Aste. Introduzione semplificata per microeconomia
Parte I Valutazioni IPV

Sommario

1. Principali forme d'asta

Le aste sono meccanismi di origine preindustriale per l'allocazione di beni e servizi o di *assets* produttivi e sono attualmente utilizzate per lo scambio di una vasta gamma di beni e servizi[1]. Erodoto descrive il poco commendevole precedente delle aste per le ragazze da marito che si tenevano a Babilonia circa 500 anni avanti Cristo. In epoca romana, i soldati vendevano al miglior offerente gli oggetti frutto di saccheggio bellico deponendoli sul mantello disteso al suolo e segnalato dalla lancia conficcata nel terreno, ciò mettendoli *sub hasta* (sotto la lancia). All'inizio del XVII secolo il termine latino compare per la prima volta in un rapporto del funzionario governativo inglese Sir Clement Edmondes (1568?-1622) ma verrà presto sostituito dal termine *auction* (vedi sotto). Restò invariato però il veicolo pubblicitario usato per notificare la tenuta dell'asta: dalla finestra del primo piano della "casa d'aste" si faceva sporgere un'asta con un panno bianco. Se invece erano soggetti privati (e non una casa d'aste) quelli desiderosi di vendere oggetti personali (magari per pagare i

[1] La molteplicità dei beni e servizi scambiati mediante aste è enorme. Si va dalle frequenze radio Salant (2000) alle reti ferroviarie (Affuso, 2003) all'energia Newbery e McDaniel (2004) agli spazi aeroportuali Sentence (2003) agli oggetti d'arte.

debiti), essi dovevano far sporgere dalla finestra del primo piano dell'abitazione un'asta a cui si appendeva una striscia del tappeto o delle tendine della camera da letto (così si segnalava il fatto che si vendevano oggetti di arredo, o abiti, o suppellettili). Il castigliano ha invece conservato la denominazione latina dell'espressione originale, ma ha contratto i due termini in una sola parola, *subasta*, che deriva chiaramente dal latino (*sub hasta* [= *bajo lanza*] → *subasta*). In qualche caso limitato viene usata anche la parola *remate* (*fin o cabo, extremidad o conclusión de algo*) che però si riferisce ad una liquidazione/svendita. Da ciò l'uso del verbo *rematar* (*dar fin o remate a algo*) per indicare non la vendita all'asta ma la svendita effettuata per svuotare i magazzini. Il tedesco *auktion* (di chiara derivazione latina) viene talvolta affiancato nell'uso da *versteigerung* che sembra però riferirsi alla generica azione del vendere al meglio più che allo specifico meccanismo "competitivo" seguito per lo svolgimento dell'attività di vendita mediante asta. Curiosa (ma forse illuminante) è l'etimologia del termine francese *enchères* che oltre a indicare la vendita all'asta (*vente aux enchères*) può indicare anche l'offerta o la posta in un gioco d'azzardo (*faire monter les enchères*).
La parola italiana deriva chiaramente da quella latina (*hasta*, ovvero lancia, picca, palo) che, a sua volta, potrebbe derivare dalla parola ariana HASTAS (ovvero mano, proboscide) per cui *hasta* sarebbe solo la cosa che si impugna. Per alcuni, invece, HASTA avrebbe la radice tratta dall'ariano HAN che vuol dire colpire o uccidere, da cui il latino HÒSTI (nemico) e HÒSTIA (vittima). In questo senso, comprare/vendere all'asta avrebbe il sinistro significato di vendere/comprare mediante raggiro o violenza e arrecando danno alla controparte, fino alla sua morte.
Al giorno d'oggi alcune delle più note applicazioni delle aste includono: aste di spettro delle frequenze radio, borse valori (aste doppie a tempo continuo), compravendite sui siti Web di e-commerce (ad esempio ebay), aste per gi spazi della pubblicità online (social, display e ricerca sponsorizzata), aste per appalti governativi o mercati B2B, reti di sensori wireless, oggetti d'arte; solo per citarne alcuni. In generale, l'asta è ritenuta essere un meccanismo efficace per allocare beni scarsi o deperibili.

Quali che siano l'origine e la storia del termine, un'asta è un meccanismo di presentazione di offerte (*bids*) conformi ad un insieme di regole sulla base delle quali il partecipante definisce la propria strategia di acquisto o vendita. Le regole, principalmente, specificano: a) come si partecipa e come si individua il vincitore; b) quanto questi debba pagare; c) come suddividere più lotti di eventuali oggetti identici o diversi da mettere all'asta e quali procedure usare in ogni tornata se la vendita avviene in modo separato.

Nel caso elementare di asta per la **vendita** di un solo oggetto indivisibile (ad esempio, un quadro d'autore) le quattro forme d'asta più diffuse sono:

Asta all'inglese. $N > 1$ potenziali *bidders* convengono in un certo luogo e offrono pubblicamente e in sequenza orale ad un banditore/venditore, che è obbligato ad accettarli, dei *bids* in rialzo l'uno rispetto all'altro, partendo eventualmente da un prezzo base fissato dallo stesso banditore. Vince chi presenta quel *bid* che, in un certo lasso di tempo prestabilito, non è superato da altri *bids*. **Costei/ui pagherà ciò che si è impegnato a pagare con il proprio *bid***. In taluni casi il venditore può fissare un prezzo c.d. di riserva (e può renderlo pubblico o tenerlo segreto). Il mancato raggiungimento di tale prezzo dal più alto *bidder* implica mancata assegnazione dell'oggetto.

L'asta all'inglese è quindi un'asta orale ascendente (il termine inglese *auction* deriva dal verbo latino *augere* ovvero crescere). In questo senso il termine inglese sembra riflettere la convinzione che l'asta sia per antonomasia quella al rialzo, ovvero quella all'inglese. Nell'asta all'inglese la regola di assegnazione dell'oggetto (identificazione del vincitore) e la regola di pagamento (quanto deve pagare il vincitore) coincidono. Ovvero: **il vincitore paga ciò che si è impegnato a pagare con il suo *bid*.**

Asta all'olandese. $N > 1$ potenziali *bidders* convengono in un certo luogo. Il banditore segue una **procedura inversa** rispetto a quella dell'asta inglese e partendo da un prezzo "irragionevolmente alto" lo diminuisce continuamente sino a che qualcuno dei presenti dichiara di accettarlo. A quel punto l'asta è conclusa e il vincitore paga il suddetto prezzo. Pertanto, a differenza dell'asta all'inglese, l'eliminazione degli avversari avviene in un colpo solo (quello finale). Inoltre, con l'asta all'olandese non è possibile osservare il comportamento (offerte) dei propri avversari: si osserva solo il comportamento del vincitore quando questi rende palese la sua accettazione. Per gli altri, però, è già troppo tardi. Da notare: regola di assegnazione dell'oggetto (identificazione del vincitore) e regola di pagamento (quanto deve pagare il vincitore) coincidono come nel caso dell'asta all'inglese.

Asta in busta chiusa al primo prezzo (*First Price Sealed Bid*). Un banditore sollecita pubblicamente, per un periodo di tempo dato, ad un numero N di potenziali *bidders* l'invio di *bids* segreti e scritti in una busta sigillata. Terminato il periodo di attesa si aprono pubblicamente le buste, si ordinano in modo crescente i *bids* e si proclama vincitrice/ore chi ha effettuato l'offerta più alta. Costei/ui pagherà il prezzo che ha scritto nella busta. Da notare: regola di assegnazione dell'oggetto (identificazione del vincitore) e regola di pagamento (quanto deve pagare il vincitore) coincidono anche questa volta.

Asta in busta chiusa al secondo prezzo (*Second Price Sealed Bid*). Un banditore sollecita pubblicamente, per un periodo di tempo dato, l'invio di *bids* segreti e scritti in busta sigillata come nel caso ***FPSB***. Terminato il periodo di attesa si aprono le buste, si ordinano in modo crescente i *bids* e si proclama vincitore chi ha effettuato l'offerta più alta (nuovamente, come nel caso ***FPSB***). Costei/ui però pagherà un prezzo pari al ***bid*** **immediatamente precedente il suo nell'ordine crescente** in cui sono stati posti i *bids*. Di conseguenza, il vincitore paga il "secondo più alto" *bid* e per tale ragione l'asta si chiama "al secondo prezzo". Questa forma d'asta è stata proposta nel 1961 dal premio Nobel (1996) per l'economia **William Vickrey**.[2] Da notare: regola di assegnazione dell'oggetto (identificazione del vincitore) e regola di pagamento (quanto deve pagare il vincitore) questa volta **non coincidono**.

Nelle aste per acquisti (ad esempio quando la PA vuole comprare un oggetto da fornitori privati) le regole sono le stesse, con la variante che vince chi chiede di ricevere il prezzo più basso e riscuote tale prezzo nell'asta all'inglese, all'olandese e FPSB o il prezzo appena più alto del suo nell'asta alla Vickrey.

Lo studio delle proprietà di questi quattro (e degli altri possibili) meccanismi d'asta (così come essi sono) definisce quella branca della teoria delle aste nota come teoria positiva. Lo studio delle possibili modificazioni dei meccanismi concepite al fine di migliorarne le proprietà (quindi, l'analisi dei meccanismi così come essi *dovrebbero essere* congegnati se si desiderassero perseguire mediante la loro applicazione taluni determinati scopi generalmente associabili alle condizioni di efficienza degli scambi), definisce la teoria normativa o delle *optimal auctions*.

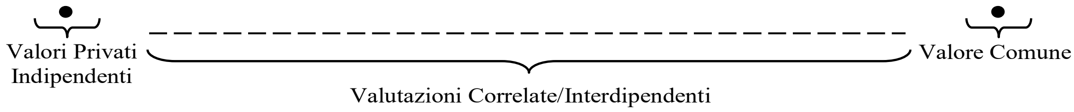
In questa sede non ci occupiamo di *optimal auctions* e ci chiediamo semplicemente quali sono le proprietà fondamentali dei meccanismi d'asta elencati e, in particolare, **se essi permettono di estrarre dal vincitore il suo intero surplus atteso** (che dovremo definire come eccedenza della valutazione sul pagamento). A questo fine studieremo, in ciascuna forma d'asta, la formazione dell'ottima strategia di partecipazione dei *bidders* e valuteremo l'esito complessivo atteso in ogni specifico meccanismo d'asta derivante da tale strategia. Analizzeremo in particolare la capacità di ogni meccanismo di indurre i *bidders* a presentare delle offerte effettivamente pari alla loro valutazione oppure a presentare offerte inferiori alla valutazione. **Dimostreremo di seguito che nessuna delle quattro forme considerate sopra permette di estrarre dal vincitore il suo surplus atteso** (rendita da asimmetria informativa) ma che, fatte determinate ipotesi, un'asta (come il mercato di concorrenza perfetta) ha **la proprietà di assegnare l'oggetto a chi lo valuta di più** (l'asta sarebbe un meccanismo per l'efficiente selezione del vincitore) pur lasciandogli parte del suo surplus. Dimostreremo inoltre che, fatte talune ipotesi sulla valutazione dell'oggetto da parte dei *bidders* e sulla loro attitudine verso il rischio, ognuna delle 4 forme d'asta produce lo **stesso ricavo atteso del venditore o lo stesso esborso atteso nel caso di aste in cui il banditore compra**. Mostreremo però che a fronte di valori attesi uguali, la variabilità del prezzo di aggiudicazione cambia con la forma di asta. Analizzeremo, infine, la (non) validità del Teorema in caso di avversione al rischio dei *bidders*.

2. *Natura e* valore dell'oggetto/i per i partecipanti e per il banditore

Il risultato dell'analisi della strategia tenuta dai partecipanti in una delle aste suddette dipende **anche** dalle ipotesi che vengono fatte circa a) la "natura" e la numerosità degli oggetti trattati nell'asta e b) l'attitudine verso il rischio dei partecipanti. Nel paragrafo seguente esaminiamo le ipotesi che la teoria avanza circa la natura e il valore dell'oggetto messo all'asta.

[2] Per questo motivo l'asta SPSB viene anche chiamata asta alla Vickrey.

La teoria distingue le caratteristiche essenziali dell'oggetto/i trattato/i nell'asta facendole rientrare all'interno di un intervallo di possibili caratteristiche (attribuite o attribuibili all'oggetto/i dai *bidders*) definite, ad un estremo, dall'ipotesi che tratta l'oggetto/i **come Oggetto/i a Valori Privati Indipendenti** e, all'altro estremo, dall'ipotesi che tratta l'oggetto/i **come Oggetto/i a Valor Comune.** Nel mezzo i casi **"misti",** come nel grafico che segue.



Naturalmente quelle di cui stiamo parlando non sono le caratteristiche che la natura o la storia ha assegnato a ciascun oggetto. Stiamo solo classificando i possibili modi di pensare (ovvero di saper attribuire "valore" all'oggetto) dei *bidders*.

Per **Valutazione/i Privata/e Indipendente/i** (IPV) si intende l'ipotesi per la quale l'oggetto/i ha/hanno esclusivamente il **valore che ogni *bidder* personalmente gli attribuisce secondo propri criteri (anche folli)** e non ha nessun valore "oggettivo" (per esempio, un valore di mercato), noto o incerto che sia. Ogni *bidder* si è formato una sua valutazione soggettiva (da cui l'aggettivo "privato/i" che qualifica il sostantivo valore/i) sulla base di propri giudizi e di proprie preferenze per strampalate che esse possano essere. Ogni valutazione è indipendente tanto da circostanze esterne (ad esempio, l'esistenza di un mercato per l'eventuale rivendita dell'oggetto che, per comodità si può supporre che non esista) quanto dalla valutazione degli altri *bidders* (e da ciò deriva l'aggettivo "indipendente/i" che qualifica ancor di più il sostantivo singolare/plurale valore/i). Ogni valutazione è quindi strettamente personale, priva di collegamento con (inesistenti) valori "oggettivi" e indipendente dalle valutazioni altrui. Un esempio di tale caratteristica dell'oggetto può essere un'opera d'arte antica per la quale non vi è mercato antiquario.

Spostandoci dall'estremo sinistro verso il centro del segmento tratteggiato abbandoniamo progressivamente l'ipotesi estrema che le singole valutazioni (certe per ogni *bidder*) stiano tra loro come realizzazioni di variabili casuali indipendenti e formuliamo l'ipotesi che esse restino sempre almeno in parte private (ovvero determinate almeno parzialmente dalle specifiche preferenze di ciascun *bidder*) ma che diventino tra loro **Correlate o Interdipendenti**. Se le caratteristiche della valutazione sono di un tipo compreso nel segmento tratteggiato, intendiamo quindi ipotizzare che i *bidders* hanno una propria valutazione soggettiva come nel caso *IPV* ed **in più** possiedono informazioni parziali/opache/incomplete sul valore "oggettivo" dell'oggetto che a loro interessa. Di conseguenza, la valutazione di ciascun *bidder* è costituita da due parti. Per una parte essa dipende dalle valutazioni specifiche e soggettive del valore (e valide per ciascun *bidder*) come nel caso IPV; questa è la parte certa (a ciascuno) della valutazione. Per la seconda parte la valutazione dipende da informazioni (segnali) che ogni *bidder* raccoglie per cercare di colmare la lacuna sulla parte non conosciuta (da ciascuno e autonomamente dagli altri) del valore dell'oggetto. Come vedremo ciò introdurrà l'interdipendenza delle valutazioni perché è ragionevole pensare che l'insieme da cui raccogliere le informazioni è comune a tutti ed ogni informazione/segnale è, magari debolmente, correlata al valore vero ma non osservabile dell'oggetto. Sicché i segnali sono tra loro correlati essendo estratti da un insieme comune di informazioni. La valutazione fatta da ogni *bidder* dovrà in qualche modo approssimare il valore dell'oggetto **elaborando il segnale informativo casuale raccolto (e correlato ai segnali altrui) e combinarlo con la propria valutazione individuale**. In più viene ipotizzato che ogni *bidder* sa che ogni altro *bidder*, avendo raccolto il proprio "segnale informativo", possiede anche lei/lui un pezzetto di informazione e che la userà.

