)$;

b) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ $t \in \mathbb{R}$;

c) $\mathbf{r}(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t, kt)$ $a, b \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}$;

d) $\mathbf{r}(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$, $u, v \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$;

e) $\mathbf{r}(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$ $R \in \mathbb{R}_+, (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$;

f) $\mathbf{r}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$, $a, b, c \in \mathbb{R}_+, (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$;

g) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$;

h) $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$.

Per ciascuna di esse, calcolare $\mathbf{r}'(t)$ o $\mathbf{r}_u(u, v)$ e $\mathbf{r}_v(u, v)$.

4. Siano $f: \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$ e $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Se f è derivabile lungo ogni direzione in (x_0, y_0) , diciamo che f "ha la proprietà \mathcal{P} relativamente a (x_0, y_0) " se tutte le tangenti a una sezione del grafico di f con un piano ortogonale al piano $z = 0$ e passante per $(x_0, y_0, 0)$ sono complanari.

Vero o falso:

a) se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ha la proprietà \mathcal{P} relativamente a (x_0, y_0) ;

b) se f ha la proprietà \mathcal{P} relativamente a (x_0, y_0) , f è differenziabile in (x_0, y_0) ;

c)** Se f ha la proprietà \mathcal{P} relativamente a (x_0, y_0) allora vale la formula (1.3): $D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \mathbf{v} \rangle$ per ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

[Suggerimento: Per b) si veda l'Esercizio 11 della Sezione 1.

Per c) si osservi che, se un piano ortogonale al piano $z = 0$ ha per intersezione con quest'ultimo la retta $x = x_0 + tv_1, y = y_0 + tv_2$ dove $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ è un versore, allora il vettore $(v_1, v_2, D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0))$ è tangente alla sezione nel punto (x_0, y_0, z_0) ; se tutti questi vettori giacciono su uno stesso piano per ogni \mathbf{v} , in questo piano due vettori linearmente indipendenti sono dati da $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$ e $(0, 1, f_y(x_0, y_0)) \dots$

5. Sia $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Poniamo $\tilde{f}(\rho, \theta, t) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, t)$ (cambiamento in coordinate cilindriche) e $\bar{f}(\rho, \theta, \psi) = f(\rho \sin \psi \cos \theta, \rho \sin \psi \sin \theta, \rho \cos \psi)$, (cambiamento in coordinate polari).

Esprimere le derivate parziali di \tilde{f} e di \bar{f} in termini delle derivate parziali di f .

6. Verificare che data $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, si ha:

a) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$;

b) $\operatorname{tr} \mathbf{H}_f = \Delta f$ (tr sta per "traccia")⁷.

Utilizzare la b) per dimostrare che, se \mathbf{M} è una matrice ortogonale, posto $\tilde{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{M}\mathbf{x})$ si ha $\Delta \tilde{f}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y_j^2}(\mathbf{y})$ e cioè l'operatore di Laplace ha la stessa forma in qualunque sistema di coordinate ortogonali, ovvero è un invariante per trasformazioni ortogonali nello spazio. (Ricordare la (2.9) e che se \mathbf{M} è non singolare $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}) = \operatorname{tr} \mathbf{N}$.)

7* Dimostrare che, per una funzione f differenziabile in \mathbb{R}^n , ∇f è un invariante per trasformazioni ortogonali nello spazio (ovvero se \mathbf{M} è una matrice ortogonale e $\tilde{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{M}\mathbf{x})$ allora $\nabla \tilde{f}(\mathbf{y}) = (\tilde{f}_{y_1}(\mathbf{y}), \tilde{f}_{y_2}(\mathbf{y}), \dots, \tilde{f}_{y_n}(\mathbf{y}))$).

8* Se $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è differenziabile, dimostrare che divergenza e rotore di \mathbf{f} sono invarianti per trasformazioni ortogonali dello spazio.

9. Sia $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$; posto $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ calcolare $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ e $\operatorname{div} \mathbf{f}$.

10. Sia $f(t) = F(x(t), y(t))$ dove

$$F(x, y) = x^2(y^3 + y - 4) + y(3x^2 + 2x).$$

Calcolare $f'(0)$ e $f''(0)$.

11. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Definiamo la seguente successione per ricorrenza:

$$F_0(x, y) = f(x, y)$$

$$F_n(x, y) = f(F_{n-1}(x, y), F_{n-1}(x, y)) \quad n \geq 1.$$

Dimostrare che

$$\frac{\partial F_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial y} - \frac{\partial F_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial x} = 0$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

12* Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ scalare. Dimostrare che se $f = f(x, t)$ soddisfa l'equazione (della corda vibrante)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (c \in \mathbb{R}_+),$$

allora, posto $\xi = ct - x, \eta = ct + x$, la funzione $\tilde{f}(\xi, \eta) = f\left(\frac{\eta - \xi}{2}, \frac{\eta + \xi}{2c}\right)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Utilizzare l'Esercizio 1.15 per dedurre che una generica soluzione dell'equazione della corda vibrante è della forma

$$f(x, y) = \varphi(ct - x) + \psi(ct + x),$$

con φ e ψ funzioni arbitrarie, di classe $C^2(\mathbb{R})$.

⁷Se \mathbf{M} è una matrice quadrata di ordine n , $\operatorname{tr} \mathbf{M} := \sum_{i=1}^n m_{ii}$.

Interpretare la soluzione trovata come sovrapposizione di due onde progressive, una che si muove con velocità c nella direzione positiva dell'asse x , l'altra con la stessa velocità in direzione opposta.

[Esaminare il comportamento dei grafici delle funzioni φ e ψ considerando t come parametro.]

13.* a) Verificare che per una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ in coordinate polari si ha, per $\rho \neq 0$:

$$\Delta f = \tilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\tilde{f}_{\theta\theta}$$

$$(\tilde{f}(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)).$$

b) Utilizzando la formula in a) dedurre che, se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ in coordinate cilindriche si ha, per $\rho \neq 0$:

$$\Delta f = \tilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\tilde{f}_{\theta\theta} + \tilde{f}_{zz}$$

$$(\tilde{f}(\rho, \theta, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)).$$

c) Ponendo in b) $z = r \cos \psi$, $\rho = r \sin \psi$ ($\psi \in [0, \pi]$), si passa in coordinate polari nello spazio; posto $\bar{f}(r, \theta, \psi) = \tilde{f}(r \sin \psi, \theta, r \cos \psi)$ dedurre, per $\rho \neq 0$, $\psi \neq 0, \pi$, la seguente formula per l'operatore di Laplace in coordinate polari nello spazio:

$$\Delta f = \bar{f}_{rr} + \frac{2}{r}\bar{f}_r + \frac{1}{r^2}\bar{f}_{\psi\psi} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos \psi}{\sin \psi}\bar{f}_{\psi} + \frac{1}{r^2(\sin \psi)^2}\bar{f}_{\theta\theta}.$$

14. Dimostrare che la proprietà di invarianza formale del differenziale primo continua a valere.

15. Stabilire quali tra le seguenti funzioni complesse sono olomorfe nel loro dominio.

- $\operatorname{Re}(z)$;
- $\operatorname{Im}(z)$;
- $|z|$;
- $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ ($a_j \in \mathbb{C}$);
- $\frac{az+b}{cz+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$).

16. Sia f olomorfa in $A \subseteq \mathbb{C}$, A aperto, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Verificare che

- $|f'(z)|^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$;
- $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$.

17. Scrivere le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari.

18. Costruire esempi di funzioni armoniche in aperti del piano.

Verificare che le funzioni $r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta$ ($n \in \mathbb{N}$) sono armoniche in \mathbb{R}^2 ; esse sono dette *armoniche elementari*.

19. Sia $\alpha < 0$ e $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x(x^2 + y^2)^\alpha & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Per quali α f è invertibile in un intorno dell'origine?

20. Verificare l'invertibilità locale per le trasformazioni in coordinate polari nel piano e nello spazio.

21. Dimostrare che $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è localmente invertibile se $f'(z) \neq 0$. Dare la formula per la derivata della funzione inversa.

22. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 ; consideriamo la seguente trasformazione

$$\begin{cases} \xi = f(x) \\ \eta = -y + xf(x). \end{cases}$$

Trovare sotto quali condizioni per f tale trasformazione risulta un diffeomorfismo locale. Calcolare la matrice jacobiana dell'inversa nel punto $(f(0), -1)$.

3. FUNZIONI IMPLICITE

3.1 Esempi preliminari

Se consideriamo una funzione $g: \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$, l'equazione

$$(3.1) \quad g(x, y) = 0$$

individua una relazione in \mathbb{R}^2 ; l'insieme E_0 dei punti del piano che soddisfano la (3.1) costituisce il grafico della relazione stessa. Può succedere che la (3.1) sia "esplicitabile" rispetto a x o rispetto a y o, in altri termini, che sia possibile "risolvere" la (3.1) ricavando y in funzione di x oppure x in funzione di y . In tal caso E_0 coincide, parzialmente o interamente, con il grafico di una funzione della forma $y = f(x)$ oppure $x = h(y)$. Tali funzioni si dicono *definite implicitamente* dalla (3.1).

Per esempio, l'equazione

$$g(x, y) = ax + by + c = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

permette di ricavare $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ oppure $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$. In questo caso E_0 è una retta.

Dall'equazione

$$xe^y - 3y^2 + 1 = 0$$

è possibile ricavare x in funzione di $y: x = e^{-y}(3y^2 - 1)$ ma non viceversa.

