Esempio applicazione dualità nella produzione

(Come da esercizio svolto a lezione; sostituisce la registrazione)

Sia $Min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2$ s.v. $Q(x_1,x_2) = 10x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} = \bar{Q}$

Allora

$\Lambda = w_1x_1 + w_2x_2 \; -\lambda\left[10x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} - \bar{Q}\right]$ le condizioni di stazionarietà (anche sufficienti; come mai?) sono

$$\Lambda_{x_1} = 0 \rightarrow w_1 - \frac{\lambda 10}{3}\left[x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}\right] \qquad (1)$$

$$\Lambda_{x_2} = 0 \rightarrow w_2 - \frac{\lambda 10}{3}\left[2x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{1}{3}}\right] \qquad (2)$$

$$\Lambda_{\lambda} = 0 \rightarrow 10x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} = \bar{Q} \qquad (3)$$

Da cui (1)/(2) :

$$\underbrace{\frac{w_1}{w_2}}_{\text{Prezzo relativo fattori}} = \underbrace{\frac{x_2}{2x_1}}_{\text{Saggio Marginale Sostituzione Tecnica}} \qquad (4)$$

Ricavando prima x_1 e poi x_2 e sostituendoli uno alla volta nel vicolo (3) otteniamo

$$x_1^h = x_1^h(w_1,, w_2, \bar{Q}) = \frac{\bar{Q}}{10}\left[2\frac{w_1}{w_2}\right]^{-\frac{2}{3}} = \frac{\bar{Q}}{10}w_1^{-\frac{2}{3}}w_2^{\frac{2}{3}}(2)^{-\frac{2}{3}} \qquad (5)$$

$$x_2^h = x_2^h(w_1,, w_2, \bar{Q}) = \frac{\bar{Q}}{10}\left[\frac{w_2}{2w_1}\right]^{-\frac{1}{3}} = \frac{\bar{Q}}{10}w_1^{\frac{1}{3}}w_2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \qquad (6)$$

Verificare le proprietà delle domane Hicksiane. Spiegare intuitivamente perché esse misurano la variazione della domanda indotta dalla variazione dei prezzi ed attribuibile al solo effetto di sostituzione.

Sostituendo prima la (5) e poi la (6) nell'equazione "contabile" della spesa abbiamo

$$e(w,Q) = w_1 x_1^h + w_2 x_2^h = w_1 \frac{\bar{Q}}{10}\left[2\frac{w_1}{w_2}\right]^{-\frac{2}{3}} + w_2 \frac{\bar{Q}}{10}\left[\frac{w_2}{2w_2}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\bar{Q}}{10} w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{\frac{2}{3}} \left[2^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right] = \frac{1.889\bar{Q}}{10} w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{\frac{2}{3}} \quad \textit{circa} \qquad (7)$$

Ricordare le proprietà della funzione di spesa.

Lemma di Shephard (1953,1970) ci fa calcolare

$$\frac{\partial e(w,Q)}{\partial w_1} = \frac{\bar{Q}}{10}\left(\frac{1.889 w_1^{-\frac{2}{3}} w_2^{\frac{2}{3}}}{3}\right) = \frac{\bar{Q}}{10} w_1^{-\frac{2}{3}} w_2^{\frac{2}{3}} \left(2^{-\frac{2}{3}}\right) = x_1^h(w_1, w_2, \bar{Q}) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial e(w,Q)}{\partial w_2} = \frac{2\bar{Q}}{30} w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{-\frac{1}{3}} (1.889) = \frac{\bar{Q}}{10} w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = x_2^h(w_1, w_2, \bar{Q}) \qquad (9)$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 e(w,Q)}{\partial w_1^2} = \frac{\partial x_1^h(w_1, w_2, \bar{Q})}{\partial w_1} = -\frac{2}{3}\frac{\bar{Q}}{10} w_1^{-\frac{5}{3}} w_2^{\frac{2}{3}} \left(2^{-\frac{2}{3}}\right) < 0$$

$$\frac{\partial e^2(w,Q)}{\partial w_2^2} = \frac{\partial x_2^h(w_1, w_2, \bar{Q})}{\partial w_2} = -\frac{1}{3}\frac{\bar{Q}}{10} w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} < 0$$

$$\frac{\partial e^2(w,Q)}{\partial w_1 \partial w_2} = \frac{\partial x_1^h(w_1, w_2, \bar{Q})}{\partial w_2} = \frac{2}{3}\frac{\bar{Q}}{10} w_1^{-\frac{2}{3}} w_2^{-\frac{1}{3}} (2^{-\frac{2}{3}}) = \frac{\partial e^2(w,Q)}{\partial w_2 \partial w_1} = \frac{\partial x_2^h(w_1, w_2, \bar{Q})}{\partial w_1}$$

Si tenga presente, ai fini della comparazione tra le due derivate incrociate (se si vuole calcolare anche $\frac{\partial x_2^h(w_1, w_2, \bar{Q})}{\partial w_1}$) che $2(2^{-\frac{2}{3}}) = 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$.

La matrice dei termini di sostituzione è

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e(w_1, w_2, Q)}{\partial w_1^2} & \frac{\partial^2 e(w_1, w_2, Q)}{\partial w_1 \partial w_2} \\ \frac{\partial^2 e(w_1, w_2, Q)}{\partial w_2 \partial w_1} & \frac{\partial^2 e(w_1, w_2, Q)}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^h(w_1, w_2, Q)}{\partial w_1^2} & \frac{\partial^2 x_1^h(w_1, w_2, Q)}{\partial w_1 \partial w_2} \\ \frac{\partial^2 x_2^h(w_1, w_2, Q)}{\partial w_2 \partial w_1} & \frac{\partial x_2^h(w_1, w_2, Q)}{\partial w_2^2} \end{bmatrix}$$

Ovvero

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\frac{\bar{Q}}{10} w_1^{-\frac{5}{3}} w_2^{\frac{2}{3}} \left(2^{-\frac{2}{3}} \right) & \frac{2}{3}\frac{\bar{Q}}{10} w_1^{-\frac{2}{3}} w_2^{-\frac{1}{3}} (2^{-\frac{2}{3}}) \\ \frac{2}{3}\frac{\bar{Q}}{10} w_1^{-\frac{2}{3}} w_2^{-\frac{1}{3}} (2^{-\frac{2}{3}}) & -\frac{1}{3}\frac{\bar{Q}}{10} w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

Poiché $H_1 < 0$ = e Det($\mathbf{S}$) = 0 la matrice è come ci si aspettava negativa semi definita.