Per oggetto/i a **Valor Comune** (l'estremo a destra) si intende invece fare riferimento all'ipotesi che *a*) non esistono valutazioni soggettive e *b*) che un valore certo esiste, ma nessun *bidder* lo conosce con certezza *ex-ante*. Della tipologia valutativa intermedia (quale che sia la proporzione tra informazioni strettamente private e segnale casuale raccolto) perdiamo totalmente la componente delle informazioni/valutazioni *individuali* del valore. Resta "attiva" solo la parte del segnale informativo casuale, proprio e altrui. Tali segnali si presume che dipendano dal vero valore (esistente ma sconosciuto ai *bidders*) dell'oggetto e pertanto essi sono tra loro correlati in quanto estratti da uno stesso insieme informativo e tutti correlati al vero valore. Essendo la valutazione basata **solo sui segnali** diventa fondamentale usarli bene. La loro sopravvalutazione potrebbe portare alla sopravvalutazione del valore dell'oggetto e nelle aste al primo prezzo al fenomeno noto come "**maledizione del vincitore**": il vincitore scopre *ex-post* che ha pagato troppo un oggetto che vale meno di quanto i segnali da lui raccolti facevano intendere *ex-ante*. L'esempio classico è quello del giacimento petrolifero off-shore: i *bidders* non hanno una valutazione soggettiva ed effettuano trivellazioni per raccogliere segnali sul valore del giacimento. Tuttavia, essi non possono mettersi nelle condizioni di conoscere per davvero e senza errori l'ampiezza del giacimento (vero valore che esiste ma non è osservabile). I segnali sono però chiaramente influenzati dalle caratteristiche del giacimento e pertanto sono tra loro correlati. Se analizzati male potrebbero indurre il *bidder* a pagare troppo il giacimento rispetto al suo vero contenuto di petrolio.

Riformulando la figura precedente rendiamo più esplicita l'ipotesi sulla valutazione:

Valori Privati Indipendenti ‒‒‒‒‒‒ Valori Interdipendenti ‒‒‒‒‒‒ Valor Comune

Valori Privati Indipendenti	Valori Interdipendenti	Valor Comune
Valutazione basata esclusivamente su una preferenza strettamente individuale non legata in alcun modo a quelle dei conorrenti. Nessun ruolo per segnali relativi al valore dell'oggetto	**Compresenza di valore soggettivo e di segnali correlati tra loro**	**Valutazione basata esclusivamente sui segnali (tra loro correlati) relativi al valore dell'oggetto Nessun ruolo per le valutazioni stettamente personali**
↑ OGGETTO COLLEZIONE		↑GIACIMENTO OFF-SHORE

Quanto al numero di oggetti, l'asta può riguardare un singolo oggetto oppure una pluralità di oggetti, identici, simili o diversi; tra loro sostituti o tra loro complementi. Dotati o non dotati di c.d. proprietà sinergiche (fatte certe ipotesi, acquisire due oggetti genera per l'acquirente un beneficio maggiore della somma del valore dei due oggetti isolati e comprati da due acquirenti diversi). Tali oggetti possono essere venduti congiuntamente (asta singola a pluralità di oggetti) o in successione (asta sequenziale). Le aste a pluralità di oggetti non saranno trattate in queste dispense.

Nei paragrafi che seguono si farà principalmente riferimento al caso *IPV* e all'ipotesi che la vendita di un oggetto sia effettuata da un venditore/banditore.[3] Indipendentemente dalle ipotesi relative alle possibili modalità di valutazione del valore dell'oggetto (*IPV*, *IV*, *CV*), supporremo generalmente che il banditore/venditore sia neutrale al rischio. Ovvero che, attraverso l'asta, egli cerchi di rendere massima la differenza tra il valore atteso del *prezzo di aggiudicazione* e la propria valutazione dell'oggetto. Viceversa, le possibili ipotesi relative ai *bidders* compratori saranno due: neutralità o avversione (di vario grado) al rischio. Nel primo caso (individuo indifferente ad un gioco equo) la funzione di utilità del *bidder* sarà una retta crescente nel valore dell'oggetto al netto del pagamento e il *bidder* cercherà di massimizzare, vincendo l'asta, il valore atteso dell'utilità così definita (valutazione meno pagamento). Nel secondo caso (individuo che rifiuta sempre un gioco equo), il valore dell'oggetto al netto del pagamento è argomento di una funzione concava le cui proprietà mostreranno il grado di avversione al rischio del *bidder*. Nei vari casi trattati di seguito preciseremo le ipotesi adottate.

3. La strategia del bidder neutrale al rischio con valutazioni IPV in un'asta ad oggetto singolo

Iniziamo studiando un'asta per la vendita di un oggetto singolo con ipotesi *IPV*.
Assumiamo che:

a) Venga messo all'asta un solo bene/diritto/contratto di esclusiva, non frazionabile né rivendibile in seguito. Lo chiameremo **oggetto**;
b) Ci siano $N \geq 2$ *bidders* **neutrali al rischio** interessati all'acquisto dell'oggetto. N si suppone noto.
c) Ogni *bidder* $i \in N$ conosca solo la propria valutazione dell'oggetto e considera tale propria valutazione,

[3] Più avanti analizzeremo il caso del banditore/compratore che sollecita offerte da N potenziali bidders/venditori, come nel caso dei contratti di fornitura alla pubblica amministrazione.

chiamiamola v_i, come la realizzazione di una variabile casuale v distribuita in modo indipendente secondo una $F(v)$ continua (vedi sotto); le valutazioni non sono, quindi, correlate tra loro; questo giustifica (insieme alla supposizione d) l'ipotesi di valutazioni private indipendenti (*IPV*) visto che le v sono variabili casuali *i.i.d.* **Ovviamente ogni *bidder* osserva solo la sua valutazione, non quelle altrui, e il banditore/venditore non osserva nulla.**

d) Tutti fanno riferimento alla stessa $F(v)$ la cui densità $f(.)$ ha un supporto $V=[\underline{v},\overline{v}]$ per ipotesi tutto positivo. Per via della condivisione della stessa *CDF*, della stessa densità e dello stesso supporto si dice che i *bidders* sono **simmetrici**. Vedremo più avanti che con l'aggettivo simmetrici caratterizzerà anche i *bidders* che basano l'elaborazione delle loro strategia su comuni congetture sui comportamenti altrui. Per iniziale semplicità possiamo al momento ipotizzare anche che $F(v)/f(v)$ sia non decrescente in v.

e) Un'ulteriore ipotesi di ordine generale che facciamo riguarda la motivazione del *bidder*. Questi partecipa all'asta e formula il suo *bid* perché intende massimizzare il valore atteso netto della rendita informativa (surplus, per brevità) che pensa di ottenere vincendo: **vero valore che l'oggetto ha per lei/lui (e che conosce solo lei/lui) meno il pagamento per la sua acquisizione**. Pertanto il *bidder* non cercherà di acquisire l'oggetto pagandolo quanto ella/egli lo valuta davvero: pagare l'oggetto ad un prezzo pari alla vera valutazione sarebbe come portare una somma di denaro dalla tasca destra della giacca alla tasca sinistra senza miglioramento del benessere monetario di chi indossa la giacca.

f) Ogni *bidder* i.mo risponde alla sollecitazione del banditore che gli chiede di fare un *bid* per l'oggetto (vedremo con quale meccanismo). Il *bidder* deve trasformare la sua valutazione in un *bid* che chiameremo b, ovvero deve fare delle offerte basandosi (nel modo che vedremo) sulla propria v. Al fine di descrivere il modo in cui le offerte sono formulate supponiamo che esista nella testa di ogni concorrente $i \in N$ una funzione continua, monotona crescente e derivabile che trasforma le valutazioni in offerte di pagamento. Chiamiamola $b = B(v_i)$ con B uguale per tutti. Supponiamo anche che essa sia invertibile, ovvero che valga anche $v_i = B^{-1}(b_i)$.

Fatte e discusse le suddette ipotesi, analizziamo la strategia di presentazione delle offerte nelle distinte forme d'asta.

Aste al primo prezzo (tutte le forme). Date le assunzioni a) - d) il valore atteso del surplus di ogni *bidder* sarà costituito dal prodotto tra la differenza tra valutazione e pagamento (quest'ultimo uguale al *bid* data la regola del primo prezzo) e probabilità di vittoria, cioè la probabilità di sottoporre un *bid* maggiore di quello di tutti gli altri $N-1$ concorrenti. Per il momento teniamo congelata l'ipotesi che, attraverso la funzione $B(v_i)$, il *bid* dipenda (ovvero, venga fatto dipendere dal *bidder i.mo*) dalla **vera** valutazione v_i attraverso la funzione inversa. Supponiamo che il *bidder* non abbia ancora riflettuto sul fatto che (come emergerà tra breve) basarsi sul vero v_i per formulare la sua funzione di *bid* **sia la cosa migliore che ella/egli possa fare**. Supponendo quindi che l'argomento di $b(.)$ possa essere un qualsiasi valore $x \in V$ e poniamo che il valore atteso del surplus del *bidder i* (Π_i) sia:

$$E[\Pi_i(v_i, b(x_i))] = (v_i - b(x_i))[F(b(x_i))]^{N-1}$$

Come detto, la presenza di un qualsiasi valore $x \in V$ nella funzione di *bid* si deve al fatto che, a questo stadio, non sappiamo ancora se il *bidder* troverà o meno conveniente calibrare il suo *bid* sulla propria vera valutazione. Di ciò ci occuperemo tra breve. Derivando il surplus atteso rispetto a b_i ed uguagliando a zero otteniamo, dopo elementari passaggi:

$$b(x_i) = v_i - \frac{F(x_i)}{(N-1)f(x_i)}$$

dove $f(x_i) = dF(x_i)/dx_i$. Il *bid* non coincide con la valutazione. Il *bid* è pari alla valutazione meno una quantità positiva (una specie di sconto), della quale diremo tra breve.

Scheda 1

Domande di verifica. Che si intende per valutazioni private? È chiara la definizione della probabilità di vincere $[F(b_i)]^{N-1}$? È chiaro che il *bid* è minore della valutazione? Si *intuisce* la rilevanza della neutralità al rischio?

Come detto in precedenza non possiamo ancora dire se il *bidder* i.mo troverà conveniente basarsi sulla sua vera valutazione nel decidere quale offerta sottoporre. Tuttavia, una considerazione già possiamo farla. Se egli "sbaglia" nello scegliere l'argomento *"x"* nella funzione di bid, il secondo termine a destra dell'uguale potrebbe essere troppo alto rendendo, di conseguenza il *bid* troppo basso. Il *bidder i* rischierebbe di perdere l'asta a favore di qualcuno, un *bidder j* qualsiasi, che avendo scelto "meglio" il valore dell'argomento della funzione di *bid* potrebbe offrire di più rispetto a *i* **pur valutando di meno**. Per prevenire questo risultato il *bidder* i.mo deve formulare il *bid* come risultato di una strategia che determini un **equilibrio di Nash** tra le strategie dei *bidders*. Si supponga che il *bidder i* ritenga che ogni altro *bidder* $j \in N$ si basi sulla **sua vera valutazione** ovvero che anche *j* immagini che ogni concorrente *i*, avente una veritiera valutazione v_j, proponga $b = B(v_i)$ dove $B(.)$ è la suddetta funzione che trasforma le valutazioni in *bids*. Se *B* è monotona e continua (vedi sopra) è legittima la nostra ipotesi sulla sua invertibilità e quindi ogni *v* può essere espressa in termini di funzione inversa della corrispondente *b*. Pertanto esiste ed è continua crescente anche la funzione $v_i = B^{-1}(b_i)$, per ogni $i, j, h, z... \in N$. A questo punto anche *i* farà lo stesso ragionamento circa il comportamento di ogni concorrente $j, h, z... \in N$. Fatta questa precisazione sulla "comunanza delle congetture" tra i *bidders*, chiediamoci: quale deve essere la miglior risposta di *i* alla migliore delle possibili strategie seguite da tutti gli altri $j, h, z... \in N$? Per trovarla *i* deve massimizzare il proprio surplus atteso tenendo conto di ciò che fanno gli altri; la risposta alla strategia imputata da *i* ad ogni *j*, **coerente con un *Nash equilibrium* tra *bidders***, il *bidder i* la troverà risolvendo il problema:

$$\underset{b(v_i)}{Max} \quad E[\Pi_i] = E[\Pi_i(v_i, b(v_i))] \equiv [\Pi_i(v_i, b(v_i))] \times \text{Probabilità di Vittoria}$$

che, sostituendo per la funzione inversa del *bid*, diventerà

$$\underset{b(v_i)}{Max} \quad E[\Pi_i] = \Pi_i(v_i, B^{-1}(b_i)) \times \text{Probabilità di Vittoria}$$

Possiamo interpretare il Surplus atteso che il *bidder* cerca di ottenere vincendo l'asta come composto da due parti: la prima $\Pi(.)$ è il guadagno monetario vero e proprio che gli deriverà dalla vittoria dell'asta; la seconda è la probabilità (ancora da definire) di ottenere la indispensabile vittoria. Esaminiamo le due componenti di $E[\Pi]$:

Prima componente (diciamo: deterministica): scarto tra valutazione e pagamento

$$\Pi_i = v_i - B^{-1}(v_i) = v_i - b(v_i)$$

Indica, per un *bidder* **neutrale al rischio**, l'utilità/benessere/surplus arrecatagli dallo scarto tra ***vera*** **valutazione** e pagamento (**che dipende dalla *vera* valutazione**) che, in misura minore della valutazione, ella/egli riuscirà a fare. Può essere interpretato in modo analogo allo scarto tra disponibilità marginale a pagare (nel nostro caso per un solo oggetto) e prezzo di mercato pagato che caratterizza il surplus del consumatore sul mercato per le unità precedenti a quella di equilibrio. Come il consumatore partecipa agli scambi di mercato al fine di massimizzare il suo surplus (utilità), così il *bidder* non partecipa all'asta per acquisire l'oggetto a tutti i costi ma per **rendere massima, attraverso la vincita dell'oggetto, l'utilità derivante dalla differenza tra quanto valuta e quanto paga**. Questo è il vero beneficio che deriva dalla vincita dell'oggetto. Come si vede la prima componente dipenda complessivamente da v_i perché anche b dipende da v_i (vero) e non da un qualsiasi x (tipo, la valutazione vera ridotta secondo un qualche criterio di ingenua furbizia), come nella derivazione precedente. Si tenga presente che se l'individuo fosse avverso al rischio la prima componente sarebbe $U(v_i - b(v_i))$ con $-U''/U'$ (coefficiente ARA di Arrow-Pratt) da precisare di volta in volta.

Seconda componente (probabilità di vittoria)

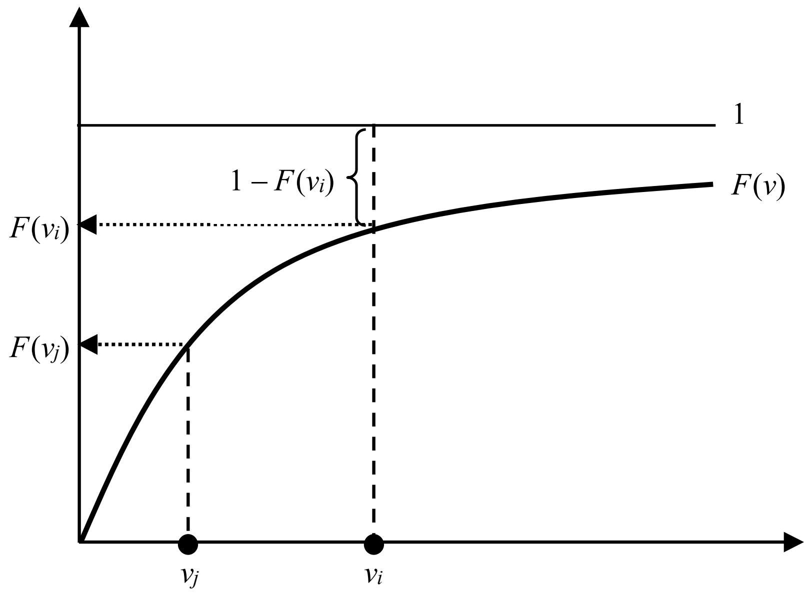
Il *bidder* ottiene il surplus definito sopra solo se vince l'asta. Se perde ottiene un surplus nullo (ma non negativo; diciamo che non ci sono costi di pura partecipazione all'asta). Allora la probabilità di vincere deve essere valutata in modo opportuno, tenendo conto che stiamo seguendo l'ipotesi di valutazioni effettuate secondo il "criterio" *IPV* imputato ai *bidders*. Ricordiamo che abbiamo ipotizzato una stessa "tecnologia" di *bidding*, ovvero una stessa funzione $b(v_i) = B(.)$ che trasforma le valutazioni in *bids*. La funzione $b(.)$ è monotona crescente e continua e quindi, poiché tutti utilizzano la propria vera valutazione dell'oggetto nella funzione di *bid*:

$$b(v_i) \geq b(v_j) \text{ se e solo se } v_i \geq v_j \;\; \forall j \neq i \in N$$

Allora la probabilità di vincere, ovvero di offrire il *bid* più alto di tutti gli altri, dipende dalla valutazione: i vince se la sua valutazione è più alta di quella di ognuno degli altri $N-1$ contendenti. Quest'ultima probabilità, data la $F(.)$ e l'ipotesi che la v.c. sia i.i.d, è

$$P[v_j \leq v_i \forall j \neq i \in N] = [F(v_i)]^{N-1} = [F(B^{-1}(b_i))]^{N-1}.$$

Come mai? Guardiamo la *CDF* di cui alla figura seguente.