Può anche succedere che un'equazione definisca più di una funzione implicita come nel caso

$$(3.2) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

La (3.2), risolta rispetto a y , dà

$$y = +\sqrt{1-x^2} \quad (\text{il cui grafico è il semicerchio superiore})$$

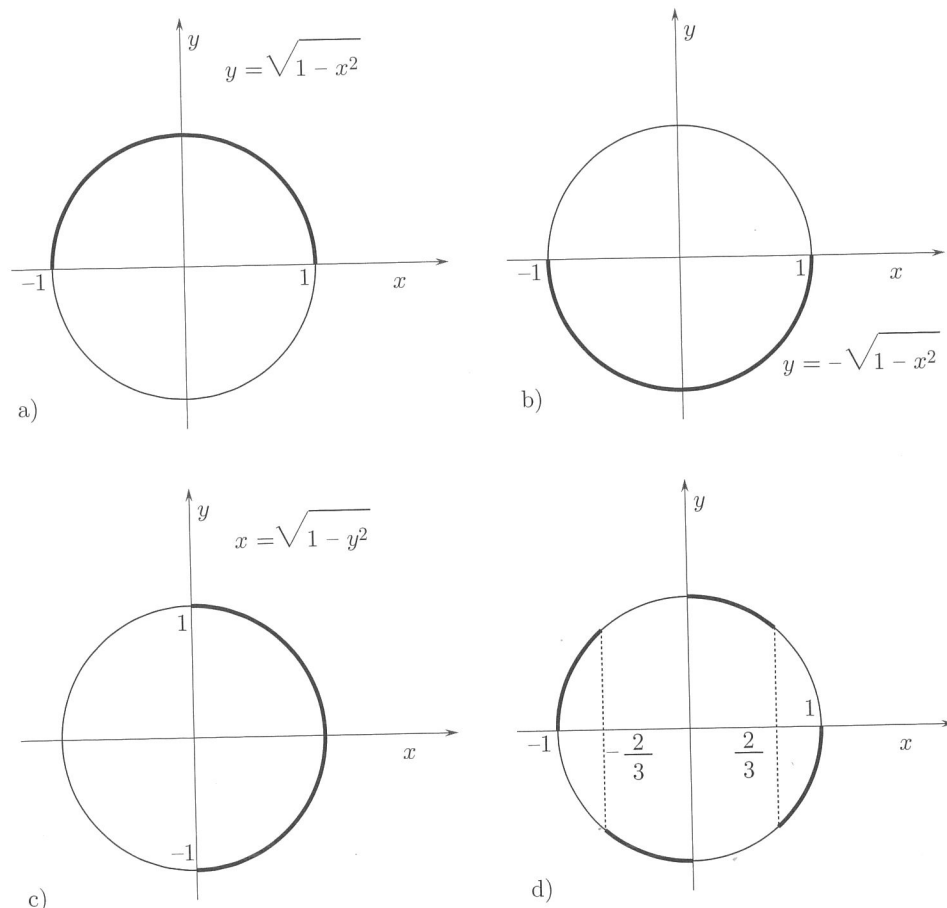


Figura 7.16. Alcune funzioni implicite definite dall'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

e
$$y = -\sqrt{1-x^2} \quad (\text{il cui grafico è il semicerchio inferiore}).$$

In realtà la (3.2) definisce infinite funzioni implicite della forma $y = \varepsilon(x)\sqrt{1-x^2}$ dove $\varepsilon(x)$ è una qualunque funzione definita in $[-1, 1]$ che assume solo i valori $+1$ o -1 . La Figura 7.16d corrisponde a $\varepsilon(x) = +1$ per $x \in [-1, -\frac{2}{3}] \cup [0, \frac{2}{3}]$ e $\varepsilon(x) = -1$ per $x \in (-\frac{2}{3}, 0) \cup (\frac{2}{3}, 1]$.

Se però limitiamo l'interesse a funzioni implicite *continue* allora la scelta si restringe alle due sole funzioni $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Se poi imponiamo il passaggio per un punto, diciamo $(0, -1)$, la scelta diventa unica: $y = -\sqrt{1-x^2}$. Osserviamo subito che in un intorno di un punto x_0 diverso da 0, $+1$ e -1 l'equazione (3.2) è risolvibile sia rispetto a x sia rispetto a y ; non così nell'intorno dei punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$, dove è possibile ricavare y in funzione di x ma non viceversa, e nell'intorno dei punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ dove x è esplicitabile come funzione di y ma non viceversa.

Il fatto che in questi punti la tangente al cerchio unitario sia orizzontale o verticale (rispettivamente) non è casuale, come vedremo in seguito.

Consideriamo ora l'equazione

$$(3.3) \quad g(x, y) = xe^y + ye^x = 0.$$

Nessuna manipolazione permette di esplicitare y in funzione di x o viceversa. D'altra parte $g(0, 0) = 0$, dunque $(0, 0)$ è un punto di E_0 ed è ragionevole porsi il problema se la (3.3), in un intorno di $x = 0$ (o $y = 0$), definisca $y = y(x)$ (o $x = x(y)$).

È naturalmente erroneo pensare che ogni equazione del tipo $g(x, y) = 0$ definisca sempre implicitamente qualche funzione: $x^2 + y^2 = 0$ definisce ... l'origine $(0, 0)$, mentre $x^2 + y^2 + 1 = 0$ non è soddisfatta da alcuna coppia di numeri reali.

La questione che vogliamo affrontare è:

data l'equazione (3.1), trarre conclusioni su esistenza, unicità, regolarità delle funzioni implicite da essa definite, dallo studio della funzione g stessa.

3.2 Il teorema di Dini⁸

Premettiamo la definizione di funzione implicita.

DEFINIZIONE 3.1 Sia $g : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$; la funzione $y = f(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ (risp. $x = h(y)$), $y \in I \subseteq \mathbb{R}$ si dice definita implicitamente dall'equazione $g(x, y) = 0$ se

$$\text{graf}(f) \subset A$$

e

$$g(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I \quad (\text{risp. } g(h(y), y) = 0 \quad \forall y \in I).$$

Il concetto di funzione implicita permette di precisare quello di *funzione algebrica*. Diciamo che f è *algebrica* se f può essere definita implicitamente da un'equazione algebrica, cioè del tipo $g(x, y) = 0$, dove g è un polinomio nelle due variabili x e y . Le funzioni come esponenziali, logaritmi, funzioni iperboliche e circolari, che non soddisfano alcuna equazione algebrica, si dicono *trascendenti*.

Veniamo ora a un importante teorema che dà condizioni sufficienti a garantire esistenza e unicità di una funzione implicita; ci riferiremo, per brevità, solo a funzioni del tipo $y = f(x)$.

■ **TEOREMA 3.1** (di Dini) Sia $g : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che:

- i) g e g_y siano continue in A ;
- ii) nel punto $(x_0, y_0) \in A$ si abbia $g(x_0, y_0) = 0$ e $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora esistono un intorno U di x_0 e un'unica funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, continua in U , tale che $y_0 = f(x_0)$ e che $g(x, f(x)) = 0$ per ogni $x \in U$. Se inoltre

- iii) g_x è continua in A (dunque $g \in C^1(A)$),

allora $f \in C^1(U)$ e vale la formula

$$(3.4) \quad f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))} \quad \forall x \in U.$$

⁸Ulisse Dini, matematico italiano (1845-1918).

Dimostrazione. Possiamo sempre supporre $g_y(x_0, y_0) > 0$. Essendo g_y continua in A , per il teorema della permanenza del segno esiste un rettangolo $W = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ in cui $g_y > 0$. Allora la funzione (della sola y)

$$y \mapsto g(x_0, y), \quad y \in [y_0 - b, y_0 + b]$$

è strettamente crescente e continua; inoltre, poiché $g(x_0, y_0) = 0$, si ha:

$$(3.5) \quad g(x_0, y_0 - b) < 0 \quad \text{e} \quad g(x_0, y_0 + b) > 0.$$

Consideriamo ora le funzioni (della sola x):

$$x \mapsto g(x, y_0 - b) \quad \text{e} \quad x \mapsto g(x, y_0 + b),$$

continue in $[x_0 - a, x_0 + a]$. Per le (3.5) e il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di x_0 , $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in cui, simultaneamente

$$g(x, y_0 - b) < 0 \quad \text{e} \quad g(x, y_0 + b) > 0.$$

Se ora fissiamo $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la funzione (della sola y)

$$y \mapsto g(\bar{x}, y)$$

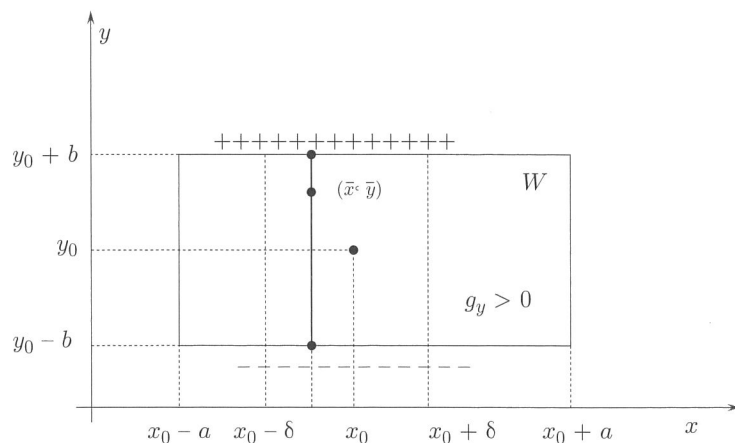


Figura 7.17. Costruzione della funzione implicita.

è continua in $[y_0 - b, y_0 + b]$ e passa da un valore negativo, per $y = y_0 - b$, a uno positivo, per $y = y_0 + b$. Esiste perciò, in base al teorema degli zeri, un *unico* $\bar{y} \in (y_0 - b, y_0 + b)$ tale che $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Si determina così per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ un unico valore $y = f(x) \in (y_0 - b, y_0 + b)$ tale che $g(x, f(x)) = 0$; chiaramente si ha $y_0 = f(x_0)$.

Per completare la prima parte del teorema occorre mostrare che f è continua in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. A tale scopo sia $\varepsilon, 0 < \varepsilon < b$. Se ripetiamo il ragionamento appena fatto con ε al posto di b troviamo un intorno $(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ e una funzione f^* tale che $y_0 = f^*(x_0)$, $g(x, f^*(x)) = 0$ in $(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ e che $y_0 - \varepsilon < f^*(x) < y_0 + \varepsilon$ nello stesso insieme.

Poiché, per unicità, $f^* = f$ in $(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$, ne segue la continuità di f in x_0 . Per gli altri punti $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è sufficiente osservare che $g_y(\bar{x}, y(\bar{x})) > 0$; si può quindi ragionare per $(\bar{x}, y(\bar{x}))$ come è stato fatto per (x_0, y_0) .

Per quanto riguarda la seconda parte del teorema, osserviamo che, per la formula del valor medio, si può scrivere, per ogni $(x, y) \in W, (\bar{x}, \bar{y}) \in W$:

$$(3.6) \quad g(x, y) - g(\bar{x}, \bar{y}) = g_x(\xi, \eta)(x - \bar{x}) + g_y(\xi, \eta)(y - \bar{y}),$$

dove (ξ, η) è un punto opportuno sul segmento congiungente (x, y) con (\bar{x}, \bar{y}) , in particolare $(\xi, \eta) \in W$.