Supponiamo che la vera valutazione di i sia v_i (valore che solo lei/lui conosce/osserva). Dalle nozioni di base di calcolo delle probabilità sappiamo che $F(v_i) = \int_0^{v_i} f(v)dv$ indica la probabilità che almeno una valutazione (la chiamo v_j) sia inferiore[4] a v_i (ho posto per semplicità grafica il minimo del supporto a $\underline{v} = 0$) mentre la sopravvivenza $S(v_i) = 1 - F(v_i) = 1 - \int_0^{v_i} f(v_i)dv$ indica la probabilità che almeno una v sia superiore a v_i. Naturalmente il supporto della distribuzione potrebbe non partire da zero ma da un qualsiasi valore e avere o non avere infinito come estremo superiore dell'intervallo. Il supporto potrebbe essere dato da un qualsiasi

[4] Per semplicità escludiamo il caso di valori di v uguali tra loro.

valore minimo e un qualsiasi valore massimo di v come nell'ipotesi generale relativa a V fatta in precedenza. Quindi, data l'ipotesi su *V e sull'assenza di "pareggi"*, e ricordando che $F(\underline{v}) = 0$, abbiamo

$$F(v_i) = \int_{\underline{v}}^{v_i} f(v)dv = \Pr[\underline{v} \leq v_j < v_i] = \Pr[v_j < v_i]$$

In una competizione al più alto *bid* e ristretta a due soli *bidders*, $F(v_i)$ indicherebbe ad esempio la probabilità di avere $v_j < v_i$ e quindi la probabilità di vincere (avendo scartato l'ipotesi dei pareggi!) che avrebbe i se l'unico concorrente fosse j ovvero se $N = 2$ (i contro j). Ma i *bidders* da battere sono $N - 1$. Ricordando che le valutazioni **sono indipendenti**, valutiamo allora la probabilità dell'evento congiunto definito come: v_i maggiore tanto di v_j quanto di v_h indipendentemente dalla permutazione tra j e h. L'evento congiunto caratterizza la probabilità di vittoria quando $N = 3$ *bidders* (i, j, h) ovvero quando esistano 2 avversari di i. Occorre quindi che con $N = 3$:

$$v_j < v_i \wedge v_h < v_i$$

per un j ed un h qualsiasi appartenenti a $N - 1 = 2$, ed entrambi concorrenti di i. Si ribadisce che in questa situazione la permutazione tra j e h è irrilevante dal punto di vista di i. Data l'indipendenza, la suddetta probabilità congiunta è il prodotto delle probabilità, ovvero corrisponderà a $F(v_i) \times F(v_i) = [F(v_i)]^{(3-1=2)}$. Notare come è stato scritto l'esponente. Analogamente, se dobbiamo valutare la probabilità che i abbia la valutazione maggiore in una contesa contro 3 *bidders* diversi da lui (quindi con $N = 4$), la probabilità dell'evento "*i* li batte tutti e 3" è $F(v_i) \times F(v_i) \times F(v_i) = [F(v_i)]^{(4-1=3)}$ e così via sino a che non definisco con:

$$\left[F(v_i)\right]^{N-1} \equiv \Pr\left(v_j < v_i \text{ per ogni } j \neq i \in N\right)$$

la probabilità che i abbia "pescato" la più alta valutazione tra le N possibili ovvero che nessuna delle restanti $N - 1$ sia maggiore della sua. Allora, il problema di massimo per il *bidder i* si scrive:

$$\begin{aligned} &\underset{b(v_i)}{Max}\ E[\Pi_i] \text{ con} \\ &E[\Pi_i] = (v_i - b(v_i)) \times \text{Probabilità di vittoria} \\ &\qquad = (v_i - b(v_i))[F(v_i)]^{N-1} \\ &\qquad = (v_i - b(v_i))\left[F(B^{-1}(b_i))\right]^{N-1} \end{aligned} \tag{1}$$

L'ultima versione della (1) è ottenuta sostituendo $v_i = B^{-1}(b_i)$. In questo modo il *bidder i* starebbe definendo il suo surplus atteso sulla base dei seguenti elementi:

a) una funzione di *bid* basata sulla sua **autentica valutazione** dell'oggetto;
b) la sua migliore strategia (funzione di *bid* che max Π), definita quale **migliore risposta alla migliore tra le possibili strategie che egli può imputare a qualsiasi avversario** $j \in N\text{-}1$;
c) **la sua probabilità di vittoria contro tutti gli $N - 1$ avversari**.

Scheda 2

Domande di verifica. Che si intende per valutazioni private indipendenti nel caso specifico? È chiara la definizione della probabilità di vincere $[F(b_i)]^{N-1}$ e il ruolo dell'ipotesi iid relativa alle v? È intuitiva la differenza rispetto al problema di ottimo da cui il bid $b(x_i)$? Si *intuisce* la rilevanza della neutralità al rischio?

Il *bid* risultante dalla massimizzazione di $E[\Pi_i]$ rispetto al *bid* rappresenta la sua **strategia di equilibrio**. Per ricavarla deriviamo rispetto a $b(v_i)$ ed uguagliando a zero otteniamo

$$b_i^* = b(v_i) = v_i - \underbrace{\frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw}{[F(v_i)]^{N-1}}}_{>0}$$

da cui (2)

$$b_i^* < v_i$$

dove, al numeratore, w è la variabile di integrazione e l'integrale è definito sulla parte del supporto della distribuzione di v compresa tra il minimo e il valore di v realizzatosi per il *bidder i* mentre al denominatore abbiamo la probabilità che ha i di vincere contro N – 1 avversari data la sua valutazione.
La differenza

$$v_i - b_i^* = \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw}{[F(v_i)]^{N-1}} > 0$$

Indica la "rendita informativa" che i ottiene pagando l'oggetto meno di quanto lo valuta. Essa dipende dalla distribuzione di probabilità (comune a tutti) e dal numero dei partecipanti, oltre che, nell'integrale al numeratore, dallo specifico valore di v_i. Da notare che

$$Lim_{N\to\infty} \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw}{[F(v_i)]^{N-1}} = 0$$

La rendita informativa diminuisce all'aumentare del numero dei bidders, date le proprietà di F(v). Il risultato viene accostato a quello relativo alla concorrenza perfetta, per la quale si ritiene che l'esistenza di un numero elevatissimo (ma finito) di imprese azzeri l'extra-profitto.
Si può agevolmente notare che, dalla (2):

$$\frac{db(v_i)}{dv_i} = 1 - \left[\frac{F(v_i)^{2(N-1)} - \left[\int_{v\_}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw \right] \left[(N-1) f(v_i) F(v_i)^{N-2} \right]}{[F(v_i)]^{2(N-1)}} \right]$$
$$= (N-1) \frac{f(v_i)}{[F(v_i)]^N} \int_{v\_}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw > 0 \qquad (3)$$

e che:

$$\frac{d^2 b(v_i)}{dv_i^2} = (N-1) \left\{ \left[\frac{d}{dv_i} \left(\frac{f(v_i)}{F(v_i)^N} \right) \right] \int_{v\_}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw + \frac{f(v_i)}{[F(v_i)]^N} \right\} \qquad (4)$$

Il *bid* è crescente nella valutazione ma non si può dire in generale in che modo. La derivata seconda è non positiva se

$$\frac{d}{dv_i} \left(\frac{f(v_i)}{F(v_i)^N} \right) < 0 \text{ e } \frac{d}{dv_i} \left[\frac{f(v_i)}{F(v_i)^N} \right] \int_{v\_}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw > \frac{f(v_i)}{[F(v_i)]^N}$$

Viceversa, con $\frac{d}{dv_i} \left(\frac{f(v_i)}{F(v_i)^N} \right) > 0$, la derivata seconda è sempre positiva e il *bid* è convesso. Si ricordi tuttavia l'ipotesi di cui al punto d).

L'effetto della variazione di N sul bid (che valutiamo **per pura illustrazione** attraverso la derivata benché N vari nel discreto e non in modo infinitesimale) è

$$\frac{db(v_i)}{dN} = -\frac{\left[\int_{v_-}^{v_i}[F(w)]^{N-1}\ln(F(w))dw\right] - \left[\int_{v_-}^{v_i}[F(w)]^{N-1}dw \ln(F(w))\right]}{[F(v_i)]^{N-1}} > 0$$

perché il numeratore è negativo. Si ricordi che l'aumento di N riduce la rendita informativa cercata e, per tale via, aumenta il bid.
La (3) può essere usata per mostrare che con una distribuzione uniforme tra 0 e 1, la funzione ottima di *bid* è omogenea di grado uno. Applicando il Teorema di Eulero otteniamo

$$\frac{db(v_i)}{dv_i}v_i = (N-1)\frac{v_i f(v_i)}{[F(v_i)]^N}\int_{v_-}^{v_i}[F(w)]^{N-1}dw$$

che con U[0, 1] diventa, sostituendo $f(.) = 1$ ed $F(.) = v_i$:

$$\frac{db(v_i)}{dv_i}v_i = (\frac{N-1}{N})v_i = b(v_i)$$

Utilizzeremo più avanti questa proprietà.
Per esercizio, ricavare) la funzione di *bid* con U[0, 1] dalla (2) e mostrare che essa è lineare. Anche questo risultato verrà usato in seguito.

***Dimostrazione* del risultato relativo alla funzione di *bid* (*facoltativo*, *o se preferite a fiducia*)**

Derivando la funzione di surplus atteso otteniamo

$$-\left[F(B^{-1}(b_i))\right]^{N-1} + (N-1)(v_i - b(v_i))\left[F(B^{-1}(b_i))\right]^{N-2}\frac{dF}{dB(v_i)} = 0$$

Dove:

$$\frac{dF}{dB(v_i)} = \frac{dF}{dB^{-1}(v_i)}\frac{dB^{-1}}{db_i(v_i)} = \frac{dF}{dv_i}\frac{dB^{-1}}{db_i(v_i)}$$

e

$$\frac{dB^{-1}}{db_i(v_i)} = \frac{1}{db_i/dv_i}.$$

Sostituendo

$$-\frac{db_i}{dv_i}[F(v_i)]^{N-1} + (N-1)(v_i - b(v_i))[F(v_i)]^{N-2}\frac{dF}{dv_i} = 0\,.$$

La condizione ottenuta deve valere per tutti i valori di v compresi tra il minimo v e il valore di v del *bidder i.mo* (v_i) (Spiegare intuitivamente perché). Quindi, integrando su tutti i valori da v_- a v_i otteniamo

$$-\int_{v_-}^{v_i}\frac{db}{dw}[F(w)]^{N-1}dw + \int_{v_-}^{v_i}(N-1)(w-b(w))[F(w)]^{N-2}\frac{dF}{dw}dw = 0$$

dove w è la variabile di integrazione. Integrando per parti il secondo integrale si ottiene:

$$-\int_{v_-}^{v_i}\frac{db}{dw}[F(w)]^{N-1}dw + \left\{[F(w)]^{N-1}(w-b(w))\Big|_{w=v_-}^{w=v_i} - \int_{v_-}^{v_i}[F(w)]^{N-1}\left(1-\frac{db}{dw}\right)dw\right\} = 0$$

da cui:

$$-\int_{v_-}^{v_i}\frac{db}{dw}\left[F(w)\right]^{N-1}dw+\left[F(v_i)\right]^{N-1}(v_i-b(v_i))-\int_{v_-}^{v_i}\left[F(w)\right]^{N-1}dw+\int_{v_-}^{v_i}\frac{db}{dw}\left[F(w)\right]^{N-1}dw=0$$

e riaggiustando i termini si ottiene il risultato presentato in precedenza.

Una utile (secondo me…) "dimostrazione alternativa" del risultato relativo alla funzione di *bid* *(facoltativo)*

Derivando la funzione di surplus atteso abbiamo ottenuto

$$-\frac{db}{dv_i}\left[F(v_i)\right]^{N-1}+(N-1)(v_i-b(v_i))\left[F(v_i)\right]^{N-2}\frac{dF}{dv_i}=0 \tag{5}$$

Possiamo interpretare la (5) come un'equazione differenziale di primo grado e del primo ordine a variabili non separabili. Poiché $f(\underline{v})=0$ possiamo imporre la condizione iniziale

$b(\underline{v})=\underline{v}$.

Possiamo riscrivere la (5) come segue:

$$\frac{db}{dv_i}+b(v_i)(N-1)\frac{f(v_i)}{F(v_i)}-v_i(N-1)\frac{f(v_i)}{F(v_i)}=0$$

Dove $f(v_i)=dF/dv_i$. Chiamiamo $(N-1)\frac{f(v_i)}{F(v_i)}=\Lambda(v_i)>0$ e riscriviamo la (5) nella forma

$$\frac{db}{dv_i}+\Lambda(v_i)b(v_i)=\Lambda(v_i)v_i \tag{6}$$

Data una qualsiasi costante arbitraria C_1 la soluzione generale della (6) è

$$\begin{aligned}
b(v_i)&=C_1e^{-\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}+\frac{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})\tilde{v}e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}d\tilde{v}}{e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}}\\
&=C_1e^{-\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}+\frac{\left.e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}\tilde{v}\right]_{\tilde{v}=\underline{v}}^{\tilde{v}=v_i}-\int_{\underline{v}}^{v_i}e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}d\tilde{v}}{e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}}\\
&=C_1e^{-\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}-\underline{v}e^{-\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}+v_i-\frac{\int_{\underline{v}}^{v_i}e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}d\tilde{v}}{e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}}
\end{aligned}$$

Sfruttando la condizione iniziale $b(\underline{v})=\underline{v}=C_1$ la funzione di *bid* diventa:

$$b(v_i)=v_i-\frac{\int_{\underline{v}}^{v_i}e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}d\tilde{v}}{e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}\Lambda(\tilde{v})d\tilde{v}}}$$

e sostituendo $(N-1)\frac{f(\tilde{v})}{F(\tilde{v})}$ al posto di $\Lambda(\tilde{v}_i)$ otteniamo:

$$b(v_i)=v_i-\frac{\int_{\underline{v}}^{v_i}e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}(N-1)\frac{f(\tilde{v}_i)}{F(\tilde{v}_i)}d\tilde{v}}d\tilde{v}}{e^{\int_{\underline{v}}^{v_i}(N-1)\frac{f(\tilde{v}_i)}{F(\tilde{v}_i)}d\tilde{v}}}$$

Sfruttando le proprietà della derivata logaritmica otteniamo:

$$b(v_i) = v_i - \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} e^{\int_{\underline{v}}^{v_i} \frac{d \ln[F(\tilde{v})]^{N-1}}{d\tilde{v}} d\tilde{v}} d\tilde{v}}{e^{\int_{\underline{v}}^{v_i} \frac{d \ln[F(\tilde{v})]^{N-1}}{d\tilde{v}} d\tilde{v}}}$$

$$= v_i - \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} e^{\ln[F(\tilde{v})]^{N-1}} d\tilde{v}}{e^{\ln[F(v_i)]^{N-1}}}$$

$$= v_i - \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} [F(\tilde{v})]^{N-1} d\tilde{v}}{[F(v_i)]^{N-1}}$$

che corrisponde alla (2) se chiamiamo $\tilde{v}$ la variabile di integrazione precedentemente chiamata w. Allora: una complicazione inutile? **No. La derivazione appena conclusa permetterà di evidenziare il ruolo che ha nella definizione del *bid* di equilibrio la funzione di azzardo (*hazard rate*) relativa alla distribuzione di probabilità** della valutazione. Faremo uso della funzione di azzardo più avanti usando distribuzioni di v aventi funzione di azzardo Crescente, Costante e Decrescente. In secondo luogo, abituarsi a vedere le condizioni di ottimo del profitto atteso espresse in termini di equazioni differenziali aiuta "a predisporsi meglio" alla trattazione del caso di *bidders* c.d. asimmetrici, per i quali supporremo che varino le distribuzioni di probabilità e i loro supporti compatti.

Dalla (2) ricaviamo che le **tre forme d'asta al primo prezzo** spingono il *bidder* a **non dichiarare mediante il *bid* la propria vera valutazione**, ovvero ad offrire un *bid* inferiore alla valutazione. Formulare un *bid* in cui la valutazione vera viene ridotta in una misura che dipende dal secondo termine della funzione di *bid* è una strategia dominante per ogni *bidder*.

Scheda 3

Domande di verifica. Che si intende per equilibrio di Nash tra *bidders*? In che modo il *bid* è influenzato dal numero dei partecipanti? Come è stata valutata la probabilità di vittoria? Avete studiato come si caratterizzano le distribuzioni ad *hazard rate* crescente o decrescente? (dare esempi) Conoscete una cdf ad *hazard rate* costante? È prudente usarla?

Un semplice esempio

Supponiamo che le valutazioni private indipendenti v seguano una distribuzione uniforme tra 0 e 1. Quindi la *CDF* è $F(v) = v$ e la sua densità di probabilità è $f(v) = 1$. La CDF di v e il suo supporto sono assunti da tutti gli N *bidders*. Qual è la probabilità che un *bidder* $i \in N$ vinca un'asta al primo prezzo per la vendita di un oggetto singolo?

Vincerà chi proporrà il più alto *bid* e ogni *bid* di equilibrio viene generalmente illustrato nella letteratura semplicemente sostituendo la distribuzione uniforme tra 0 e 1 nella (2) (farlo per esercizio come già chiesto). In quanto segue preferisco ripetere passo dopo passo la dimostrazione che porta alla (2), in modo da illustrare una proprietà del *bid* di equilibrio nel caso della distribuzione uniforme tra 0 e 1.

Per ottenere il proprio *bid* ottimale ogni *bidder* cerca, come sempre, di risolvere il seguente problema

$$\underset{b(v_i)}{Max} \; E\left[\Pi_i\right] = (v_i - b(v_i) \times \text{Probabilità di Vittoria}$$

$$= (v_i - b(v_i))\left[v_i\right]^{N-1}$$

$$= (v_i - b(v_i))\left[B^{-1}(b_i)\right]^{N-1}$$

Quindi

$$\frac{dE\left[\Pi_i\right]}{db(v_i)} = -\left[B^{-1}(v_i)\right]^{N-1} + [v_i - b(v_i)](N-1)\left[B^{-1}(b_i)\right]^{N-2}\frac{dB^{-1}(b_i)}{db_i} = 0$$

Da cui

$$-\frac{db}{dv_i}\left[v_i\right]^{N-1} + (N-1)(v_i - b(v_i))\left[v_i\right]^{N-2} = 0$$

$$-\frac{db}{dv_i}v_i + (N-1)(v_i - b(v_i)) = 0$$

Nel nostro caso però $b(v_i)$ è omogenea di grado uno (vedi sopra la dimostrazione) e quindi $\frac{db}{dv_i}v_i = b(v_i)$.

Allora, sostituendo,

$$-b(v_i) + (N-1)(v_i - b(v_i)) = 0$$

da cui

$$b(v_i) = (\frac{N-1}{N})v_i = v_i - \frac{v_i}{N}$$

che è continua, crescente e derivabile in v_i, decrescente in N (con tutte le riserve su N che non è una grandezza continua) ed omogenea lineare in v_i. Allo stesso tempo è evidente che

$$\lim_{N\to\infty^+} b(v_i) = v_i$$

Se il numero dei *bidders* tende ad infinito si ripropone l'esito del (teorico) mercato perfettamente concorrenziale il cui il prezzo è pari alla valutazione.

Esercizio

Ignorare la omogeneità lineare della funzione di *bid* con v ~ U(0,1) e ricavare la funzione di *bid* seguendo la procedura di cui sopra (la prima indicata).

Asta al secondo prezzo. Nel caso di *SPSB* il vincitore, chiamiamolo il bidder i, paga il *bid* del secondo classificato, chiamiamolo il bidder j. Allora il surplus di i è dato dalla differenza tra la sua valutazione e il suo pagamento dove quest'ultimo è pari al secondo più alto *bid*:

$$\Pi_i = v_i - \max_{j\neq i\in N} b_j$$

il cui valere atteso è

$$\left(v_i - \max_{j\neq i\in N} b_j\right) \times \text{Probabilità di vittoria}$$

dove la probabilità di vittoria è la probabilità che j sia il secondo più alto *bid* **condizionatamente** al fatto che b_i sia il più alto di tutti. Vickrey ricava che per qualsiasi *bidder i*

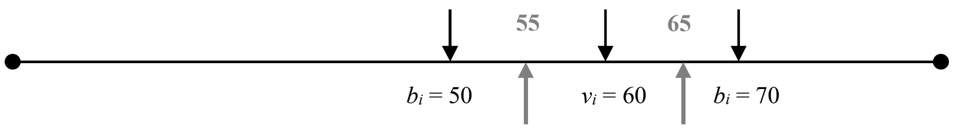
$$b(v_i) = v_i \quad \forall i \in N$$

Dimostrazione [non riportata]

Dalla distribuzione delle statistiche ordinate sappiamo che la distribuzione condizionata di $v_{j:N}$ dato che $v_{i:N}$ è pari ad un certo valore con $j < i$ è la stessa distribuzione della (j – i)esima statistica ordinata ottenuta dal campione di dimensione $N – i$ preso da una popolazione la cui distribuzione è $F(v)$ troncata a sinistra a v_i…

………………

È chiaro che il *bidder i*.mo qualsiasi troverà conveniente offrire la sua vera valutazione, perché tale strategia debolmente dominante gli consente di massimizzare la probabilità di vincere e, nel contempo, non gli riduce il surplus netto atteso, perché il pagamento dipende dal *bid* del secondo “classificato”. In questa trattazione semplificata l’asta *SPSB* sembra quindi essere lo strumento dotato della proprietà di costringere i partecipanti a “dire la verità”. Prima di procedere diamo anche una **spiegazione intuitiva del risultato per cui un *bidder* offre la sua vera valutazione (sapendo che in caso di vittoria pagherà quella del secondo)**. Supponiamo che le valutazioni possibili siano nell’intervallo [10, 100] e che un Signor *i* qualsiasi abbia una valutazione 60. Cosa farà costui? Guardiamo il grafico sottostante. Il segmento indica le valutazioni (continue) possibili, da un minimo (il punto iniziale a sinistra, 10) al massimo (il punto estremo a destra 100). Frecce e numeri riportati sotto il segmento indicano le valutazioni dei partecipanti; frecce e numeri riportati sopra il segmento indicano i loro *bids*.



Il Signor *i* ha una valutazione v_i dell’oggetto pari a 60 euro e sa che se offrisse un *bid* minore di 60 (diciamo 50) e ci fosse un *bidder* che valutasse 55 e offrisse 55, quest’ultimo vincerebbe l’asta pur avendo una valutazione inferiore alla sua. L’unico modo che il Signor *i* ha per evitare ciò è offrire 60 (tanto poi pagherà 55, nell’esempio con un surplus di 5). Nello stesso tempo, come è ovvio, al Signor *i* non conviene presentare un *bid* superiore a 60 (diciamo 70) perché lo sconosciuto di cui sopra potrebbe avere una valutazione di 65 e offrire un *bid* pari a 65. In questo caso il Signor *i* vincerebbe l’asta offrendo 70 ma pagherebbe 65, ovvero 5 euro oltre la sua valutazione. Morale: in un’asta al secondo prezzo con ipotesi *IPV* (vedi sopra) i *bidders* neutrali al rischio offrono un *bid* coincidente con la propria valutazione.

Scheda 4

Domande di verifica. È chiaro perché il surplus atteso del vincitore è costruito usando la distribuzione congiunta dei primi due migliori (più alti) *bids*, e non di tutti gli *N bids*? Perché il signor *i* non troverà conveniente fare un *overbid*, cioè porre $b > v$? In cosa consiste la rendita che ottiene il signor *i* vincendo l’asta?

L’asta *SPSB* è quindi rivelatrice della valutazione: il *bidder* offre il vero valore (per lui/lei) del contratto quale risultato di una strategia (debolmente) dominante. Però non paga quanto rivela.

Un altro modo per ricavare il bid ottimo nell’asta al primo prezzo (Milgrom e Segal, 2002) *facoltativo*

Torniamo alla definizione di surplus

$$\Pi_i = (v_i - b(v_i))\left[F(B^{-1}(b_i))\right]^{N-1}$$

Se b è una strategia simmetrica di equilibrio definita su un insieme di strategie di *bid* crescenti nelle valutazioni, il surplus di equilibrio dato v_i possiamo interpretarlo come

$$\Pi_i = \max_{b(v_i)}(v_i - b(v_i))\left[F(B^{-1}(b_i))\right]^{N-1}$$

che possiamo interpretare come una funzione di massimo valore del surplus (una specie di utilità indiretta) in cui $db_i(v_i)/dv_i = 0$ perché il *bid* è quello di equilibrio. Allora per il teorema dell’inviluppo

$$\frac{d}{dv_i}\Pi_i = \left[F(B^{-1}(b_i))\right]^{N-1} = \left[F(v_i)\right]^{N-1}$$

Integrando per tutti i valori di v tra il minimo e v_i abbiamo

$$\Pi_i(v_i) = \Pi_i(\underline{v}) + \int_{\underline{v}}^{v_i}\left[F(w)\right]^{N-1}dw = \int_{\underline{v}}^{v_i}\left[F(w)\right]^{N-1}dw$$

poiché $\Pi_i(\underline{v})$ lo possiamo porre pari a zero quando la valutazione è quella minima (chi ha la valutazione più bassa non vince niente se $N > 1$ e non ha surplus!). Sostituendo nel surplus e ricordando che $v_i = B^{-1}(b_i)$ abbiamo

$$b(v_i) = v_i - \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i}\left[F(w)\right]^{N-1}dw}{\left[F(v_i)\right]^{N-1}}$$

Che coincide con la prima versione ottenuta. Su necessità e sufficienza vedere Milgrom (2004 Teoremi 4.2 e 4.6).

4 Il Teorema dell'Equivalenza del Ricavo con IPV e neutralità al rischio

I risultati illustrati permettono di definire alcuni punti fermi nell'analisi dei meccanismi d'asta, iniziando dal risultato noto come Teorema dell'Equivalenza del Ricavo. Detti punti fermi sono rilevanti ai fini dell'applicazione delle aste a problemi di regolamentazione.

4.1. Il Teorema dell'Equivalenza del Ricavo atteso

Nel suo enunciato più semplice il Teorema dell'equivalenza del ricavo del venditore dice che **le quattro forme d'asta per la vendita discusse sin qui danno al banditore/venditore lo stesso ricavo in valore atteso**. Ovvero che la speranza matematica del prezzo che il venditore riscuoterà è la stessa indipendentemente dalla forma in cui è condotta l'asta. Quindi, **neppure nel caso di asta SPSB il vincitore paga la rendita che pensa di ottenere dall'asta.**

Del teorema dò prima la dimostrazione generale [volendo **la si può saltare**] e poi quella, più semplice, relativa al caso di distribuzione uniforme.

[passare subito all'esempio della distribuzione uniforme]

Nell'asta al secondo prezzo il vincitore paga un prezzo pari alla valutazione del secondo classificato (che offre il secondo più alto *bid*). Ciò vuol dire che egli ottiene una rendita attesa data dalla differenza tra la sua vera valutazione e il prezzo pagato, ossia la seconda più alta valutazione. Possiamo indicare questa differenza come differenza tra le statistiche ordinate delle valutazioni (Arnold et al., 2008 è il testo più semplice ma completo su *Order Statistics*[5]) nel modo seguente. Chiamiamo $v_{(N:N)}$ e $v_{(N-1:N)}$ le due statistiche ordinate più alte tra N possibili e poniamo

$$\Lambda(v_{(N:N)}, v_{(N-1:N)}) = v_{(N:N)} - v_{(N-1:N)} = \frac{1-F\left(v_{(N:N)}\right)}{f\left(v_{(N:N)}\right)}$$

in virtù delle proprietà delle statistiche ordinate. Usando tale differenza possiamo esprimere il valore atteso dal venditore/banditore nelle due aste *SPSB* e *FPSB* come differenza di statistiche ordinate e provare in generale il Teorema dell'equivalenza. Iniziamo però riportando in modo compatto la dimostrazione originale fornita da Vickrey nel 1961. Sia:

[5] Barry C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja (2008), *A First Course in Order Statistics*, SIAM. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia

$$E[R^{FP}] = b_i \text{Prob}\left[b_i = Max_{\forall j \in N} b_j\right]$$

$$= b_i\left[[\text{Prob}(B(v_i) > B(v_1))] \times [\text{Prob}(B(v_i) > B(v_2))] \times \cdots \times [\text{Prob}(B(v_i) > B(v_{N-1}))]\right]$$

$$= b_i\left[[\text{Prob}(B^{-1}(b_i) > B^{-1}(b_1))] \times [\text{Prob}(B^{-1}(b_i) > B^{-1}(b_2))] \times \cdots \times [\text{Prob}(B^{-1}(b_i) > B^{-1}(b_{N-1}))]\right]$$

$$= b_i\left[[\text{Prob}(v_i > v_1)] \times [\text{Prob}(v_i > v_2)] \times \cdots \times [\text{Prob}(v_i > v_{N-1})]\right]$$

$$= [F(v_i)]^{N-1}[v_i - F(v_i)/(N-1)f(v_i)]$$

$$= v_i[F(v_i)]^{N-1} - \frac{[F(v_i)]^N}{(N-1)f(v_i)}$$

Nella misura del valore atteso di R^{FP} non compare il *bid* e ciò spinge Vickrey (1961) ad affermare che il valore atteso del ricavo del banditore/venditore è indipendente dalle regole dell'asta. In particolare egli afferma:

… the two methods of auctioning produce, ..., the same average expected price and hence the same average expected gains to the buyers and sellers, respectively. Vickrey (1961, 17)

a conferma della sua iniziale aspettativa che

The analysis reveals a likelihood that certain modifications of current practices in these areas, more specifically by making the award price equal to the second highest (or lowest) bid price rather than the highest bid price, might prove generally beneficial in improving the allocation of resources without being as prejudicial to the interests of sellers (or buyers) as might at first seem to be the case. (Vickrey, 1961, 8)

Passiamo adesso all'analisi del ricavo atteso nelle due forme d'asta al primo e al secondo prezzo. Anche in questo caso occorre sempre tenere in mente la fondamentale intuizione di Vickerey circa il comportamento dei *bidders* in un'asta all'inglese:

The normal result (among rational bidders!) is that the bidding will stop at a level approximately equal to the second highest value among the values that the purchasers place on the item, since at that point there will be only one interested bidder left; the object will then be pur- chased at that price by the bidder to whom it has the highest value. (Vickrey, 1961, 14).

Ciò ripetuto esaminiamo i due casi rilevanti.

a) *Caso* FPSB.