Se ora $\bar{y} = f(\bar{x})$ e $y = f(x)$ abbiamo $g(x, f(x)) = g(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$; inoltre

$$g_y(\xi, \eta) \geq \min_W g_y = m > 0.$$

Dalla (3.6) si ottiene allora

$$(3.7) \quad \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = -\frac{g_x(\xi, \eta)}{g_y(\xi, \eta)}.$$

Facendo tendere x a \bar{x} , per la continuità di $f, f(x) \rightarrow f(\bar{x})$, che implica $(\xi, \eta) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$. Usando la continuità di g_x e g_y , dalla (3.7), passando al limite per $x \rightarrow \bar{x}$, si deduce

$$f'(\bar{x}) = -\frac{g_x(\bar{x}, \bar{y})}{g_y(\bar{x}, \bar{y})}$$

che è la (3.4). Da questa stessa formula e dal teorema di continuità delle funzioni composte segue che f' è continua in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. □

Nel Teorema 3.8, presentato più avanti, rientra come caso particolare il Teorema 3.1 e perciò avremmo potuto evitare di presentare la dimostrazione di quest'ultimo; l'abbiamo inserita ugualmente poiché fa uso di una tecnica elementare che riteniamo istruttiva.

La formula (3.4) permette di scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione implicita nel punto (x_0, y_0) . Si ha:

$$y = y_0 - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

Disponendo di ulteriore regolarità per g si possono calcolare derivate di f di ordine superiore nel punto x_0 . Se, in aggiunta alle ipotesi del Teorema 3.1, supponiamo che $g \in C^2(A)$, dalla (3.4) e dal teorema di derivazione delle funzioni composte, deduciamo che, essendo g_x, g_y ed f di classe C^1 , anche f' è di classe C^1 ; una formula per f'' si ottiene derivando il secondo membro della (3.4):

$$f'' = -\frac{[g_{xx} + g_{xy}f']g_y - g_x[g_{yx} + g_{yy}f']}{(g_y)^2}$$

e, tenendo conto che $f' = -g_x/g_y$ e $g_{xy} = g_{yx}$:

$$(3.8) \quad f'' = -\frac{g_{xx}(g_y)^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}(g_x)^2}{(g_y)^3} = -\frac{g_{xx} + 2g_{xy}f' + g_{yy}(f')^2}{g_y}.$$

Con identico ragionamento si deduce che se $g \in C^k(A)$, allora $f \in C^k(U)$, se $g \in C^\infty(A)$ allora $f \in C^\infty(U)$. Si possono poi calcolare le derivate successive, per ottenere approssimazioni di Taylor dell'ordine desiderato, così come è stato indicato per f'' .

Da un punto di vista pratico a volte conviene procedere derivando direttamente l'equazione.

Infatti, se pensiamo $y = f(x)$, l'equazione $g(x, y) = 0$ è una identità per $x \in U$; si può allora derivare rispetto a x ottenendo

$$g_x + g_y y' = 0$$

da cui la formula (3.4). Derivando ulteriormente:

$$g_{xx} + 2g_{xy}y' + g_{yy}(y')^2 + g_y y'' = 0$$

e tenendo conto che $y' = -g_x/g_y$ si ritrova la formula (3.8) per la derivata seconda di f . Un'altra derivazione permetterebbe di ottenere una formula per y''' e così via per le derivate di ordine superiore.

Esempio 3.1 Sia $g(x, y) = xe^y + ye^x = 0$. Tutte le ipotesi del teorema sono soddisfatte se $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Infatti $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $g(0, 0) = 0$, $g_y(0, 0) = 1$. Ne segue che in un intorno di $x_0 = 0$, $g(x, y) = 0$ definisce una funzione $y = f(x)$ di classe C^∞ . Dalla (3.4),

$$f'(x) = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$$

e quindi $f'(0) = -1$. Essendo $f(0) = 0$ la tangente al grafico di f in $(0, 0)$ è $y = -x$.

Alternativamente, si può derivare l'equazione rispetto a x ; si ha:

$$(xy' + 1)e^y + (y' + y)e^x = 0$$

e, ponendo $x = 0$, $y = 0$, si riottiene $y'(0) = -1$.

Derivando un'altra volta abbiamo:

$$(xy'^2 + 2y' + xy'')e^y + (y + 2y' + y'')e^x = 0,$$

da cui, sostituendo $x = 0$, $y = 0$, $y' = -1$, si deduce $y''(0) = 4$.

Calcoliamo anche la derivata terza mediante un'altra derivazione:

$$(xy'^3 + 3y'^2 + 3xy'y'' + 3y'' + xy''')e^y + (y + 3y' + 3y'' + y''')e^x = 0;$$

sostituendo $x = 0$, $y = 0$, $y' = -1$ e $y'' = 4$ si ricava $y'''(0) = -24$.

Possiamo ora scrivere la formula di Mac Laurin arrestata al 3° ordine per la funzione implicita $y = f(x)$:

$$f(x) = -x + 2x^2 - 4x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

I ruoli di x e y nel Teorema 3.1 sono intercambiabili. Se $g_y(x_0, y_0) = 0$ ma $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ esiste un intorno V di y_0 in cui è definita implicitamente da $g(x, y) = 0$ una funzione $x = h(y)$; la formula (3.4) diventa

$$h'(y) = -\frac{g_y(h(y), y)}{g_x(h(y), y)}.$$

Restano esclusi dalle precedenti considerazioni i punti in cui $\nabla g = \mathbf{0}$. Questi punti si chiamano *singolari* o *critici*. L'analisi in un intorno di un punto singolare isolato,

almeno nei suoi aspetti più elementari, è contenuta nel prossimo paragrafo. Essa fa intervenire in modo naturale la funzione $z = g(x, y)$; se (x_0, y_0) è un punto singolare in cui g è differenziabile, il piano tangente al grafico di $z = g(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ è orizzontale (essendo $\nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$) e, essendo $g(x_0, y_0) = 0$, coincide col piano $z = 0$.

Si osservi che la condizione $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ si presenta geometricamente come una *condizione di trasversalità* di tale piano tangente rispetto al piano $z = 0$.

3.3 Insiemi di livello. Punti singolari

L'insieme E_0 dei punti del piano in cui $g(x, y) = 0$ può essere interpretato geometricamente come l'intersezione del grafico di $z = g(x, y)$ con il piano $z = 0$. Più in generale, per $c \in \mathbb{R}$, possiamo introdurre l'insieme E_c , proiezione sul piano $z = 0$ dell'insieme ottenuto intersecando il grafico di $z = g(x, y)$ con il piano $z = c$. Tale insieme si chiama *insieme di livello* di g (Fig. 7.18).

Tutto ciò che è stato detto per l'equazione $g(x, y) = 0$ si trasferisce naturalmente all'equazione $g(x, y) = c$, poiché g e $g - c$ hanno le stesse proprietà.

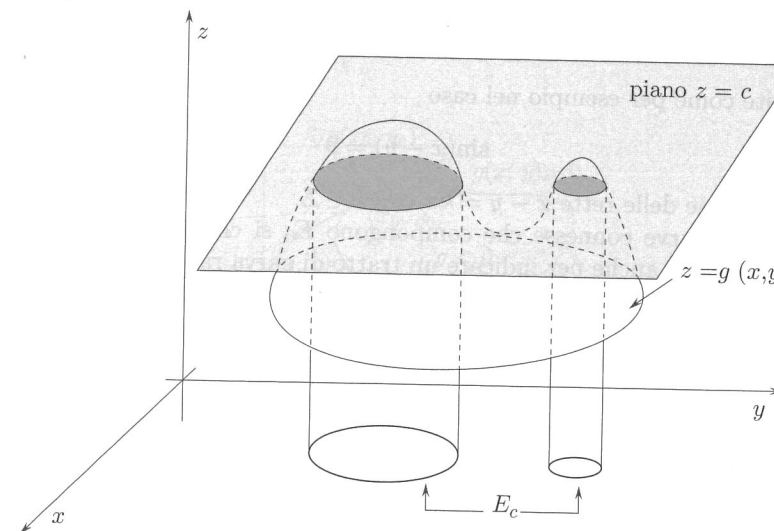


Figura 7.18. Insiemi di livello.

Senza ipotesi su g , E_c può essere un qualunque insieme del piano, "selvaggio" fin che si vuole. Infatti se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e g è la funzione caratteristica di A , allora $E_1 = A$.

Dal Teorema 3.1, se g è di classe C^1 nell'intorno di un punto (x_0, y_0) regolare, cioè tale che $g(x_0, y_0) = c$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, allora E_c è rappresentabile localmente come grafico di una funzione. Se quindi $\nabla g \neq \mathbf{0}$ in ogni punto di E_c , tranne che eventualmente in un numero finito di punti isolati, è ragionevole chiamare E_c *curva* o *linea piana*; in tal caso parleremo di curve o *linee di livello* di g .

Come conseguenza della continuità di g , E_c risulta un insieme chiuso (in \mathbb{R}^2) per ogni $c \in \mathbb{R}$; in generale non sarà connesso ma unione di curve connesse (Fig. 7.18),

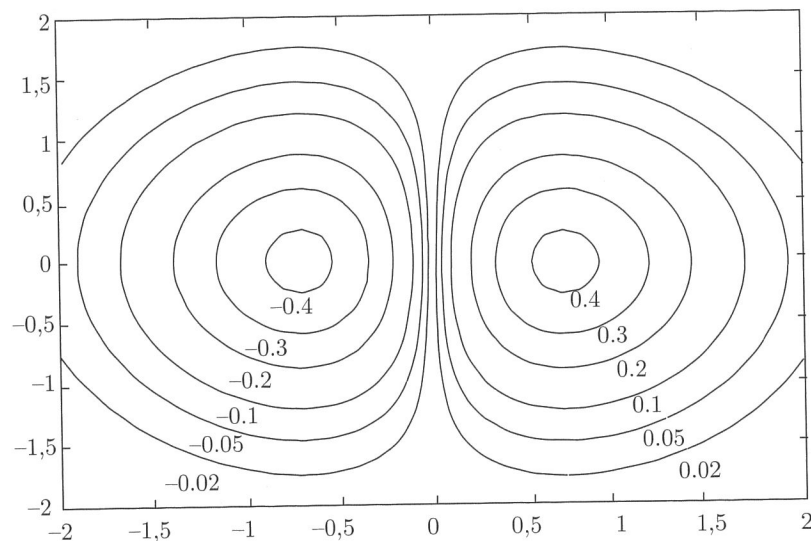


Figura 7.19. Linee di livello di $z = x \exp(x^2 - y^2)$.

anche infinite come per esempio nel caso

$$\sin(x - y) = 0$$

in cui E_0 è unione delle rette $x - y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ognuna delle curve connesse che compongono E_0 si chiama *ramo* della curva; il termine ramo si usa anche per indicare un tratto di curva rappresentabile localmente come grafico di una funzione. Per esempio i grafici di $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $x = -\sqrt{1 - y^2}$ sono *rami* della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

Se $g(x, y)$ è un polinomio di grado m in x e y , la curva definita da $g(x, y) = 0$ si dice *algebraica* di grado m .

I più noti esempi studiati fin dall'antichità di curve algebriche sono le (sezioni) coniche⁹: ellissi, parabole, iperboli. Sono curve di secondo grado la cui equazione generale è

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Mediante un'opportuna rototraslazione, nei casi non degeneri, si può ricondurre l'equazione a una delle forme canoniche seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{ellisse di semiassi } a \text{ e } b. \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{iperbole di asintoti } y = \pm \frac{b}{a}x. \\ y &= ax^2 && \text{parabola con fuoco } F\left(0, \frac{1}{4a}\right). \end{aligned}$$

⁹Come scopritore delle coniche si ritiene generalmente Menecmo (~ 350 a.C.) discepolo di Platone ed Eudosso.

Altre curve algebriche sono le seguenti, che studieremo in qualche dettaglio più avanti

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad (\text{lemniscata di Bernoulli})$$

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (\text{folium di Cartesio})$$

$$x(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0 \quad (\text{cissoide di Diocle}).$$

Ritornando alle curve di livello E_c di una funzione g di classe C^1 , osserviamo che la formula (3.4), che assegna il coefficiente angolare della retta tangente a E_c in un punto *non* singolare, ha una notevole conseguenza.

Scrivendo l'equazione della tangente nella forma

$$(3.9) \quad (x - x_0)g_x(x_0, y_0) + (y - y_0)g_y(x_0, y_0) = 0$$

si vede che il vettore $\nabla g(x_0, y_0)$ è ortogonale a essa. Infatti la (3.9) esprime l'annullarsi del prodotto scalare tra il vettore $\nabla g(x_0, y_0)$ e il vettore $(x - x_0, y - y_0)$, diretto lungo la tangente (cfr. Fig. 7.20).

Poiché abbiamo visto che la direzione di ∇g è quella di massima crescita per g otteniamo la conclusione seguente.

PROPOSIZIONE 3.2 Sia $g \in C^1(A)$, A aperto in \mathbb{R}^2 . Se E_c è privo di punti singolari, in ogni punto di E_c la tangente è ortogonale alla direzione di massima crescita di g in quel punto.

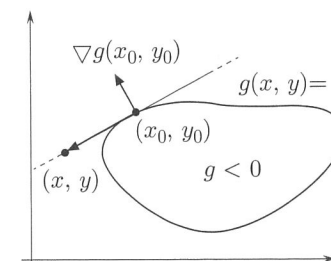


Figura 7.20. Ortogonalità del gradiente a una linea di livello, in un suo punto regolare.

La famiglia delle curve di livello interviene in svariate situazioni concrete. Per esempio i topografi usano le linee altimetriche (le cosiddette *isoipse* o curve di quota costante) per descrivere l'andamento dei pendii. In una regione (piana) sede di un campo di temperatura, le linee di livello costituiscono le *isoterme* o curve i cui punti sono alla stessa temperatura. La Proposizione 3.2 indica che il *flusso di calore* che segue le linee di massima crescita della temperatura, è normale alle *isoterme*. Si dice allora che linee di flusso e linee di livello costituiscono una famiglia di *traiettorie ortogonali*.

Veniamo ora all'analisi del comportamento di una curva $g(x, y) = 0$ nell'intorno di un suo punto singolare (x_0, y_0) . Assumeremo che nell'intorno in questione g sia di classe C^2 e, per il momento, che in (x_0, y_0) *non* tutte le derivate seconde di g siano nulle.

Una prima idea è quella di studiare le intersezioni del fascio di rette di centro in (x_0, y_0) con la curva, in un intorno di (x_0, y_0) . Scriviamo la generica retta del fascio nella forma

$$(3.10) \quad x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt$$

dove a e b sono i coseni direttori: $a^2 + b^2 = 1$.

Usando la formula di Taylor arrestata al secondo ordine, con centro in (x_0, y_0) , possiamo scrivere l'equazione $g(x, y) = 0$ nel modo seguente, ricordando che $\nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$:

$$g_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)g_{xy}(x_0, y_0) + g_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + o(\rho^2) = 0$$

per $\rho \rightarrow 0$, dove $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Sostituendo in questa equazione la (3.10) otteniamo:

$$(3.11) \quad t^2 \{a^2 g_{xx}(x_0, y_0) + 2abg_{xy}(x_0, y_0) + b^2 g_{yy}(x_0, y_0) + o(1)\} = 0$$

per $t \rightarrow 0$.

Una prima soluzione è $t = 0$ che corrisponde al punto (x_0, y_0) .

È importante notare che questa è una soluzione *doppia* della (3.11), poiché al primo membro compare il fattore t^2 . Per questa ragione il punto (x_0, y_0) si chiama anche *punto doppio*.

Rimuovendo il fattore t^2 dalla (3.11), l'equazione rimanente è, per $t \rightarrow 0$,

$$(3.12) \quad a^2 g_{xx}(x_0, y_0) + 2abg_{xy}(x_0, y_0) + b^2 g_{yy}(x_0, y_0) + o(1) = 0.$$

Ci chiediamo ora se è possibile che la retta (3.10) intersechi la curva in qualche altro punto (x, y) che tenda a (x_0, y_0) quando la retta stessa tenda ad assumere una particolare posizione limite "tangente", per esempio come illustrato nella Figura 7.21.

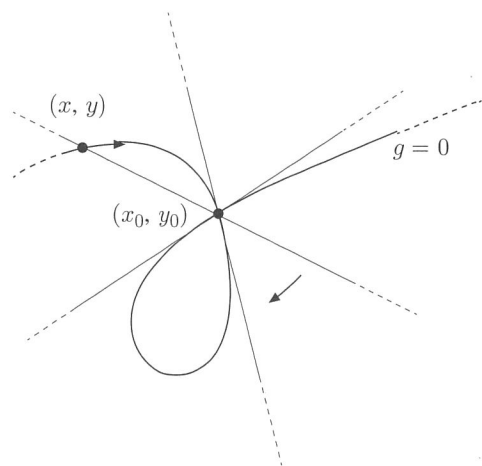


Figura 7.21. Tangenti in un punto doppio.

A questo scopo osserviamo che se $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ anche $t \rightarrow 0$ e dalla (3.12) si deduce allora che per la posizione limite della retta si deve avere:

$$(3.13) \quad a^2 g_{xx}(x_0, y_0) + 2abg_{xy}(x_0, y_0) + b^2 g_{yy}(x_0, y_0) = 0.$$

La (3.13) è un'equazione di secondo grado per il rapporto a/b o b/a che fissa la direzione della retta limite.

La discussione dipende ora dal segno dell'espressione

$$H(x_0, y_0) = g_{xx}(x_0, y_0)g_{yy}(x_0, y_0) - g_{xy}(x_0, y_0)^2$$

che, peraltro, coincide con il determinante di $\mathbf{H}_g(x_0, y_0)$, la matrice hessiana di g nel punto (x_0, y_0) .

Distinguiamo 3 casi

CASO 1: $H(x_0, y_0) > 0$.

La (3.13) non ha soluzioni reali, dunque non esistono tangenti (reali). Il punto (x_0, y_0) si dice allora punto *singolare isolato* della curva $g = 0$.

È il caso dell'equazione, già considerata nella Sezione 1,

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{oppure dell'equazione} \quad (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 - 2 = 0$$

dove $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

La situazione nel Caso 1 può essere interpretata facilmente in termini di convessità (concavità) di g nell'intorno di (x_0, y_0) . Osserviamo infatti che $g_{xx}(x_0, y_0)$ e $g_{yy}(x_0, y_0)$ non sono entrambe nulle; per fissare le idee sia $g_{yy}(x_0, y_0) > 0$. Poiché g è di classe C^2 , per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di (x_0, y_0) , diciamo W , in cui $H > 0$ e $g_{yy} > 0$.

In tale intorno, allora, g è strettamente convessa e perciò il suo grafico ha come unica intersezione col piano tangente nel punto $(x_0, y_0, 0)$, ovvero il piano $z = 0$, il punto stesso, che risulta di conseguenza un punto singolare isolato della linea di livello E_0 . Si dice anche che (x_0, y_0) è un *punto ellittico* per $z = g(x, y)$.

CASO 2: $H(x_0, y_0) < 0$.

La (3.13) individua due rette reali e distinte. In effetti queste due rette sono tangenti a due *rami* della curva che si incrociano nel punto (x_0, y_0) . Più precisamente si può dimostrare il seguente teorema:

■ **TEOREMA 3.3** *Se $H(x_0, y_0) < 0$, in un intorno di (x_0, y_0) la curva $g(x, y) = 0$ è unione dei grafici di due funzioni $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ di classe C^1 (in un intorno di x_0), intersecantisi in (x_0, y_0) e aventi come tangenti in questo punto le rette individuate dalla (3.13).*

In questo caso (x_0, y_0) si chiama *punto doppio ordinario* o *nodo*.

In relazione al grafico di $z = g(x, y)$ il punto (x_0, y_0) si chiama *punto iperbolico*: il piano tangente $z = 0$ attraversa il grafico e lo interseca nell'intorno di (x_0, y_0) lungo le due curve

$$y = f_1(x) \quad \text{e} \quad y = f_2(x).$$

Esempi

3.2 Il prototipo di nodo è l'origine per la conica degenera $x^2 - y^2 = 0$ che si riduce alle due rette $y = \pm x$.

3.3 La *Lemniscata di Bernoulli*,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad (a \neq 0)$$

ha nell'origine ($H(0,0) = -1$) un nodo con tangenti $y = \pm x$. Per $a = 2\sqrt{2}$ la curva è disegnata in Figura 7.22.