Sia

$$v_{(1:N)} < v_{(2:N)} < \cdots < v_{(N:N)}$$

la serie crescente delle N statistiche ordinate delle valutazioni (Arnold et al. 2008, cap. 1). La densità della più alta statistica ordinata $v_{(N:N)}$ è

$$f_{(N:N)}(v) = N\left[F(v)\right]^{N-1} f(v)$$

Ricordando che il *bid* di equilibrio nell'asta IPV al primo prezzo, per qualsiasi bidder i, è

$$b(v_i) = v_i - \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} \left[F(w)\right]^{N-1} dw}{\left[F(v_i)\right]^{N-1}}$$

dove *F(v)* è la cdf originaria delle valutazioni. Di conseguenza il valore atteso del pagamento $E[R]$ ipotizzato da parte di un banditore **che conosce il modello di comportamento** dei *bidders* in un'asta al primo prezzo è

$$\begin{aligned} E[R^{FP}] &= E[b(v_i) \times \Pr(v_i = v_{(N:N)})] \\ &= \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} b(v_i) f_{(N:N)}(v) dv \\ &= \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} \left[v_i - \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw}{[F(v_i)]^{N-1}} \right] f_{(N:N)}(v_i) dv \\ &= N \left\{ \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} v_i [F(v_i)]^{N-1} f(v) dv - \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} \left[\int_{\underline{v}}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw \right] f(v_i) dv \right\} \end{aligned}$$

dove[6] $f_{(N:N)}(v_i) = N[F(v_i)]^{N-1} f(v_i)$.

La prima parte del termine tra parentesi quadra moltiplicata per N è il valore atteso di un v_i qualsiasi **quando questo corrisponde alla valutazione più alta**. Quindi è il valore atteso della più alta valutazione. La seconda parte è il valore atteso del termine indicato dall'integrale interno tra parentesi quadra. Questo, usando la funzione del bid ottimo, corrisponde a $\left[v_i - b(v_i)\right]\left[F(v_i)\right]^{N-1}$ che possiamo interpretare come lo scarto positivo tra valutazione e pagamento per la probabilità di vincere praticato da tutti gli N bidders, compreso quello con la valutazione più alta. Quindi, il banditore non può aspettarsi di ricevere un pagamento pari al valore atteso di $v_{(N:N)}$ (primo termine della parentesi graffa) ma più realisticamente deve aspettarsi che il pagamento corrisponda a tale valore atteso **ridotto di un termine che dipende dal valore atteso della rendita informativa** del *bidder* con la valutazione più alta e che è determinato dalla strategia di equilibrio seguita da quest'ultimo. Intuitivamente: se l'asta non estrae completamente il surplus del vincitore, il banditore/venditore non può aspettarsi di incassarlo.

b) *Caso* SPSB.

Il caso dell'asta al secondo prezzo è solo un po' più complicato.

Sia, nuovamente,

$$v_{(1:N)} < v_{(2:N)} < \cdots < v_{(N-1:N)} < v_{(N:N)}$$

la serie crescente delle statistiche ordinate delle valutazioni. Considerando le regole dell'asta (vittoria con il proprio *bid* se più alto di tutti gli altri e pagamento pari al secondo più alto *bid*) ricordiamo il risultato finale dell'asta IPV al secondo prezzo:

---

[6] Ricordiamo che in generale data una qualsiasi *F(v)*:

$$f_{(h:N)}(v) = \frac{N!}{(h-1)!(N-h)!}\left[F(v)\right]^{h-1}\left[1-F(v)\right]^{N-h} f(v)$$

è la pdf per la posizione *h*.ma. Quindi con $h = N$ (valore più alto), abbiamo con F data da U(0,1): $f_{(N:N)}(v) = N v_i^{N-1}$ e ponendo $h = N-1$ (seconda realizzazione più alta, ovvero inferiore solo a quella relativa alla posizione N) abbiamo $f_{(N-1:N)}(v) = N(N-1)\left[v_i^{N-2} - v_i^{N-1}\right]$. Verranno tutte usate successivamente.

$$b(v_{(N:N)}) = v_{(N:N)} \text{ bid vincente}; \; v_{(N-1:N)} = \text{pagamento del vincitore} = b(v_{(N-1:N)}).$$

Definiamo in primo luogo la densità dei primi due più alti valori di v. Nel nostro caso quello che ci interessa è la densità congiunta della **seconda** più alta statistica ordinata delle valutazioni $v_{N-1:N}$ e di quella **più alta** $v_{N:N}$. Devono infatti verificarsi congiuntamente due eventi: vince il *bidder i* perché ha la valutazione più alta $v_{N:N}$ e paga la valutazione appena più bassa che è pari a $v_{N-1:N}$. La densità congiunta delle due più alte statistiche ordinate è[7]

$$f_{(N-1,N:N)}(v_{N-1:N}, v_{N:N}) = N(N-1)[F(v_{N-1:N})]^{N-2} f(v_{N-1:N}) f(v_{N:N})$$

Allora

$$\begin{aligned}
E[R^{SP}] &= E[v_{N-1:N} \times \Pr\left((b(v_i) = v_{(N:N)} \vee b(v_j) = v_{(N-1:N)}\right)] \\
&= \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} \left[\int_{\underline{v}}^{v_i} wN(N-1)[F(v_{N-1:N})]^{N-2} f(v_{N-1:N}) f(v_{N:N}) dw\right] f(v_i) dv_i \\
&= N[\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} v_i [F(v_i)]^{N-1} f(v_i) dv_i - \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} \int_{\underline{v}}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw f(v_i) dv_i] \\
&= E[R^{FP}]
\end{aligned}$$

la cui interpretazione è identica a quella data per l'asta al primo prezzo.

Esempio con distribuzione uniforme

Possiamo dare del teorema una dimostrazione semplice usando solo la distribuzione uniforme standard. Usando il risultato di cui sopra ricordiamo che nel caso di N *bidders* neutrali al rischio e di distribuzione uniforme di v su [0,1] nel caso di un'asta al primo prezzo il *bid* ottimo è:

$$b(v_i) = \frac{N-1}{N} v_i$$

Il banditore/venditore si aspetta di ricevere il *bid* offerto da chi ha la più alta valutazione (la più alta statistica ordinata di v). Il prezzo che incasserà sarà quindi il valore atteso di $b(v_i)$ offerto da chi ha la più alta valutazione, ovvero:

$$\begin{aligned}
E[R^{FP}] &= \int_0^1 b(v_i) \Pr[v_i = \max v] dv_i = \int_0^1 \left[\frac{N-1}{N} v_i\right] N v_i^{N-1} dv_i \\
&= (N-1) \int_0^1 v_i^N dv_i \\
&= (N-1) \left.\frac{v_i^N}{N+1}\right|_{v_i=0}^{v_i=1} \\
&= \frac{(N-1)}{(N+1)}
\end{aligned}$$

Lo stesso tipo di calcolo applicato all'asta al secondo prezzo genera

[7] In generale la densità congiunta delle posizioni l.ma ed m.ma con $1 \le l \le m \le N$ è:

$$f_{(l,m:N)}(v_{l:N}, v_{m:N}) = \frac{N!}{(l-1)!(m-l-1)!(N-m)!} \left([F(v_l)]^{l-1} [F(v_m) - F(v_l)]^{m-l-1} [1 - F(v_m)]^{N-m} f(v_l) f(v_m)\right)$$

con $v_l < v_m$.

$$E[R^{SP}] = \int_0^1 (b(v_i) = v_j)\Pr[v_j = \text{seconda più alta statistica ordinata di } v]dv_j$$
$$= \int_0^1 \left[v_j \right] N(N-1) v_j^{N-2}(1-v_j)dv_j$$
$$= N(N-1)\int_0^1 \left[v_j^{N-1} - v_j^{N} \right]dv_j$$
$$= \left[N(N-1) \right] \left(\frac{v_j^N}{N} - \frac{v_j^{N+1}}{N+1} \right) \Bigg|_{v_j=0}^{v_j=1}$$
$$= \frac{(N-1)}{(N+1)}$$

Pertanto, $E[R^{SP}] = E[R^{FP}]$ e ciò implica che **il valore atteso del ricavo non cambia a seconda della forma in cui è condotta l'asta**. **In nessun caso il vincitore pagherà la sua vera valutazione dell'oggetto**. Nel caso della distribuzione uniforme standard trattata nell'esempio, senza asimmetria informativa, se la valutazione massima dei *bidders* fosse pari a 1, il banditore dovrebbe teoricamente incassare 1 e invece incassa $(N-1)/(N+1)$ con un mancato introito pari a $2/(N+1)$. Se ci fossero solo 2 *bidders* il ricavo atteso sarebbe 1/3 e il mancato ricavo 2/3.

Inoltre, poiché $Lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N+1} \right) = 1$, il ricavo atteso aumenta con il numero dei partecipanti.

4.2 L'uso di un prezzo di riserva.

Chiediamoci adesso cosa sarebbe successo se il banditore avesse deciso di imporre un prezzo di riserva al di sotto del quale non avrebbe accettato offerte (minimo pagamento per vincere l'oggetto). Sia $0 < \delta < 1$ il prezzo di riserva e valutiamo $E[R^{FP}]$. Per farlo dobbiamo preliminarmente chiederci quanto avrebbe offerto *i* con la nuova regola. Facendo sempre l'ipotesi di uniforme standard, la cumulata di v_i rilevante per i pagamenti in asta adesso è

$$F(v_i) = \frac{v_i - \delta}{1-\delta}$$

e il *bid* ottimo al primo prezzo è

$$b_i(v_i) = v_i - \frac{\int_\delta^{v_i} \left[F(w) \right]^{N-1} dw}{\left[F(v_i) \right]^{N-1}} = v_i - \frac{\int_\delta^{v_i} \left[\frac{w-\delta}{1-\delta} \right]^{N-1} dw}{\left[\frac{v_i-\delta}{1-\delta} \right]^{N-1}}$$
$$= v_i + \frac{\left(\frac{v_i-\delta}{1-\delta} \right)^{1-N} (\delta - 1) \left(\frac{-v_i+\delta}{-1+\delta} \right)^N}{N}$$
$$= v_i + \left(\frac{-v_i+\delta}{N} \right)$$
$$= \left(\frac{N-1}{N} \right) v_i + \frac{\delta}{N}$$

Il *bid* aumenta sia pure in maniera irrisoria (il massimo l'aumento sarebbe pari a $1/N$) e in modo inversamente proporzionale al numero dei partecipanti. Il valore atteso del prezzo che il venditore/banditore si aspetta di ricevere diventa

$$E[R^{FP}] = \int_\delta^1 b(v_i)\Pr[v_i = \max v]dv_i = \int_\delta^1 \left[\frac{N-1}{N}v_i + \frac{\delta}{N}\right] N \frac{\left(\frac{v_i-\delta}{1-\delta}\right)^{N-1}}{1-\delta} dv_i$$
$$= \frac{N-1}{N+1} + \frac{2\delta}{N+1}$$
$$= E[R^{SP}] = \int_\delta^1 v_i N(N-1) \frac{\left(\frac{v_i-\delta}{1-\delta}\right)^{N-2}\left(1-\frac{v_i-\delta}{1-\delta}\right)}{1-\delta} dv_i$$

che è comunque maggiore del precedente valore atteso non limitato inferiormente e soddisfa il Teorema dell'Equivalenza del Ricavo atteso. Non cambia invece il risultato per cui l'aumento del numero dei partecipanti aumenta il valore del ricavo atteso.
Ovviamente se $\delta = 0$ si torna alla situazione priva di prezzo di riserva.
Notare che il risultato si basa sull'ipotesi che N non cambi dopo l'annuncio del prezzo di riserva. O che se il prezzo di riserva è comunicato contestualmente all'annuncio dell'asta, N deve essere inteso come il numero dei bidders che inviano offerte avendo una valutazione $\in [\delta, 1]$.

Esempio

Ricavare che con $N = 5$ e $\delta = 0.5$, i due valori attesi di cui sopra valgono 5/6.

$$E[R^{FP}] = \int_{0.5}^1 \left(\frac{4v}{5} + \frac{0.5}{5}\right)\left(\frac{5}{0.5}\right)\left(\frac{v_i - 0.5}{0.5}\right)^4 dv_i = 0.8\overline{3} = E[R^{SP}] = \int_{0.5}^1 v_i \left(\frac{20}{0.5}\right)\left(\frac{v-0.5}{0.5}\right)^3 \left(1 - \frac{v_i - 0.5}{0.5}\right) dv_i$$

4.3 Applicazione. Asta SPSB per un franchise alla Loeb-Magat [NO]

In un mercato **due** imprese si contendono il diritto ad esercitare l'offerta in condizioni di monopolio secondo i criteri della regolamentazione definiti da Löb-Magat (1979) ovvero: prezzo libero (come a casa di Fantozzi…) e devoluzione all'impresa dell'intero surplus netto dei consumatori (come per la mega impresa siderale per cui lavora Fantozzi). Applicando la "visione" di Demsetz, per rimediare all'eccessivo "sbilanciamento distributivo" il diritto ad esercitare l'attività in questione viene messo all'asta e il ricavato impiegato per risarcire parzialmente i consumatori della perdita del surplus. Supponendo

a) Nota la domanda di mercato:

$p = 100 - q$ (inversa)
$q = 100 - p$ (diretta)

b) Ignoti al banditore e ai concorrenti i costi delle imprese: ogni impresa osserva solo il proprio costo e ritiene che il costo (proprio e altrui) sia una variabile casuale distribuita in modo identico e indipendente secondo una qualche funzione di distribuzione. Supponiamo che ciascuno dei 2 osservi i propri costi dati da

$C_1 = 50 + 20q$
$C_2 = 100 + 15q$

c) Asta SPSB per il contratto

Dopo aver valutato se siamo in presenza delle condizioni che giustificano l'ipotesi IPV, determinare:

1) Il valore del contratto per i due contendenti
2) Il valore del bid dei due contendenti
3) Il vincitore dell'asta e il suo pagamento

1) L'asta è certamente IPV perché il valore del contratto dipende dal profitto che, a sua volta (data la domanda e la regola L-M) dipende solo dai costi dell'impresa che stiamo supponendo distribuiti iid. Di conseguenza il valore (al lordo del bid) del contratto coincide con il profitto massimo che si otterrebbe operando come monopolista assoggettato alle regole di Löb-Magat. Quindi

$$\Pi_1 = (100 - p_1)p_1 - 50 - 20(100 - p_1) + \underbrace{\int_{p_1}^{100} (100 - \hat{p}_1)d\hat{p}_1}_{\substack{\text{Surplus Netto Consumatori} \\ \text{usando domanda diretta} \\ \text{(fare grafico)}}}$$

E corrispondentemente

$$\Pi_2 = (100 - p_2)p_2 - 100 - 15(100 - p_2) + \underbrace{\int_{p_2}^{100} (100 - \hat{p}_2)d\hat{p}_2}_{\substack{\text{Surplus Netto Consumatori} \\ \text{usando domanda diretta} \\ \text{(fare grafico)}}}$$

Ogni *bidder* ricava le condizioni del massimo profitto. Per il *bidder* 1 queste si trovano nel modo seguente. Il massimo profitto richiede

$$\frac{d\Pi_1}{dp_1} = 100 - 2p_1 + 20p_1 - 100 - p_1 = 0$$

Da cui

$$p_1 = 20 = \text{MC}_1$$
$$q_1 = 80$$

Usando quei valori, il suo profitto (con la regolamentazione Löb e Magat) sarà

$$\Pi_1 = (20 \times 80) - 50 - (20 \times 80) + \int_{20}^{100} (100 - p_1)dp_1$$
$$= -50 + \left[\left(100p_1 - \frac{1}{2}p_1^2 \right) \Bigg|_{p_1=20}^{p_1=100} \right] = -50 + 3200 = \mathbf{3150}$$

Per il *bidder* 2 le condizioni si trovano nel modo seguente

$$\frac{d\Pi_2}{dp_2} = 100 - 2p_2 + 15p_1 - 100 + p_2 = 0$$

Da cui

$$p_1 = 15 = \text{MC}_2$$
$$q_1 = 85$$

Usando quei valori il suo profitto sarà

$$\Pi_1 = (15\times 85) - 100 - (15\times 85) + \int_{15}^{100} (100 - p_2)dp_2$$
$$= -100 + \left[\left(100p_2 - \frac{1}{2}p_2^2 \right) \Bigg|_{p_2=15}^{p_2=100} \right] = -100 + 3612.5 = \mathbf{3512.5}$$

b) Date le regole dell'asta al secondo prezzo la strategia ottima è quella di offrire un *bid* pari alla propria vera valutazione del contratto (profitto). Di conseguenza

$$BID_1 = 3150$$
$$BID_2 = 3512.5$$

c) Il vincitore sarà il *bidder* 2 che però pagherà 3150. La differenza 3512.5 – 3150 = **362.5** rappresenta il guadagno netto del *bidder* 2.

Sulla base dei risultati ottenuti valutare **se**:

a) L'asta ha selezionato il *bidder* più efficiente
b) L'asta gli ha fatto pagare un "prezzo" pari alla sua valutazione o gli ha dovuto lasciare un po' di rendita derivante da asimmetria informativa
c) I consumatori ricevono una piena compensazione ex-ante (*competition for the field*) per la perdita del surplus che subiranno ex post (*competiton within the field*)

Risposte

a) L'asta ha selezionato l'impresa con i minori costi marginali e, nell'esempio, medi (la più efficiente) data la q prodotta;
b) Il vincitore non paga l'intera valutazione (sconosciuta ex-ante al banditore e al concorrente avversario) e conserva una rendita informativa di 362.5;
c) I consumatori non ricevono una compensazione piena per i "danni" derivanti dal contratto Löb-Magat. Infatti con un prezzo di 15 il loro surplus netto sarebbe

$$CS^N = \int_{15}^{100} (100 - p_2)dp_2 = 3612.5 \text{ (vedi sopra)}$$

ma ricevono 3150 ovvero il bid vincente. La differenza è 3612.5 – 3150 = 462.5. Questa corrisponde alla rendita informativa del vincitore (362.5) aumentata dei suoi costi fissi (100). Con il ricorso all'asta, come proposto dall'economista statunitense Harold Demsetz (1930 – 2019), il surplus netto dei consumatori si riduce di un importo che serve, da un lato, a pagare i costi fissi [come nel caso della nazionalizzazione con perfetta informazione in cui abbiamo, seguendo Hotelling, $p = MC$ e un prelievo in somma fissa dal surplus dei consumatori di un importo pari alla perdita di bilancio dell'impresa pubblica, vedi Cap. I] **cui si aggiunge però la rendita informativa del vincitore**.

Domande ulteriori

a) Cosa cambierebbe con un'asta al primo prezzo?
b) Sfruttando la linearità della domanda, rifare tutto l'esercizio misurando il surplus del consumatore come area di un triangolo (fare prima il grafico)

---

5. La strategia ottima di bidders "asimmetrici" [NO]

Una ipotesi implicita dell'evocazione dei meccanismi d'asta all'interno di una regolamentazione alla Demsetz del monopolio naturale è che i partecipanti siano simmetrici *ex-ante*: si suppone (sotto voce) che essi condividano la stessa distribuzione di probabilità delle valutazioni (o dei costi) e il relativo campo di esistenza, c.d. supporto. Che succede se una o entrambe le ipotesi vengono meno? In questo paragrafo eliminiamo le ipotesi relative all'unicità della distribuzione di probabilità e/o del relativo supporto e ricaviamo le relative implicazioni in termini di strategia dei *bidders* in aste *IPV* volte ad assegnare ad un'impresa privata un'attività del *tipo Löb e Magat*.

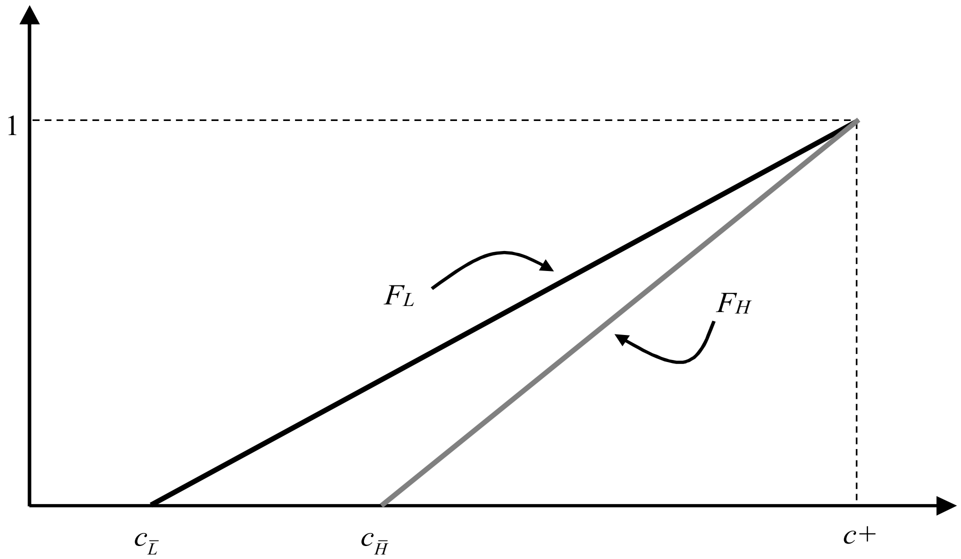
Supponiamo che alla regolamentazione alla Demsez[8] (contratto alla Löb e Magat messo all'asta con la regola *FPSB*) siano interessati due gruppi di imprese: il gruppo L (bassi costi; loro informazione privata) e il gruppo H (alti costi; loro informazione privata) ciascuno di pari numerosità n. Per costi bassi o alti intendiamo che la variabile casuale c di ciascun gruppo è distribuita in modo indipendente secondo le due cdf (note a tutti) seguenti:

$$F_L(c) \text{ da cui } f_L(c) = \frac{dF_L(c)}{dc} \text{ definita sull'insieme compatto } [c_L^-, c^+] \text{noto a tutti}$$

$$F_H(c) \text{ da cui } f_H(c) = \frac{dF_H(c)}{dc} \text{ definita sull'insieme compatto } [c_H^-, c^+] \text{noto a tutti}$$

con $c_L^- < c_H^-$. Quest'ipotesi è basata sulla convinzione che mentre è ragionevole porre un limite superiore comune all'inefficienza ($c+$ comune a tutti), viceversa i guadagni di efficienza (ampiezza dei domini, o scarto rispetto a $c+$) possono variare tra gruppi di imprese in base alle più disparate circostanze.

Dette assunzioni sulle distribuzioni dei costi traducono questa ipotesi: quelli del gruppo L formulano una congettura sui costi di quelli del gruppo H più "ottimistica" della congettura che quelli del gruppo H formulano a proposito dei costi di quelli del gruppo L. In altri termini, gli L suppongono che la F_H domini la F_L nel senso della dominanza stocastica del primo ordine ($F_H(c) \leq F_L(c)$). A sua volta, ciò implica che ogni impresa del gruppo L pensa che ogni altra impresa di tale gruppo abbia costi minori di quelli del gruppo H e, viceversa, ogni impresa del gruppo H pensa che ogni altra impresa di tale gruppo abbia costi maggiori di quelli del gruppo L. Inoltre dalle ipotesi ricaviamo che: *a*) il valor medio dei costi degli L è minore di quello dei costi degli H e che l'opposto valga per le varianze; *b*) $F_H(c)/F_L(c)$ è crescente in c; *c*) $1 - F_i(c)/f_i(c)$ con $i = (L, H)$ è decrescente in c. La figura seguente illustra le *CDF* nel caso di distribuzioni uniformi le cui proprietà sono riassunte nel Box 2.



[8] Per il caso di *bidders* asimmetrici che comprano un oggetto, vedi Krishna (2010, 47 ss.).

Box 2

$$F_L = U(c_L^-, c^+) = \frac{c_L - c_L^-}{c^+ - c_L^-} \text{ con } f_L = \frac{1}{c^+ - c_L^-} \text{ da cui } \frac{f_L}{F_L} = \frac{1}{c_L - c_L^-} \text{ e } h_L = \frac{1}{c^+ - c_L^-}$$

$$F_H = U(c_H^-, c^+) = \frac{c_H - c_H^-}{c^+ - c_H^-} \text{ con } f_H = \frac{1}{c^+ - c_H^-} \text{ da cui } \frac{f_H}{F_H} = \frac{1}{c_H - c_H^-} \text{ e } h_H = \frac{1}{c^+ - c_H^-}$$

Segue che:

$$\frac{F_H}{F_L} = \left(\frac{c^+ - c_H^-}{c^+ - c_L^-}\right)\left(\frac{c_H - c_H^-}{c_L - c_L^-}\right) \text{con } \frac{\mathrm{d}}{dc}\left(\frac{F_H}{F_L}\right) = \left(\frac{c^+ - c_H^-}{c - c_L^-}\right)\frac{\left(c - c_L^-\right) - \left(c - c_H^-\right)}{\left(c - c_L^-\right)^2} > 0$$

$$\frac{1 - F_H}{1 - F_L} = \ (\textbf{fare per esercizio}) \text{ con } \frac{\mathrm{d}}{dc}\left(\frac{1 - F_H}{1 - F_L}\right) = 0 \ (\textbf{fare per esercizio})$$

Commentare.

Allora il valore atteso del profitto di un'impresa *i* qualsiasi appartenete al gruppo *L* sarà (ricordare l'ipotesi di indipendenza)

$$\begin{aligned}
\underset{b(c_L^i)}{Max}\ E\left[S_L^i\right] &= \left[b(c_L^i) - c_L^i\right] \times (\text{Probabilità di Vittoria contro } (n\text{ - }1) \text{ imprese del gruppo L} \\
&\qquad \text{se } i \text{ ha costi } c_L^i) \times (\text{Probabilità di Vittoria contro gli } n \text{ avversari} \\
&\qquad \text{del gruppo H se } i \text{ ha costi } c_L^i) \\
&= \left[b(c_L^i) - c_L^i\right]\left[1 - F_L(c_L^i)\right]^{n-1}\left[1 - F_H(c_L^i)\right]^n \\
&= \left[b(c_L^i) - c_L^i\right]\left[1 - F_L(B_L^{-1}(b^i))\right]^{n-1}\left[1 - F_H(B_L^{-1}(b^i))\right]^n
\end{aligned}$$

dove $B^{-1}(b)$ ha il consueto significato di funzione inversa del *bid*.

Analogamente, per ogni impresa *j* del gruppo *H* avremo

$$\begin{aligned}
\underset{b(c_H^j)}{Max}\ E\left[S_H^j\right] &= \left[b(c_H^j) - c_H^j\right] \times (\text{Probabilità di Vittoria contro } (n-1) \text{ imprese del gruppo H} \\
&\qquad \text{se } j \text{ ha costi } c_H^j) \times (\text{Probabilità di Vittoria contro gli } n \text{ avversari} \\
&\qquad \text{del gruppo L se } j \text{ ha costi } c_H^j) \\
&= \left[b(c_H^j) - c_H^j\right]\left[1 - F_L(c_H^j)\right]^n\left[1 - F_H(c_H^j)\right]^{n-1} \\
&= \left[b(c_H^j) - c_H^j\right]\left[1 - F_L(B_L^{-1}(b^i))\right]^n\left[1 - F_H(B_H^{-1}(b^j))\right]^{n-1}
\end{aligned}$$

Restringendo l'asimmetria alle sole distribuzioni di probabilità (ovvero supponendo una stessa strategia di *bidding*) possiamo porre $B_H^{-1}(.) = B_L^{-1}(.) = B^{-1}(.) = b(.)$. In altre parole, la funzione con cui i *bidders* trasformano i costi (diversi tra loro) in *bids* è, ancora una volta, la stessa.

Primo caso: $c_L^i \le c_H^-$. Il costo realizzatosi per l'impresa *i* del gruppo *L* è non maggiore del minimo costo realizzabile nel gruppo *H* (noto). Nei termini della figura di cui sopra, *i* ha "scoperto" di avere un costo compreso tra i due minimi e, quindi, certamente inferiore a quello di qualsiasi impresa del gruppo *H*. Il valore atteso di S_L^i è quello scritto sopra correggendo per $F_H = 0$ poiché, per vincere, l'impresa $i \in L$ deve solo avere costì minori di tutti quelli relativi a quel sotto insieme di imprese appartenenti a *L* che a loro volta abbiano costi minori di c_H^- (*i* invecec non si cura delle imprese *H* perché già sa che essa ha costi minori di tutte le *n* imprese appartenenti gruppo *H*). È agevole ricavare che questo caso ci riporta, per quanto riguarda *i*, alla trattazione generale *IPV*.

La condizione per un massimo rispetto a $b(c_L)$ è

$$\frac{db(c_L^i)}{dc_L^i}\left[1-F_L(c_L^i)\right]^{n-1}+\left[b(c_L^i)-c_H^i\right](n-1)\left[1-F_L(b(c_L^i))\right]^{n-2}=0$$

Da cui:

$$b(c_L^i)=c_L^i+\frac{\int_{c_L^i}^{\bar{c}_H}\left[1-F_L(\tilde{c})\right]^{n-1}d\tilde{c}}{\left[1-F_L(c_L^i)\right]^{n-1}}$$

L'impresa *j* appartenente ad *H* (che ovviamente non conosce la realizzazione c_L^i) deve invece tenere conto di entrambe le distribuzioni di probabilità perché *i* potrebbe avere un costo superiore al minimo relativo alla distribuzione F_H. Allora *j* dovrà battere sia quelli del suo gruppo sia quelli del gruppo *L*, non avendo ragioni per escluderli dal calcolo visto che essi potrebbero avere costi maggiori di $\bar{c}_H$. Tuttavia, per definire la probabilità di vittoria (avere i costi più bassi di chiunque), *j* dovrà valutare entrambe le distribuzioni in corrispondenza del valore realizzato dei propri costi. Il suo valore atteso è quindi

$$\begin{aligned}E\left[S_H^j\right]&=\left[b^j(c_H^j)-c_H^j\right]\left[1-F_L(c_H^j)\right]^n\left[1-F_H(c_H^j)\right]^{n-1}\\&=\left[b^j(c_H^j)-c_H^j\right]\left[1-F_L(B_H^{-1}(b^j))\right]^n\left[1-F_H(B_H^{-1}(b^j))\right]^{n-1}\end{aligned}$$

Allora, per avere un massimo

$$\begin{aligned}&\left[1-F_H(B_H^{-1}(b^j))\right]^{n-1}\left[1-F_L(B_H^{-1}(b^j))\right]^n+\\&\qquad\left[b(c_H^i)-c_H^i\right]\frac{d}{db^j}\left[\left[1-F_H(B_H^{-1}(b^j))\right]^{n-1}\left[1-F_L(B_H^{-1}(b^j))\right]^n\right]=0\end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}&[1-F_H(.)]^{n-1}\left[1-F_L(B_H^{-1}(b^j))\right]^n+\\&-\frac{d\phi}{db^j}\left[b(cH)-c_H^i\right]\left\{(n-1)[1-F_H(.)]^{n-2}\frac{dF_H}{dc_H}\left[1-F_L(B_H^{-1}(b^j))\right]^n+\right.\\&\left.n[1-F_L(.)]^{n-1}\frac{dF_L}{dc_H}[1-F_H(.)]^{n-1}\right\}=0\end{aligned}$$

dove dF_L/dc_H è la derivata di F_L valutata per ogni *c* per cui valga $c_L \geq \bar{c}_H$. Semplificando ed utilizzando la nozione di *hazard rate*

$$\frac{db^j}{dc_H^j}=\left(b^j-c_H^j\right)\left[(n-1)h_H+nh_L\right]$$

In generale il sistema di $n-1$ equazioni differenziali di cui sopra non permette di ottenere soluzioni esplicite per il *bid* di ogni *j*. Se però supponiamo *hazard rates* costanti e imponiamo la condizione finale $b^j(c^+) = c^+ = b^i(c^+)$ otteniamo[9]:

[9] Questa soluzione è equivalente, per il caso del contratto alla Demsetz in cui vale non la cumulata ma la sopravvivenza di ogni funzione di ripartizione, a quello trattato in Krishna (2010, 47).

$$b^j(c_H^j) = c_H^j + \frac{1 - e^{-(c^+ - c_H^j)[(n-1)h_H + nh_L]}}{[(n-1)h_H + nh_L]}$$

Come si vede la condizione finale è soddisfatta: se $c_H^j = c^+$ otteniamo $b^j(c^+) = c^+$ semplicemente sostituendolo nella soluzione.