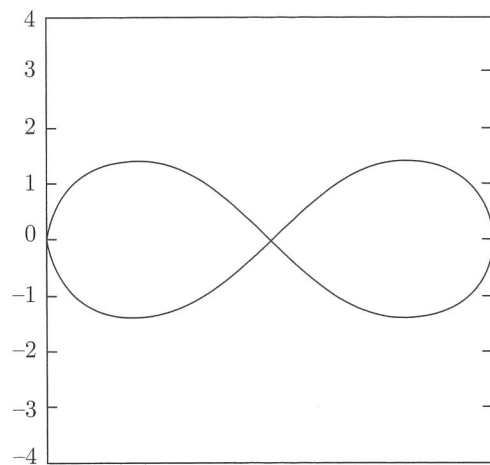


Figura 7.22. Lemniscata di Bernoulli per $a = 2\sqrt{2}$.

3.4 Il Folium di Cartesio;

$$x^3 + y^2 - 3axy = 0 \quad (a \neq 0)$$

ha nell'origine ($H(0,0) = -9a^2$) un nodo con tangenti coincidenti con gli assi coordinati. Per $a = 1$ la curva è disegnata in Figura 7.23.

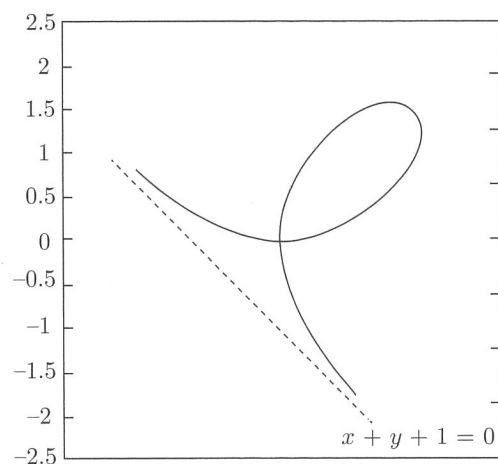


Figura 7.23. Folium di Cartesio per $a = 1$.

Dimostrazione del Teorema 3.3. In base ai calcoli nell'Esempio 2.11 pag. 346, con una trasformazione ortogonale di coordinate ci si può sempre ricondurre al caso in cui $g_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$; sia $g_{yy}(x_0, y_0) > 0$ (il caso opposto è analogo). Facciamo vedere che esistono le due funzioni $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$. Osserviamo innanzitutto che, essendo g_{yy} continua, per il teorema della permanenza del segno, esiste un rettangolo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ in cui $g_{yy} > 0$ e $H(x, y) < 0$. Ciò implica subito che le sezioni $z = g(\bar{x}, y)$ con $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sono strettamente convesse in $[y_0 - b, y_0 + b]$. La strategia consisterà ora nel dimostrare che per x vicino a x_0 , $x \neq x_0$, queste sezioni hanno un minimo negativo in un punto $y = \varphi(x)$, mentre agli estremi $y = y_0 - b$, $y = y_0 + b$ assumono valore positivo. Dividiamo la dimostrazione in 3 passi:

- Consideriamo la sezione $z = g(x_0, y)$; poiché $g(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = 0$ tale sezione assume valore minimo (zero) in $y = y_0$ ed è positiva in $y = y_0 + b$ e $y = y_0 - b$. Per il teorema della permanenza del segno, esiste $\eta \leq \delta$ tale che $g(x, y_0 - b) > 0$ e $g(x, y_0 + b) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$.
- Consideriamo ora una sezione $z = g(\bar{x}, y)$ per $\bar{x} \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$. Essendo $g_{yy}(\bar{x}, y) > 0$, per il Teorema 3.1, l'equazione $g_y(\bar{x}, y) = 0$ definisce implicitamente $y = \varphi(\bar{x})$ per ogni \bar{x} in un intorno di x_0 , che possiamo chiamare ancora $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$. Il punto $y = \varphi(\bar{x})$ è dunque un punto stazionario per $z = g(\bar{x}, y)$, strettamente convessa, e pertanto risulta un punto di minimo. Sempre in conseguenza del Teorema 3.1 risulta che, se $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, $\varphi(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$, che φ è di classe C^1 e che vale la formula:

$$(3.14) \quad \varphi'(x) = -\frac{g_{yx}(x, \varphi(x))}{g_{yy}(x, \varphi(x))}.$$

Chiamiamo $y = \varphi(x)$ *linea dei minimi*. Osserviamo che $y_0 = \varphi(x_0)$ e che $H(x, \varphi(x)) < 0$ in $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$.

- Studiamo ora la funzione $\Psi(x) = g(x, \varphi(x))$ (= quota assunta da g sulla linea dei minimi). Abbiamo $\Psi(x_0) = g(x_0, y_0) = 0$; inoltre:

$$\Psi'(x) = g_x(x, \varphi(x)) + g_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = g_x(x, \varphi(x))$$

essendo $g_y(x, \varphi(x)) = 0$, e quindi $\Psi'(x_0) = g_x(x_0, y_0) = 0$; usando poi la (3.14) e ricordando che $H(x, \varphi(x)) < 0$:

$$\Psi''(x) = g_{xx}(x, \varphi(x)) + g_{yx}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = H(x, \varphi(x))/g_{yy}(x, \varphi(x)) < 0.$$

Concludiamo che Ψ è concava strettamente e ha un massimo in $x = x_0$ dove vale zero. Dunque $\Psi(x) < 0$ se $x \neq x_0$. La situazione è quella illustrata in Figura 7.24.

Si vede che, per ogni $\bar{x} \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ esistono esattamente due zeri di $g(\bar{x}, y)$ in corrispondenza ai punti $y_1(\bar{x})$, $y_2(\bar{x})$ con $y_1(\bar{x}) < \varphi(\bar{x}) < y_2(\bar{x})$. Al variare di x in $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ i punti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ descrivono i due rami richiesti. La costruzione stessa (come nel Teorema 3.1) indica che y_1 e y_2 sono continue. L'ultima parte della dimostrazione consiste nel rendere più rigoroso il ragionamento che ha condotto alla (3.13). Omettiamo i dettagli. \square

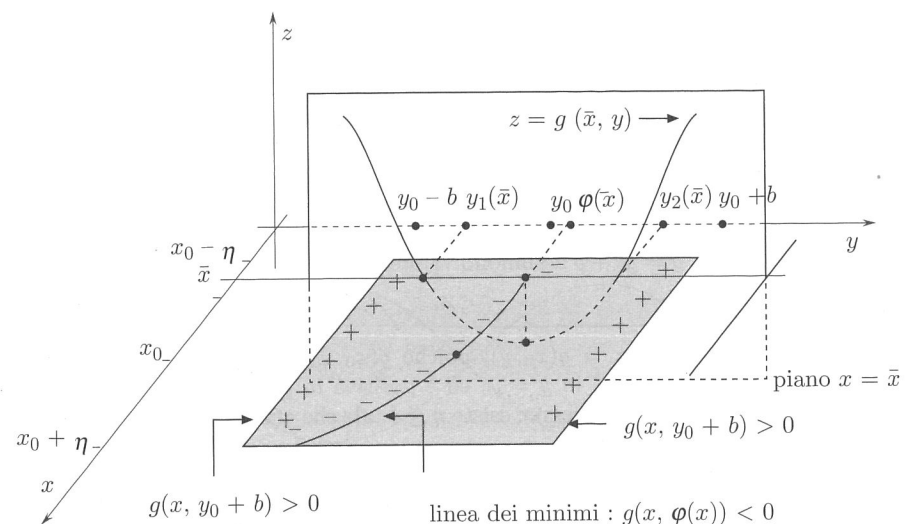


Figura 7.24. Dimostrazione del Teorema 3.3

CASO 3: $H(x_0, y_0) = 0$.

La (3.13) individua due rette coincidenti. Per la corretta analisi di questo caso occorre far intervenire le derivate di g di ordine superiore al secondo¹⁰. Ci limitiamo a indicare con esempi le possibili situazioni.

In questo caso il punto (x_0, y_0) si dice *parabolico* per la funzione $z = g(x, y)$.

Esempi

3.5 Sia $g(x, y) = (x + y)^2 = 0$. Allora $H(0, 0) = 0$ e la curva stessa si riduce a due rette sovrapposte di equazione $y = -x$.

3.6 Sia $g(x, y) = x(x^2 + y^2) - 2ry^2 = 0 \quad r \neq 0$.

Per questa curva algebrica, che si chiama *Cissoide di Diocle*, abbiamo $H(0, 0) = 0$. L'unica tangente (contata due volte) nell'origine è $y = 0$.

In questo caso l'origine si chiama *cuspid*. Per $r = 1$ la curva è disegnata in Figura 7.25. Altri tipi di cuspidi si presentano nei casi seguenti

$$y^2 - x^4 = (y - x^2)(y + x^2)$$

$$y^2 - 3x^2y + 2x^4 = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Se tutte le derivate di g del secondo ordine sono uguali a zero in (x_0, y_0) , ovvero se $d^2g(x_0, y_0) = 0$, l'analisi diventa molto più complicata. Ci limitiamo a osservare che in (x_0, y_0) possono incrociarsi più rami della curva dando origine a singolarità di vario tipo.

¹⁰L'analisi procede come nel caso $H(x_0, y_0) < 0$ fino al punto c) nella dimostrazione del Teorema 3.3. A quel punto si otterrebbe $\Psi'(x_0) = \Psi''(x_0) = 0$. Per avere informazioni sull'andamento di Ψ occorre quindi calcolare, per esempio, la prima derivata di Ψ che non si annulla in x_0 .

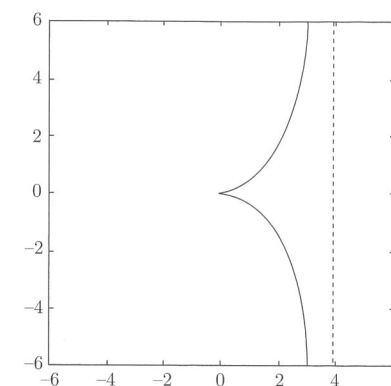


Figura 7.25. Cissoide di Diocle per $r = 1$.

Esempi

3.7 La curva algebrica di equazione

$$(x^2 + y^2)^2 - y(y^2 - x^2) = 0$$

ha nell'origine un punto triplo. Intersecando con il fascio di rette con centro in $(0, 0)$, con un ragionamento simile a quello che ha portato alla (3.13) si ricava che le tangenti ai rami della curva si ottengono uguagliando a zero l'insieme dei termini di grado inferiore: $y(x^2 - y^2) = 0$; da cui $y = 0$ e $y = \pm x$. L'origine si chiama *doppio nodo* (Fig. 7.26).