Secondo caso: $c_L^i \geq c_H^-$. Il costo realizzatosi per l'impresa *i* del gruppo *L* è non minore del **minimo** costo realizzabile nel gruppo *H* (noto). È quindi possibile che vi sia qualche impresa $j \in H$ con costi minori del c_L^i realizzatosi. Il valore atteso di S_L^i è quello scritto sopra per intero. Questa volta, per vincere, l'impresa *i* deve avere costì non maggiori di tutti quelli delle altre $n - 1$ imprese appartenenti a *L* e di quelli delle *n* imprese appartenenti ad *H*. Dovrà quindi fare riferimento ad entrambe le distribuzioni di probabilità. Dato suo surplus atteso la condizione per un massimo rispetto a $b(c_L)$ è

$$\left[1 - F_H(B_L^{-1}(b^i))\right]^n \left[1 - F_L(B_L^{-1}(b^i))\right]^{n-1} + \left[b(c_L^i) - c_L^i\right]\frac{d}{db^i}\left[\left[1 - F_H(B_L^{-1}(b^i))\right]^n \left[1 - F_L(B_L^{-1}(b^i))\right]^{n-1}\right] = 0$$

In questo caso l'equazione differenziale del *bid* di *i* è

$$\frac{db^i}{dc_L^j} = \left(b^i - c_L^j\right)[(n-1)h_H + nh_L]$$

Risolvendo (supponendo per semplicità che, nuovamente, gli *hazard rates* siano costanti) con la condizione finale $b^i(c^+) = c^+$

$$b^i(c_L^i) = c_L^i + \frac{1 - e^{-(c^+ - c_L^i)[(n-1)h_H + nh_L]}}{[(n-1)h_H + nh_L]}$$

Analogamente per il *bidder j* del gruppo *H* avremo:

$$b^j(c_H^i) = c_H^j + \frac{1 - e^{-(c^+ - c_H^j)[(n-1)h_H + nh_L]}}{[(n-1)h_H + nh_L]}$$

Per un qualsiasi valore di *c* appartenente al dominio comune delle distribuzioni non vi è differenza tra i *bid* dei due gruppi.

In conclusione, il *bidder j* concorre sempre contro $2n - 1$ avversari mentre il *bidder i* può concorrere solo contro $n - 1$ se si muove nella coda bassa della sua distribuzione di probabilità e contro $2n - 1$ se il suo costo osservato è superiore al minimo costo del gruppo *H*. Tuttavia, anche nel caso più favorevole alle aspettative di efficienza suscitate dalla messa all'asta di un contratto alla Löb e Magat (messo all'asta da Demsetz con la regola *FPSB*) nella migliore delle ipotesi l'esistenza di *bidders* con una più lunga coda bassa della distribuzione non modifica la funzione del *bid* ottimo nell'asta al secondo prezzo e lascia invariata l'entità del *mark-up* (vedi paragrafo 10 sotto). Inoltre, la competizione sul dominio comune delle ripartizioni innalza il *mark-up*. Viceversa, con l'asta al primo prezzo il risultato per il quale l'asta è vinta dal *bidder* a più bassi costi (o a più alta valutazione) ha una probabilità positiva di non verificarsi. Può quindi venire meno l'unico pregio dell'asta (vedi sotto): la sua proprietà di rappresentare un meccanismo efficiente nell'individuare il *bidder* migliore.

5.1 *Altri risultati con asimmetria*

I testi di teoria delle aste riportano altri risultati utili in sede di applicazione dei meccanismi d'asta alla regolamentazione (Krishna, 2010, 50 ss.).

Un primo risultato è che con *bidders* asimmetrici l'introito (caso dell'asta per la vendita del quadro d'autore con ipotesi *IPV*) o la spesa (caso del sussidio da pagare all'impresa che esegua un contratto alla Löb e Magat) **possono** essere, rispettivamente minore (vendita del quadro) o maggiore (sussidio) nel caso di asta al primo prezzo rispetto ai corrispondenti valori generati nell'asta al secondo prezzo. Purtroppo, però, può verificarsi anche il caso esattamente opposto. In definitiva, il **Teorema dell'equivalenza del ricavo (spesa) può non essere verificato**. Quello che fa pendere il risultato in un senso o in un altro (più ricavo atteso con il primo o con il secondo prezzo?) è in ultima analisi la caratteristica delle distribuzioni di probabilità dei *bidders*, come mostrato nell'esempio 4.4 di Krishna (2010, 52). Ciò rende ancor più problematico il ricorso all'asta alla Demsetz.

Un secondo risultato prende il seguente nome (suggestivo): **la debolezza spinge all'aggressività** (Krishna, 2010, 47). Si supponga che venga messo all'asta un oggetto singolo e che due *bidders* competano in un'asta al primo prezzo. Se essi hanno due diverse distribuzioni di probabilità delle valutazioni, definite su supporti diversi, con una distribuzione che domina l'altra nel senso *FOSD*, allora il *bidder* la cui distribuzione è dominata, presenterà offerte più alte di quelle dell'altro *bidder* per tutti i valori delle valutazioni appartenenti alla parte comune dei domini. Ancora una volta questi potrebbe non essere il "migliore" e le proprietà di efficienza dell'asta potrebbero venir meno.

6. L'unico pregio (teorico) dell'asta

L'asta FPSB/SPSB ha (in teoria) un grande merito, **se i *bidders* sono simmetrici nelle distribuzioni di probabilità (ovvero raramente nel mondo reale)**: essa ci consente di selezionare il più "meritevole" (più bassi costi tra i potenziali monopolisti; più alta valutazione tra i potenziali compratori di quadri) anche se non ci permette di "spremerlo" a dovere. Usando le parole di Binmore e Klemperer (2002) possiamo dire che molti ritengono che un'asta ben congegnata sia

"*the most likely method to allocate resources to those who can use them most valuably"*

Per illustrare questo merito teorico del meccanismo d'asta basta dimostrare che, nelle strategie simmetriche di equilibrio al primo prezzo e con riferimento al caso del banditore che vende a $N > 1$ *bidders* con valutazioni *IPV* un oggetto singolo,

$$b(v_i) = E[v_{-i} | v_{-i} < v_i]$$

dove v_{-i} è la valutazione più alta tra tutti gli avversari di i. Ripartiamo dal *bid* di equilibrio

$$b(v_i) = v_i - \frac{\int_{v_-}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw}{[F(v_i)]^{N-1}} = \frac{[F(v_i)]^{N-1} v_i - \int_{v_-}^{v_i} [F(w)]^{N-1} dw}{[F(v_i)]^{N-1}}$$

Chiamiamo per semplicità di scrittura $[F(w)]^{N-1} = G(w)$ e ricordiamo che:

$$\int_{v_-}^{v_i} [g(w)] w dw = G(w)w]_{w=\underline{v}}^{w=v_i} - \int_{v_-}^{v_i} G(w)dw = G(v_i)v_i - \int_{v_-}^{v_i} G(w)dw$$

da cui:

$$b(v_i) = \frac{\int_{v_-}^{v_i} w(N-1)[F(w)]^{N-2} f(w)dw}{[F(v_i)]^{N-1}} = \frac{\text{Valore atteso del secondo più alto } v}{\text{Probabilità che } v_i \text{ sia il } v \text{ più alto di tutti}}$$
$$= E[v_{-i} | v_{-i} < v_i]$$

Questo risultato è fondamentale perché lega tra loro *trasversalmente bid* e valutazioni e mostra che il vincitore di un'asta per la vendita di un bene paga un importo corrispondente alla valutazione attesa del secondo classificato**, condizionatamente al fatto che è proprio lui (il vincitore indicato con la lettera *i*) ad avere l'unica valutazione più alta** del secondo classificato (chiunque sia costei/ui, perciò uso il pedice *-i* per indicare chiunque altro tra gli $N - 1$ avversari).

Questo esito della strategia di equilibrio avrà un contenuto molto evidente e più facile da interpretare nel caso dell'asta in cui il banditore compra da N bidders.

Una simpatica *spigolatura* [*NO*]

Possiamo utilizzare il risultato

$$b(v_i) = E[v_{-i} | v_{-i} < v_i]$$

per mostrare *ad abundantiam* che quello ricavato è effettivamente un risultato di equilibrio di Nash frutto di strategie simmetriche, ovvero che non esiste un valore z diverso da v_i su cui il *bidder i* possa costruire la strategia ottima.

Iniziamo ipotizzando $z_i < v_i$. Avremo $b_i = b(z_i)$ da cui $z_i = b^{-1}(b_i)$. L'utilità attesa di i sarà:

$$E[\Pi_i] = (v_i - b(z_i))G(z_i) \text{ dove abbiamo posto nuovamente } G(z_i) = [F(z_i)]^{N-1}$$

Avremo

$$E[\Pi_i] = G(z_i)v_i - b(z_i)G(z_i) = G(z_i)v_i - G(z_i)E[v_{-i} | v_{-i} < z_i]$$

Da cui:

$$\begin{aligned} E[\Pi_i] &= G(z_i)v_i - \int_{v_-}^{z_i} wg(w)dw \\ &= G(z_i)v_i - G(z_i)z_i + \int_{v_-}^{z_i} G(w)dw \\ &= G(z_i)[v_i - z_i] + \int_{v_-}^{z_i} G(w)dw \end{aligned}$$

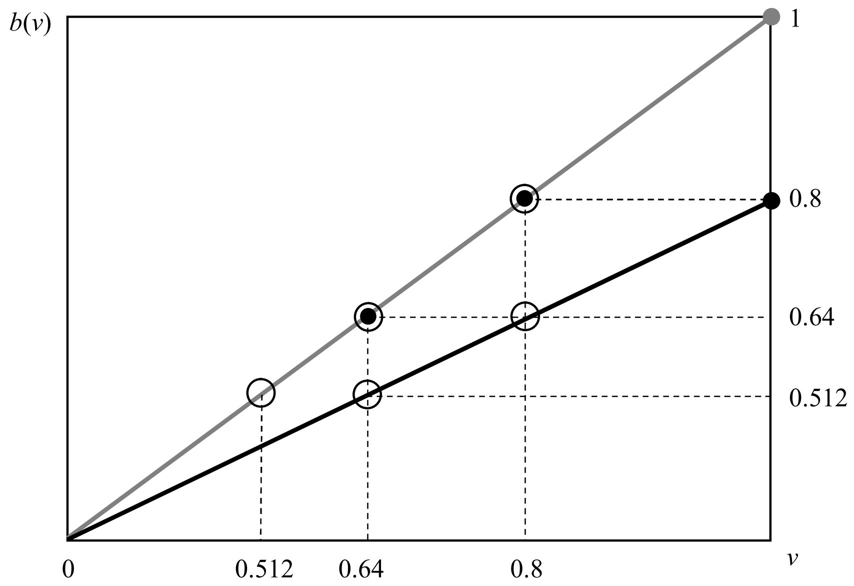
E quindi, per un massimo

$$\frac{d}{dv_i} E[\Pi_i] = g(z_i)(v_i - z_i) = 0$$

e pertanto $z_i = v_i$. La strategia ottima usa la vera valutazione dell'oggetto.

Approfondiamo questa relazione tra rivelazione dell'informazione e rendita informativa utilizzando il confronto tra asta al primo e al secondo prezzo con distribuzione uniforma tra 0 e 1. Supponiamo che i *bidders* siano 5 e rappresentiamo nel grafico seguente la funzione di *bid* di un partecipante qualsiasi *i*.

Sull'asse orizzontale misuriamo la valutazione del contratto v e sull'asse verticale il corrispondente *bid*. La diagonale del quadrato di lato 1 è il *bid* nel caso di asta al secondo prezzo $b = v$ e la retta sottostante è il bid al primo prezzo, ovvero la retta di equazione $b = (4/5)v$ valida per ogni *bidder*.



Nell'asta al secondo prezzo il *bidder* per cui $v = 1$ offre 1 (sapendo che pagherà meno di 1 in caso di vittoria) e nell'asta al primo prezzo offre i 4/5 di 1, ovvero 0.8 (sapendo che pagherà 0.8 in caso di vittoria). Ma 0.8 corrisponde alla seconda più alta valutazione (quella del *bidder* al secondo posto nell'ordinamento crescente delle valutazioni) che nel caso di asta *SPSB* indurrebbe un *bid* di 0.8 mentre nel caso *FPSB* indurrebbe un *bid* pari a (4/5) × 0.8 = 0.64. La valutazione $v = 0.64$ indurrebbe a sua volta un *bid* identico nell'asta *SPSB* ed un *bid* pari a 0.512 nell'asta *FPSB*. E così via.

Riassumendo il ragionamento precedente diciamo che vincerebbe l'asta (tenuta in qualsiasi forma) quel bidder con $v = 1$ e che costei/ui pagherebbe 0.08 (sempre con qualsiasi asta). Il grafico mostra quindi il Teorema dell'Equivalenza del Ricavo atteso dal banditore, visto che ogni pagamento corrisponde al suo ricavo. Il banditore incassa sempre 0.8. In secondo luogo, il grafico mostra che la differenza di 0.2 tra valutazione del vincitore e il suo pagamento è la sua rendita informativa. Infine possiamo notare che questa corrisponde alla differenza tra la valutazione più alta (quella del vincitore) e la "seconda più alta valutazione" (quella del secondo classificato). La rendita informativa è quindi una specie di premio che il vincitore riceve per il fatto di avere un "desiderio" dell'oggetto maggiore di quello di tutti gli altri e corrisponde esattamente allo scarto tra la sua valutazione e quella di chi ha una valutazione appena più bassa della sua. L'asta assegna l'oggetto a chi lo valuta di più e lo premia facendogli "guadagnare" un surplus pari a quanto la sua valutazione è maggiore di quella del secondo classificato. Nel caso di aste per la vendita questa caratteristica dell'asta può apparire quasi insignificante. Essa invece assumerà un contenuto molto importante nel caso di aste in cui il banditore compra da fornitori/produttori dell'oggetto e la variabile "valutazione" sarà sostituita dalla variabile "costi di produzione/fornitura".

7. Aste per l'acquisto pubblico di beni dal mercato privato

Supponiamo che un acquirente potenziale (la Pubblica Amministrazione, per esempio) indica un'asta al primo prezzo per l'acquisto di un oggetto dalle specifiche caratteristiche. Partecipano N venditore/produttori dell'oggetto che hanno sopportato dei costi di produzione per poter realizzare l'oggetto da vendere.

Supponiamo che il costo fisso della produzione sia zero e che il costo marginale di ogni impresa (costante rispetto alla quantità da produrre) sia una variabile casuale con $F(c)$ e densità $f(c) = dF(c)/dc$. Supponiamo che valgano, adattandole, le ipotesi IPV. Definiamo come segue il profitto atteso del partecipante all'asta

$$E\left[(\Pi_i(b(c_i), c_i))\right] = (b_i(c_i) - c_i)[\text{Probabilità di vincere}].$$

La probabilità di vincere dipende dai costi: vince chi ha i costi più bassi che permettono il *bid* con la più bassa richiesta di prezzo. Perché ciò sia possibile occorre che la probabilità di cui all'espressione del profitto atteso sia

$$[\text{Probabilità che } c_i \text{ sia minore degli } N-1\ c_j, \forall j \in N] = [1-F(c_i)]^{N-1}.$$

Utilizzando la funzione $c = B^{-1}(b)$ analoga a quella già usata per il caso della vendita otteniamo

$$\begin{aligned}
&[\text{Probabilità di vincere di } i \text{ che ha un costo } c_i] \\
&= [\text{Probabilità che } c_i \text{ sia minore di tutti i } c] \\
&= [1-F(c_i)]^{N-1} \\
&= [1-F(B_i^{-1}(b_i))]^{N-1}
\end{aligned}$$

Allora

$$E[(\Pi_i(b(c_i),c_i))] = (b_i(c_i)-c_i)[1-F(B_i^{-1}(b_i))]^{N-1}$$

Da cui, derivando rispetto al *bid*, otteniamo

$$b_i(c_i) = c_i + \frac{\int_{c_i}^{\bar{c}} [1-F(\tilde{c})]^{N-1}\, d\tilde{c}}{[1-F(c_i)]^{N-1}}$$

dove la tilde indica sempre la variabile di integrazione e l'integrale è definito sulla parte rilevante del supporto della distribuzione di c relativamente al *bidder i* (alla sua "destra"). Si può agevolmente notare che:

$$\frac{db(c_i)}{dc_i} = \frac{(N-1)\left[\int_{c_i}^{\bar{c}} [1-F(\tilde{c})]^{N-1}\, d\tilde{c}\right][f(c_i)]}{[1-F(c_i)]^{N}} > 0$$

e che:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 b(c_i)}{dc_i^2} &= (N-1)\left\{\frac{f(c_i)}{[1-F(c_i)]}\right\} - N(N-1)\left\{\frac{\left[\int_{c_i}^{\bar{c}} [1-F(\tilde{c})]^{N-1}\, d\tilde{c}\right][f(c_i)]^2}{[1-F(c_i)]^{N+1}}\right\} \\
&\quad - (N-1)\left\{\frac{\left[\int_{c_i}^{\bar{c}} [1-F(\tilde{c})]^{N-1}\, d\tilde{c}\right]\left[\frac{df(c_i)}{dc_i}\right]}{[1-F(c_i)]^{N}}\right\} \\
&= [(N-1)h(c_i)]\left[1-(b_i-c_i)\left[\frac{f'(c_i)}{f(c_i)} - \frac{Nf(c_i)}{[1-F(c_i]^{N-2}}\right]\right]
\end{aligned}$$

Dove $h(c_i)$ è l'*hazard rate* della distribuzione valutato al costo marginale di *i*. Il *bid* è crescente nei costi ma non si può dire in assoluto in che modo. La derivata seconda è non negativa se

$$f' \le \frac{Nf^2}{[1-F(c_i)]^{N-2}}$$

La condizione è sicuramente soddisfatta per una distribuzione uniforme per la quale $f' = df/dc = 0$. Se la condizione non è soddisfatta la derivata seconda è sempre non positiva.