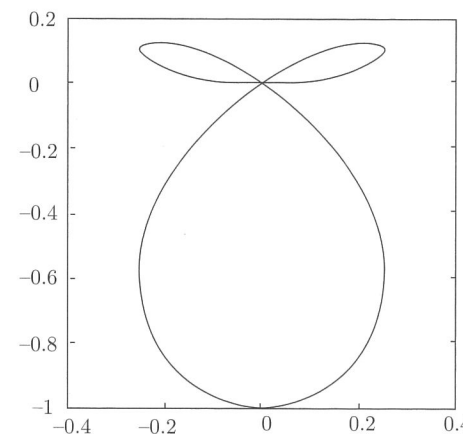


Figura 7.26. La curva algebrica $(x^2 + y^2)^2 - y(y^2 - x^2) = 0$.

3.8 La curva algebrica di equazione

$$(x^2 + y^2)^2 - 3xy^2 = 0$$

ha nell'origine un punto triplo. Le tangenti sono $x = 0$ e $y = 0$ (contata 2 volte). La curva è disegnata in Figura 7.27.

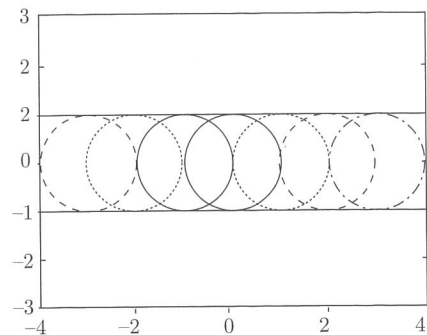


Figura 7.28. Famiglia di cerchi con involuppo.

Risolviendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(1-c)^2} - 1 = 0 \\ -\frac{2x^2}{c^3} + \frac{2y^2}{(1-c)^3} = 0 \end{cases}$$

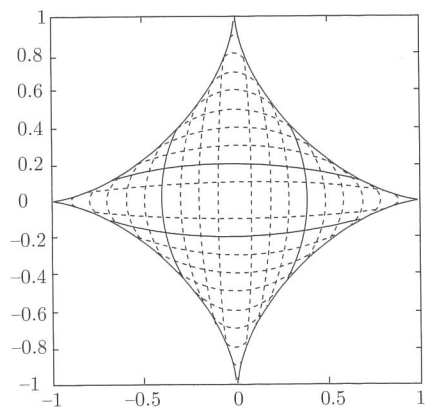


Figura 7.29. Astroide come involuppo di ellissi.

si trova $y = (1 - c)^{3/2}$ e $x = c^{3/2}$ ovvero

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Questa curva si chiama *astroide* (vedi Fig. 7.29); si noti la presenza di cuspidi nei punti $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$.

3.11 Sia $\Psi(x, y, c) = [y^2 + (x - c)^2](y - 2) + y = 0$ (famiglia di *strofoidi*). Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} [y^2 + (x - c)^2](y - 2) + y = 0 \\ 2(x - c)(y - 2) = 0 \end{cases}$$

si ottiene $y^2(y - 2) + y = y(y - 1)^2 = 0$ ovvero le due rette $y = 0$ e $y = 1$ (contata due volte).

La retta $y = 0$ è l'involuppo, $y = 1$ è il luogo dei punti singolari (nodi) della famiglia (cfr. Fig. 7.30).

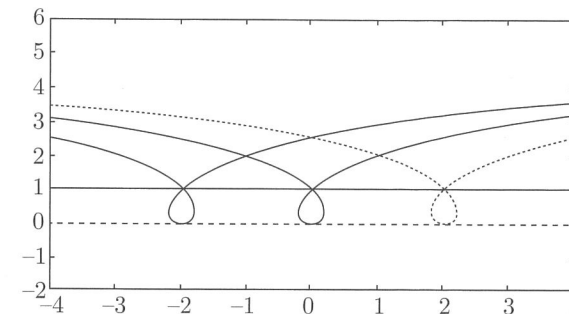


Figura 7.30. Strofoidi con involuppo e luogo di nodi.

3.12 Sia $\Psi(x, y, c) = (x - c)^2 - y^3 = 0$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x - c)^2 - y^3 = 0 \\ 2(x - c) = 0 \end{cases}$$

si trova $y = 0$, che non è involuppo bensì luogo di cuspidi della famiglia (Fig. 7.31).

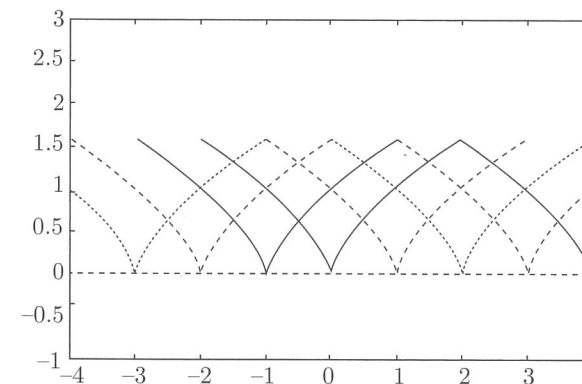


Figura 7.31. Famiglia di cubiche con luogo di cuspidi.

3.5 Il teorema delle funzioni implicite in più di due variabili

Il Teorema 3.1 può essere esteso al caso di funzioni di n variabili nel modo seguente. Per i punti $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, privilegiamo una variabile, per esempio l'ultima, ponendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_{n+1} = y$.

■ **TEOREMA 3.5** (di Dini). Sia $g : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto. Supponiamo che

- i) g e g_y siano continue in A ;
- ii) nel punto $(\mathbf{x}^0, y_0) \in A$ si abbia $g(\mathbf{x}^0, y_0) = 0$ e $g_y(\mathbf{x}^0, y_0) \neq 0$.

Allora esistono un intorno U di \mathbf{x}^0 e un'unica funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, continua in U , tale che $f(\mathbf{x}^0) = y_0$ e che $g(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$ per ogni $x \in U$.

Se inoltre

iii) $g_{x_1}, g_{x_2}, \dots, g_{x_n}$ sono continue in A (dunque $g \in C^1(A)$) allora $f \in C^1(U)$ e vale la formula

$$(3.21) \quad f_{x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{g_{x_j}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{g_y(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))} \quad \forall \mathbf{x} \in U, \forall j = 1, \dots, n.$$

La funzione f si dice definita implicitamente dall'equazione $g(\mathbf{x}, y) = 0$.

Omettiamo la dimostrazione del Teorema 3.5 poiché si può condurre sulla falsariga di quella del Teorema 3.1, con ovvi cambiamenti dovuti alla dimensione superiore; inoltre, anche il Teorema 3.5 è un caso particolare del Teorema 3.8.

Il Teorema 3.5 afferma che, se $g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) = 0$ e se $g_y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) \neq 0$ allora l'equazione

$$(3.22) \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$$

permette di esprimere y in funzione di x_1, \dots, x_n in un intorno di \mathbf{x}^0 . Naturalmente il ruolo delle variabili è intercambiabile: ciascuna può prendere il posto di y .

Ancora, la regolarità di g si trasmette a $f : g \in C^k(A) \Rightarrow f \in C^k(U)$, $g \in C^\infty(A) \Rightarrow f \in C^\infty(U)$.

Per successive derivazioni della (3.22), pensando $y = f(x_1, \dots, x_n)$, è poi possibile ricavare le derivate di ordine superiore di f in (\mathbf{x}^0, y_0) allo scopo di approssimare f con polinomi di Taylor centrati in quel punto.

Esempio 3.13 Sia $g(x, y, z) = \arctg z + xy^2 + xz - y^3 - 1 = 0$. La funzione g è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nel punto $(0, -1, 0)$ si ha: $g(0, -1, 0) = 0$ e $g_z(0, -1, 0) = 1$. Dunque, in base al Teorema 3.5, l'equazione $g(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente $z = f(x, y)$ in un intorno di $(0, -1)$. Tale funzione risulta di classe C^∞ .

Calcoliamo $df(0, -1)$ e $d^2f(0, -1)$. Si ha, dalla (3.21):

$$f_x(0, -1) = -\frac{g_x(0, -1, 0)}{g_z(0, -1, 0)} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$f_y(0, -1) = -\frac{g_y(0, -1, 0)}{g_z(0, -1, 0)} = -\frac{-3}{1} = +3.$$

Quindi $df(0, -1) = -dx + 3dy$.

Per calcolare il differenziale secondo differenziamo due volte l'equazione $g(x, y, z) = 0$, pensando $z = f(x, y)$; ricordando la proprietà di invarianza del differenziale primo, abbiamo:

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0.$$

Differenziando ancora abbiamo

$$d^2g + g_z d^2z = 0.$$

Poiché $d^2g(0, -1, 0) = 6dy^2 - 4dxdy + 2dxdz$, ricaviamo, ricordando che $dz = df = -dx + 3dy$ e $g_z(0, -1, 0) = 1$:

$$d^2f = -6dy^2 + 4dxdy - 2dx(-dx + 3dy) = 2dx^2 - 2dxdy - 6dy^2.$$

In conclusione possiamo scrivere, usando la formula di Taylor con centro in $(0, -1)$:

$$f(dx, -1 + dy) = -dx + 3dy + \frac{1}{2}(2dx^2 - 2dxdy - 6dy^2) + o(\sqrt{dx^2 + dy^2}) \quad \text{per } (dx, dy) \rightarrow (0, 0).$$

Equazioni della forma $g(x, y, z) = 0$, con g di classe C^1 , nell'intorno dei punti regolari, in cui cioè $\nabla g \neq \mathbf{0}$, rappresentano grafici di funzioni $z = z(x, y)$ (se $g_z \neq 0$) o $y = y(x, z)$ (se $g_y \neq 0$) o infine $x = x(y, z)$ (se $g_x \neq 0$).

In analogia col caso bidimensionale, i punti in cui $\nabla g = \mathbf{0}$ si chiamano *punti singolari*.

La formula (3.21) permette di ricavare l'equazione del piano tangente in un punto regolare (x_0, y_0, z_0) al grafico della funzione implicita. Se, per esempio $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, l'equazione $g(x, y, z) = 0$ definisce $z = f(x, y)$ in un intorno di (x_0, y_0) ; dalla (3.21):

$$z_x(x_0, y_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}$$

$$z_y(x_0, y_0) = -\frac{g_y(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}$$

e quindi l'equazione del piano tangente, scritto in forma simmetrica rispetto alle tre variabili, è:

$$(3.23) \quad g_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + g_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Esempio 3.14 Per l'ellissoide

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

abbiamo:

$$g_x = \frac{2x}{a^2}, \quad g_y = \frac{2y}{b^2}, \quad g_z = \frac{2z}{c^2}.$$

L'equazione del piano tangente in un suo punto (x_0, y_0, z_0) è

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0;$$

essendo $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ questa equazione si riduce a

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0.$$

Passiamo ora alla generalizzazione delle nozioni di insieme di livello e di involuppo. Ci limiteremo per semplicità al caso $n = 2$. L'allievo non avrà difficoltà a estendere le considerazioni che seguono al caso $n > 2$.

Possiamo interpretare l'insieme $E_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = 0\}$ come l'intersezione del grafico di $w = g(x, y, z)$ con l'iperpiano $w = 0$; più in generale possiamo introdurre la famiglia di insiemi

$$E_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = c\} \quad (c \in \mathbb{R})$$

proiezione sull'iperpiano $w = 0$ dell'intersezione tra l'iperpiano $w = c$ e il grafico di $w = g(x, y, z)$.

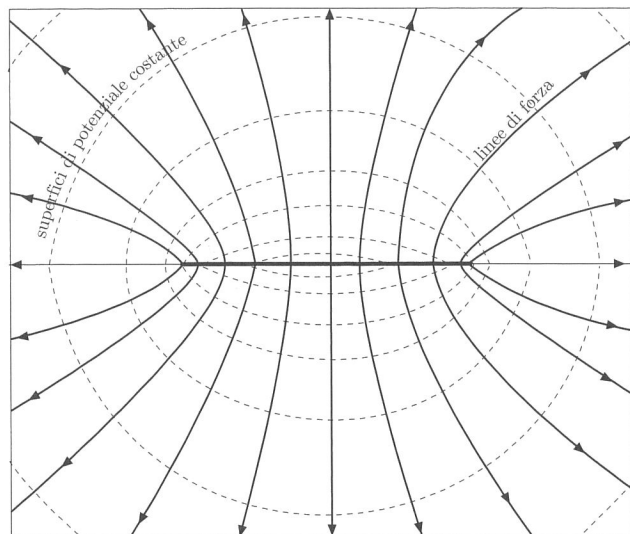


Figura 7.32. Sezioni di superfici equipotenziali e linee di forza generate da un disco caricato uniformemente.

Chiameremo E_c *insiemi di livello* di g . Se g è di classe C^1 e $\nabla g \neq \mathbf{0}$ in ogni punto E_c è ragionevole chiamare E_c *superficie di livello*.

La formula (3.23) indica allora che il vettore ∇g è ortogonale al vettore $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ¹³ che giace sul piano tangente alla superficie di livello nel punto (x_0, y_0, z_0) . In altri termini, ∇g è *ortogonale alle superfici di livello*.

Un esempio notevole in elettrostatica è dato dalle superfici di livello $V(x, y, z) = c$ dove V rappresenta il potenziale elettrostatico. Queste superfici si chiamano *equipotenziali*. Il campo elettrostatico è $\mathbf{E} = \nabla V$ che, per quanto detto sopra, è diretto ortogonalmente alle superfici equipotenziali. In termini più fisici: *le linee di forza di \mathbf{E} sono ortogonali alle superfici equipotenziali*.

Concludiamo il paragrafo con un cenno agli involuppi di superfici. Consideriamo prima il caso di una famiglia a un parametro $\Psi(x, y, z, c) = 0$, dove (x, y, z) varia in un aperto A di \mathbb{R}^3 e c in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e dove $\Psi \in C^1(A \times I)$, con $\nabla \Psi \neq \mathbf{0}$ in $A \times I$.

¹³Se $\Delta \mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, la (3.23) equivale a $\langle \nabla g(x_0, y_0, z_0), \Delta \mathbf{r} \rangle = 0$.

DEFINIZIONE 3.3 Una superficie E è *involuppo* della famiglia $\Psi(x, y, z, c) = 0$ se è tangente a ogni superficie della famiglia lungo una curva e se queste curve di contatto costituiscono una famiglia a un parametro, la cui unione è uguale a E .

Per esempio, la famiglia di sfere unitarie con centro sull'asse z ha come involuppo il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (cfr. Esempio 3.15).

L'analogo della Proposizione 3.4 è la seguente, di cui omettiamo la dimostrazione:

PROPOSIZIONE 3.6 Se E è involuppo della famiglia $\Psi(x, y, z, c) = 0$ allora la sua equazione si ottiene eliminando c tra le equazioni

$$(3.24) \quad \Psi(x, y, z, c) = 0 \quad \Psi_c(x, y, z, c) = 0.$$

Dal punto di vista pratico, per trovare l'eventuale involuppo di una famiglia di superfici, si risolve il sistema (3.24), verificando poi di aver trovato effettivamente l'involuppo.

Esempio 3.15 Sia $\Psi(x, y, z, c) = x^2 + y^2 + (z - c)^2 - 1 = 0$ la famiglia di sfere unitarie con centro sull'asse z .

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - c)^2 - 1 = 0 \\ -2(z - c) = 0 \end{cases}$$

si trova $x^2 + y^2 = 1$ che è l'equazione del cilindro circolare retto avente per asse l'asse z .

Le curve di contatto sono i *cerchi* unitari, paralleli al piano xy , giacenti sul piano $z = c$, centrati in $(0, 0, c)$.

Nel caso delle superfici è anche possibile definire la nozione di involuppo per una famiglia dipendente da 2 parametri c_1 e c_2 :

$$\Psi(x, y, z, c_1, c_2) = 0,$$

come per esempio, la famiglia

$$(3.25) \quad (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 - 1 = 0$$

di sfere con centro sul piano $z = 0$ e raggio unitario.

DEFINIZIONE 3.4 Una superficie E è *involuppo* di una famiglia a due parametri se, in ogni suo punto regolare, E è tangente a una e una sola superficie della famiglia. (Ogni superficie della famiglia è tangente a E in un punto e non lungo una curva come nella Definizione 3.2.)

L'analogo delle Proposizioni 3.4 e 3.6 è la seguente di cui, ancora, omettiamo la dimostrazione.

PROPOSIZIONE 3.7 Se E è l'inviluppo della famiglia $\Psi(x, y, z, c_1, c_2) = 0$ allora la sua equazione si trova eliminando c_1 e c_2 dalle equazioni

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \Psi(x, y, z, c_1, c_2) &= 0, \\ \Psi_{c_1}(x, y, z, c_1, c_2) &= 0, \\ \Psi_{c_2}(x, y, z, c_1, c_2) &= 0. \end{aligned}$$

Esempio 3.16 Verifichiamo se la famiglia (3.25) ha inviluppo.

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 - 1 = 0 \\ -2(x - c_1) = 0 \\ -2(y - c_2) = 0 \end{cases}$$

si trova $z^2 - 1 = 0$ ovvero i due piani $z = \pm 1$ che infatti risultano inviluppo della famiglia.

La nozione di inviluppo di superfici interviene nel celebre *principio di Huygens* in ottica geometrica:

se Σ è in un certo istante un fronte d'onda, ogni suo punto si può considerare come una sorgente di onde sferiche secondarie; se v è la velocità dell'onda, queste, dopo un tempo t avranno raggio vt e il loro inviluppo costituisce la nuova superficie d'onda Σ_t .

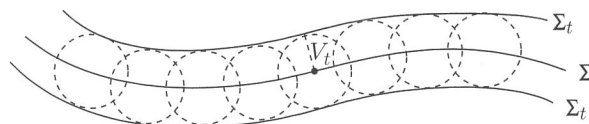


Figura 7.33. Principio di Huygens.

In economia, un interessante impiego della nozione di inviluppo si ha nella *teoria del costo medio di lungo periodo*.

Supponiamo che un'azienda disponga di tre diversi metodi di fabbricazione di un unico prodotto x (x è tradotto in quantità di denaro). Ogni modo di produzione avrà una curva di costo: $c_1(x)$, $c_2(x)$, $c_3(x)$.

La curva tratteggiata in Figura 7.34 rappresenta la curva di minimo costo che simula la strategia di produzione dell'azienda: fino alla quantità x_1 conviene produrre col metodo 1, da x_1 a x_2 col metodo 2, da x_2 in poi col metodo 3.

La funzione costo sarà dunque $c(x) = \min(c_1(x), c_2(x), c_3(x))$.

Se ora supponiamo che l'azienda abbia a sua disposizione un numero arbitrariamente grande di metodi di produzione per x la funzione costo sarà costituita dall'inviluppo della famiglia delle funzioni costo associate a ciascun metodo di produzione.

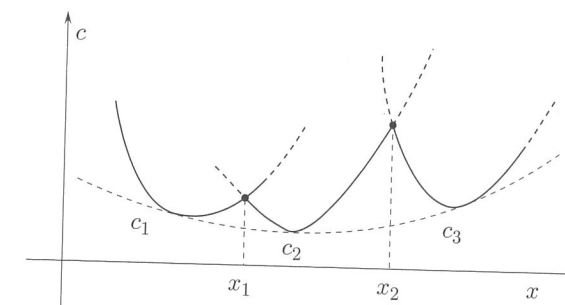


Figura 7.34. Curva di minimo costo.

3.6 Funzioni definite da un sistema di equazioni

Presentiamo in questo paragrafo il teorema sulle funzioni implicite nel suo aspetto generale. Il problema è di stabilire condizioni sotto le quali in un sistema del tipo seguente

$$(3.27) \quad \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

sia possibile esplicitare le m variabili y_1, \dots, y_m in funzione delle altre, x_1, x_2, \dots, x_n , o, in altre parole, risolvere le m equazioni (3.27) rispetto alle m variabili y_1, \dots, y_m .

Ponendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ il sistema (3.27) si può scrivere nella forma compatta

$$(3.28) \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

formalmente identica alla (3.1).

Osserviamo che se $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{h}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}$, il problema posto consiste nel determinare l'inversa della funzione \mathbf{h} ed è già stato ampiamente trattato e risolto (almeno localmente) col teorema di inversione locale.

In quello stesso paragrafo abbiamo sottolineato che il teorema di inversione locale è l'analogo non lineare del teorema di Cramer, corrispondente al caso in cui \mathbf{h} è una trasformazione lineare da \mathbb{R}^m in \mathbb{R}^m , rappresentabile quindi con una matrice quadrata di ordine m .

Il teorema che presenteremo più avanti è invece l'analogo non lineare del teorema di Rouché-Capelli relativo a un sistema lineare omogeneo di m equazioni in $n + m$ incognite

$$(3.29) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \dots + b_{1m}y_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}y_1 + \dots + b_{2m}y_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \dots + b_{mm}y_m = 0. \end{cases}$$

In base al teorema di Rouché-Capelli, se la matrice \mathbf{B} dei coefficienti di y_1, y_2, \dots, y_m è non singolare allora dal sistema lineare si possono ricavare y_1, y_2, \dots, y_m in termini di x_1, x_2, \dots, x_n .

Se indichiamo con g_1, g_2, \dots, g_m i primi membri del sistema (3.29), la matrice \mathbf{B} coincide con la matrice jacobiana di g_1, \dots, g_m rispetto a y_1, \dots, y_m , che indicheremo con $\mathbf{D}_y \mathbf{g}$:

$$\mathbf{D}_y \mathbf{g} := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Il determinante di $\mathbf{D}_y \mathbf{g}$ è indicato col simbolo $\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}$.

Il prossimo teorema afferma che se $\mathbf{D}_y \mathbf{g}$ è non singolare in un punto, allora in un suo intorno è possibile esplicitare \mathbf{y} in funzione di \mathbf{x} nella (3.27).

■ **TEOREMA 3.8** Sia $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n+m} \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^m$, A aperto. Supponiamo che:

- i) $\mathbf{g} \in C^1(A)$;
- ii) nel punto $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in A$ si abbia $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$ e

$$\det \mathbf{D}_y \mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno V di \mathbf{x}^0 e un'unica funzione $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, tale che: $\mathbf{f} \in C^1(V)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$ e

$$(3.30) \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \text{ per ogni } \mathbf{x} \in V.$$

Inoltre vale la formula seguente che assegna la matrice jacobiana¹⁴ di \mathbf{f} :

$$(3.31) \quad \mathbf{Df} = -(\mathbf{D}_y \mathbf{g})^{-1} \cdot \mathbf{D}_x \mathbf{g}.$$

Dimostrazione. L'idea è di ricondursi al teorema di inversione locale risolvendo, anziché il sistema (3.27), il sistema seguente di $n+m$ equazioni in $n+m$ incognite:

$$(3.32) \quad \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = z_1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = z_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = z_m \\ x_1 = w_1 \\ x_2 = w_2 \\ \vdots \\ x_n = w_n \end{cases}$$

¹⁴Più precisamente:

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}) = -[\mathbf{D}_y \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))]^{-1} \cdot \mathbf{D}_x \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Risolvere il sistema (3.32) equivale a invertire la funzione $\mathbf{G} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ definita da

$$(3.33) \quad \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{w} = \mathbf{x}.$$

Ora, $\mathbf{G} \in C^1(A)$ e, per ipotesi, $\mathbf{G}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (\mathbf{0}, \mathbf{x}^0)$. Inoltre

$$\mathbf{DG} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_x \mathbf{g} & \mathbf{D}_y \mathbf{g} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_{n,m} \end{pmatrix}$$

dove \mathbf{I}_n è la matrice identità di ordine n e $\mathbf{O}_{n,m}$ è la matrice nulla di ordine $n \times m$.

Poiché $\mathbf{D}_y \mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ è non singolare, anche $\mathbf{DG}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ risulta non singolare, in quanto $\det \mathbf{DG}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (-1)^{m-n} \det \mathbf{D}_y \mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$.

Per il teorema di inversione locale esistono un intorno W di $(\mathbf{0}, \mathbf{x}^0)$ e un intorno U di $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ in cui \mathbf{G} è $1 \leftrightarrow 1$ e di classe C^1 . La funzione inversa di \mathbf{G} è della forma

$$(3.34) \quad \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in W.$$

Per definizione di funzione inversa dalle (3.33), (3.34) si ottiene

$$(3.35) \quad \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{w}, \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{w})), \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in W.$$

Definiamo ora $V = \{\mathbf{x} : (\mathbf{0}, \mathbf{x}) \in W\}$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{0}, \mathbf{x})$.

Allora V è un intorno di \mathbf{x}^0 , $\mathbf{f} \in C^1(V)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \varphi(\mathbf{0}, \mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$ (da (3.34)) e inoltre dalla (3.35):

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Per completare la dimostrazione della prima parte del teorema occorre far vedere che la funzione implicita è unica. Se infatti ce ne fossero 2, diciamo \mathbf{f}_1 ed \mathbf{f} si avrebbe, posto $\mathbf{y}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ e $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_1 &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_1(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\mathbf{x} \in V)$$

e quindi $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1)$, che, per l'iniettività di \mathbf{G} implica $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}$.

La formula (3.31) si ottiene dall'equazione (3.30) e dal teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\mathbf{D}_y \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{Df}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_x \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad \square$$

Invitiamo il lettore a verificare che i Teoremi 3.1 e 3.5 risultano casi particolari del Teorema 3.8.

Anche in questo caso $\mathbf{g} \in C^k(A) \Rightarrow \mathbf{f} \in C^k(V)$, $\mathbf{g} \in C^\infty(A) \Rightarrow \mathbf{f} \in C^\infty(V)$. Differenziali successivi e formula di Taylor con resto di Peano si possono poi trovare con metodi perfettamente analoghi a quelli dell'Esempio 3.13.

Esempio 3.17 Sia dato il sistema

$$(3.36) \quad \begin{cases} x + \log y + 5z - 10 = 0 \\ 2x + y^2 + 3z^3 - 25 = 0 \end{cases}$$

del quale $(0, 1, 2)$ è una soluzione.

Le funzioni $g_1(x, y, z) = x + \log y + 5z - 10$, $g_2(x, y, z) = 2x + y^2 + 3z^3 - 25$ sono di classe C^∞ in un intorno di $(0, 1, 2)$.

Ci chiediamo quale coppia di variabili sia esplicitabile rispetto all'altra in tale intorno.

Abbiamo:

$$\nabla g_1 = \left(1, \frac{1}{y}, 5\right), \quad \nabla g_2 = (2, 2y, 9z^2)$$

e, di conseguenza:

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)}(0, 1, 2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, z)}(0, 1, 2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 36 \end{vmatrix} = 26$$

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)}(0, 1, 2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 36 \end{vmatrix} = 26.$$

Dal Teorema 3.8 deduciamo che dal sistema (3.36) è possibile esplicitare x e z in funzione di y per y in un intorno di 1, oppure y, z in funzione di x , per x in un intorno di 0.

Scegliamo l'ultima possibilità, dunque $\mathbf{f}(x) = (y(x), z(x))$, e proponiamoci di scrivere la formula di Mac Laurin con il resto di Peano, arrestata al 2° ordine per \mathbf{f} . Ricordiamo che $y(0) = 1, z(0) = 2$. Essendo $\mathbf{D}_x \mathbf{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dalla formula (3.31) si ha:

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 36 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $y'(0) = -1, z'(0) = 0$.

Alla stessa conclusione si poteva pervenire derivando rispetto a x le due equazioni del sistema, pensando $y = y(x)$ e $z = z(x)$:

$$(3.37) \quad \begin{cases} 1 + \frac{y'}{y} + 5x' = 0 \\ 2 + 2yy' + 9z^2z' = 0. \end{cases}$$

Calcolando in $x = 0$ si ottiene,

$$\begin{cases} y'(0) + 5z'(0) = -1 \\ 2y'(0) + 36z'(0) = -2 \end{cases}$$

che assegna appunto i valori precedentemente trovati.

Derivando nuovamente, sempre rispetto a x le (3.37) otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{y''y - (y')^2}{y^2} + 5z'' = 0 \\ 2(y')^2 + 2yy'' + 18z(z')^2 + 9z^2z'' = 0. \end{cases}$$

Calcolando in $x = 0$:

$$\begin{cases} y''(0) + 5z''(0) = 1 \\ 2y''(0) + 36z''(0) = -2 \end{cases}$$

da cui si ricava $y''(0) = \frac{23}{13}, z''(0) = -\frac{2}{13}$.

Conclusione:

$$y(x) = 1 - x + \frac{23}{26}x^2 + o(x^2)$$

$$z(x) = 2 - \frac{1}{13}x^2 + o(x^2).$$

Esercizi

1. Verificare che l'equazione

$$e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1 = 0$$

definisce implicitamente $y = f(x)$ in un intorno di $x = 0$ con $f(0) = -1$.

Dimostrare che $x = 0$ è punto di minimo relativo per f .

2. Dimostrare il seguente *teorema globale* sulle funzioni implicite.

Sia $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $g \in C(\mathbb{R}^2)$, esiste $g_y(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ed è positiva (risp. negativa);
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(x, y) > 0$ (risp. < 0) e $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(x, y) < 0$ (risp. > 0), $\forall x \in \mathbb{R}$.

Allora esiste una e una sola funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(x, f(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se inoltre $g \in C^k(\mathbb{R})$ anche $f \in C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ oppure $k = \infty$.

3* Sia data l'equazione $x^2y + e^{x+y} = 0$.

Dimostrare che essa definisce una funzione $y = f(x)$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Verificare inoltre che:

- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $f(x) \rightarrow 0_-$ se $x \rightarrow -\infty$ e quindi f ha $y = 0$ come asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$;
- $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow 0$ e quindi f ha $x = 0$ come asintoto verticale;
- $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, ma non esiste asintoto obliquo;
- $f(x)$ ha un massimo locale per $x = 2$.

Tracciare un grafico qualitativo di $y = f(x)$.

4. Studiare gli insiemi di livello delle seguenti funzioni:

- $g(x, y) = \varphi(x - y^2)$;
- $g(x, y) = e^{xy}$;
- $g(x, y) = \log(|\operatorname{tg} y - x|)$.

5. Verificare che l'equazione

$$\operatorname{arctg} z + xy^2 + xz - y^3 - 1 = 0$$

definisce $z = z(x, y)$ in un intorno del punto $(0, -1, 0)$. Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $z = z(x, y)$ in questo punto.

6. Sia $g = g(x, y, z)$ differenziabile e positivamente omogenea di grado $\alpha \geq 0$, in \mathbb{R}^3 .