L'effetto della variazione di N (che valutiamo anche se N varia nel discreto, non in modo infinitesimale) è

$$\frac{db(c_i)}{dN} = \underbrace{[1-F(c_i)]^{N-1}}_{+}\left[\int_{c_i}^{\bar{c}} [F(\tilde{c})]^{N-1} \underbrace{[\ln(1-F(c_i))]}_{-} d\tilde{c} - \underbrace{\int_{c_i}^{\bar{c}} [F(\tilde{c})]^{N-1}\, d\tilde{c}\,[\ln(1-F(c_i))]}_{+}\right]$$

Che è negativo per via dei segni delle singole componenti.

Dimostrazione (facoltativa)

Derivando la funzione di surplus atteso otteniamo

$$\left[1-F(B^{-1}(b_i))\right]^{N-1}+[(b(c_i)-c_i](N-1)\left[1-F(B^{-1}(b_i))\right]^{N-2}\frac{d[1-F(\bullet)]}{db(c_i)}=0$$

dove

$$\frac{dB^{-1}}{db(v_i)}=\frac{1}{db/dc_i}$$

e poiché

$$\frac{dB^{-1}}{db(v_i)}=\frac{1}{db/dc_i}$$

avremo

$$\begin{aligned}\frac{d[1-F(\bullet)}{db(c_i)}&=\frac{d[1-F(\bullet)]}{dc_i}\frac{1}{db/dc_i}\\&=-\frac{d[F(\bullet)]}{dc_i}\frac{1}{db/dc_i}\end{aligned}$$

Sostituendo

$$\frac{db}{dc_i}[1-F(c_i)]^{N-1}-(N-1)(b(c_i)-c_i)[1-F(c_i)]^{N-2}\frac{d[F(c_i)]}{dc_i}=0$$

La condizione ottenuta deve valere per tutti i valori di c compresi tra il valore di c del *bidder i*,mo (c_i) e il valore massimo. (Spiegare perché). Quindi, integrando su tutti i valori da c_i al massimo otteniamo

$$-\int_{c_i}^{\bar{c}}\frac{db}{d\tilde{c}}[1-F(\tilde{c})]d\tilde{c}+\int_{c_i}^{\bar{c}}(N-1)(b(\tilde{c})-\tilde{c})\frac{dF}{d\tilde{c}}\,d\tilde{c}=0$$

dove la tilde è la variabile di integrazione. Integrando per parti il secondo integrale si ottiene

$$\int_{c_i}^{\bar{c}}\frac{db}{d\tilde{c}}\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}d\tilde{c}-\left\{-\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}(b(\tilde{c})-\tilde{c})\Big|_{c=c_i}^{c=\bar{c}}-\int_{v_-}^{v_i}\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}\left(1-\frac{db}{d\tilde{c}}\right)d\tilde{c}\right\}=0$$

$$\int_{c_i}^{\bar{c}}\frac{db}{d\tilde{c}}\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}d\tilde{c}+\left(\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}(b(\tilde{c})-\tilde{c})\right)\Big|_{c=c_i}^{c=\bar{c}}-\int_{v_-}^{v_i}\left(\frac{db}{d\tilde{c}}\right)\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}d\tilde{c}+$$

$$\int_{v_-}^{v_i}\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}\,d\tilde{c}=0$$

$$\left(\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}(b(\tilde{c})-\tilde{c})\right)\Big|_{c=c_i}^{c=\bar{c}}+\int_{v_-}^{v_i}\left[1-F(\tilde{c})\right]^{N-1}\,d\tilde{c}=0$$

da cui

$$\underbrace{[1-F(\bar{c})]^{N-1}}_{\substack{=0\\ \text{Perchè } F(\bar{c})=1}}(b(\bar{c})-\bar{c})-[1-F(c_i)]^{N-1}(b(c_i)-c_i)-\int_{c_i}^{\bar{c}}[1-F(\tilde{c})]^{N-1}d\tilde{c}=0$$

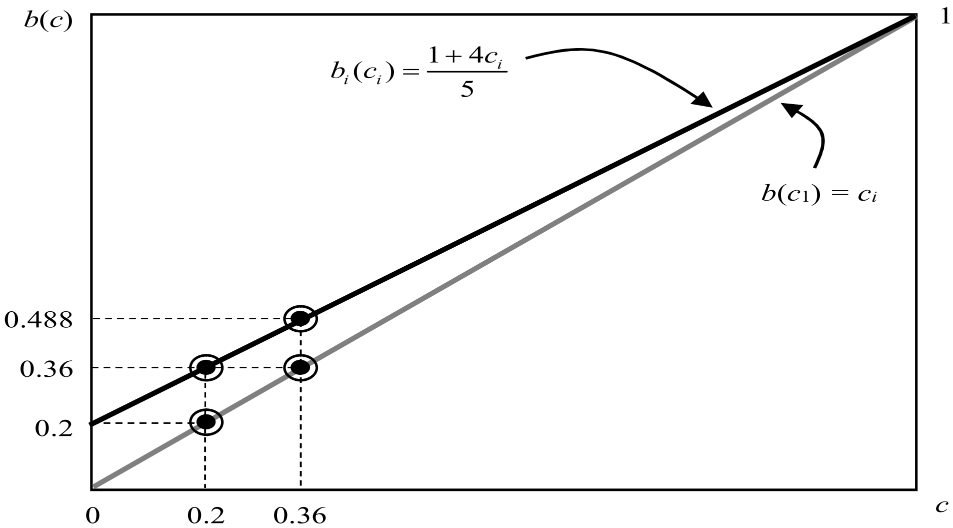
e riaggiustando i termini si ottiene il risultato presentato in precedenza.

Nel semplice caso della distribuzione uniforme tra 0 e 1 la probabilità di vincere (gli $N-1$ concorrenti hanno un costo maggiore di c_i) è $F(c_i) = [1 - c_i]$ elevato a $(N-1)$, e sostituendo nella formula precedente otteniamo

$$b_i(c_i) = c_i + \frac{\int_{c_i}^{\bar{c}} [1-\tilde{c}]^{N-1} d\tilde{c}}{[1-c_i]^{N-1}} = c_i + \frac{-(1-\tilde{c})^N / N \Big]_{\tilde{c}=c_i}^{\tilde{c}=\bar{c}}}{[1-c_i]^{N-1}} = \frac{1+c_i(N-1)}{N}$$

In questo caso, ponendo $N = 5$ il grafico precedente si modifica come segue. Sull'asse orizzontale misuriamo c e sull'asse verticale il corrispondente *bid*. La diagonale del quadrato di lato 1 corrisponde al *bid* nel caso di asta al secondo prezzo $b = c$; la retta superiore corrisponde a quello al primo prezzo: $b = (1 + 4c)/5$, retta valida per ogni *bidder*.

Nell'asta al secondo prezzo il *bidder* per cui $c = 0$ richiede 0 (sapendo che riceverà un prezzo maggiore di zero in caso di vittoria) e nell'asta al primo prezzo richiede 0.2, (sapendo che riceverà 0.2 in caso di vittoria). Ma 0.2 corrisponde al secondo più alto costo (quello del *bidder* al secondo posto nell'ordinamento crescente dei costi). Questi nel caso di asta *SPSB* proporrebbe un *bid* di 0.2 mentre nel caso *FPSB* indurrebbe un *bid* pari a di 0.36 corrispondente al costo del terzo "classificato" nell'ordinamento crescente dei costi. La valutazione $c = 0.36$ indurrebbe a sua volta un *bid* identico nell'asta *SPSB* ed un *bid* pari a 0.488 nell'asta *FPSB*. E così via.



Riassumendo il ragionamento diciamo che vincerebbe l'asta (tenuta in qualsiasi forma) il *bidder* con $c = 0$ che riceverebbe 0.2 (con qualsiasi asta). La differenza di 0.2 tra costo e pagamento ricevuto è la sua rendita informativa che corrisponde alla differenza tra il "secondo" costo più basso e il "primo" costo più basso (ovvero quello del vincitore). L'interpretazione del risultato è analoga a quello che potremmo dare alla rendita informativa dell'impresa più efficiente in un modello di regolamentazione bayesiana del tipo alla Baron e Myerson. Nel nostro caso, le implicazioni sono riassunte nella seguente tabella.

Bidders	Costo	*Bid*		Rendita Monetaria	Rendita attesa
		SPSB	*FP*		
1	0	0	*0.2*	0.2	$E[c_2 \mid c_1 = 0]$
2	*0.2*	*0.2*	*0.36*	0.16	$E[c_3 \mid c_2 = 0.2]$*
3	*0.36*	*0.36*	*0.488*	0.128	$E[c_4 \mid c_3 = 0.36]$**
4 .	*0.488* .	*0.488* .	0.5904 .	… .	… .

* Se non ci fosse il *bidder* 1; ** Se non ci fossero il *bidder* 1 e 2

L'ultima colonna esprime la rendita del venditore "vincente" in termini di valore atteso condizionato dei suoi costi, dove la variabile condizionante è il costo del potenziale venditore "**appena più inefficiente di lui**".

Ancora una volta, l'asta selezione il miglior bidder (in questo caso, il più efficiente; ovvero quello con i costi più bassi di tutti) e lo premia per la sua efficienza lasciandogli un profitto/rendita pari al valor atteso della differenza tra i costi di quello appena più inefficiente di lei/ui e i suoi, condizionatamente al fatto che i suoi costi (quelli del vincitore) sono i più bassi.

8. Sintesi dei principali risultati con ipotesi IPV, neutralità al rischi e oggetto unico (può essere omesso completamente)

a) *Asta per la vendita di un oggetto in busta chiusa al secondo prezzo con* N *partecipanti* (Vickrey auction)

In questa forma d'asta vince il maggior offerente e paga un prezzo pari alla seconda maggiore offerta. Vickrey (1961) dimostra che la strategia debolmente dominante è quella di presentare un'offerta pari alla propria vera valutazione del bene in vendita [10]. Di conseguenza, la distribuzione delle offerte coincide con la distribuzione originaria delle valutazioni. Sia allora $F(x)$ delle valutazioni che supponiamo comprese nell'intervallo finito $[0, \bar{X}]$ con $F(\bar{X}) = 1$, e siano

$$X_{(1:N)} < X_{(2:N)} \ldots < X_{(N-1:N)} < X_{(N:N)}$$

le statistiche ordinate delle valutazioni/*bids*. Dal punto di vista del banditore le offerte dei partecipanti sono variabili casuali. Quale sarà il ricavo atteso dal venditore (prezzo d'asta)? Data la regola di secondo prezzo occorre calcolare il valore atteso della seconda maggiore (più alta) offerta $X_{(N-1:N)}$. Quindi:

$$E\left[X_{(N-1:N)}\right] = \int_0^{\bar{X}} xN(N-1)[1-F(x)]F(x)^{N-2}f(x)\,dx$$
$$= \bar{X} - N\int_0^{\bar{X}} F(x)^{N-1}dx + (N-1)\int_0^{\bar{X}}\left[F(x)^N\right]d\tilde{x}$$

Nel caso di una distribuzione uniforme $U[0, \bar{X}]$ avremo:

$$E\left[X_{(N-1:N)}\right] = \frac{N-1}{N+1}\bar{X}$$

Di conseguenza, il prezzo atteso nell'asta *SPSB* è crescente in N anche se i *bids* dei partecipanti non variano al variare di N. Il prezzo d'asta converge all'estremo superiore della distribuzione, $\bar{X}$ per un numero di partecipanti che tende all'infinito.

È possibile ottenere il medesimo risultato utilizzando la distribuzione congiunta delle statistiche di rango N ed $N - 1$. Infatti, dato che:

$$f_{(N-1,N:N)}(x_{N-1}, x_N) = N(N-1)[F(x_{N-1})]^{N-2}f(x_{N-1})f(x_N)$$

segue che:

$$E\left[X_{(N-1:N)}\right] = \int_0^{\bar{X}}\left[\int_0^{x_{(N)}} xN(N-1)[F(x)]^{N-2}f(x)dx\right]f(x)dx$$

Risolvendo l'integrale interno all'equazione precedente otteniamo:

$$E\left[X_{(N-1:N)}\right] = N\int_0^{\bar{X}}\left[x[F(x)]^{N-1} - \int_0^{x_{(N)}}[F(x)]^{N-1}dx\right]f(x)dx$$

Integrando per parti si ottiene:

[10] La dimostrazione avviene mediante il procedimento di eliminazione delle strategie dominate (vedi Parisio, 1999).

$$E\left[X_{(N-1:N)}\right] = N\bar{X} - N\int_0^{\bar{X}}[F(x)]^{N-1}dx - N\int_0^{\bar{X}}\left[x(N-1)[F(x)]^{N-1}f(x)\right]dx$$

ed integrando ancora una volta per parti l'ultimo termine, si ottiene:

$$E\left[X_{(N-1:N)}\right] = \bar{X} - N\int_0^{\bar{X}}[F(x)]^{N-1}dx - (N-1)\int_0^{\bar{X}}[F(x)]^{N}dx$$

che coincide con il risultato già visto. In realtà abbiamo applicato semplicemente la regola per cui

$$E\left[E\left[X_{(N-1:N)} \middle| X_{(N-1:N)} < X_{(N:N)}\right]\right] = E\left[X_{(N-1:N)}\right]$$

b) *Varianza del prezzo nell'asta* SPSB

Ricordando la formula base della varianza di una v.c. X

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - E[X]^2$$

possiamo scrivere la varianza della v.c. *Prezzo atteso (P)* tra zero e infinito come segue:

$$Var\left[P^{SP}\right] = \int_0^\infty x^2 f_{(N-1:N)}(x)dx - \left[\int_0^\infty x f_{(N-1:N)}(x)dx\right]^2$$

per cui il secondo termine indica il quadrato del prezzo atteso ed il primo termine il momento secondo della distribuzione. Nel caso di distribuzione uniforme su [0,1] utilizzando le applicazioni precedenti ove abbiamo calcolato il prezzo atteso d'asta, avremo:

$$\begin{aligned} Var\left[P^{SPSB}\right] &= \int_0^1 x^2 N(N-1)[1-x]x^{N-2}dx - \left[\frac{N-1}{N+1}\right]^2 \\ &= N(N-1)\int_0^1\left[x^N - x^{N+1}\right]dx - \left[\frac{N-1}{N+1}\right]^2 \\ &= \frac{N(N-1)}{N+1} - \frac{N(N-1)}{N+2} - \left[\frac{N-1}{N+1}\right]^2 \\ &= \frac{N(N-1)}{(N+1)(N+2)} - \left[\frac{N-1}{N+1}\right]^2 \end{aligned}$$

c) *Asta in busta chiusa al primo prezzo*

In questa forma d'asta, il prezzo atteso dal banditore è pari al valore atteso del maggior *bid*; assumendo valutazioni tratte dall'intervallo $[0, \bar{X}]$, avremo:

$$E\left[b_{(N:N)}\right] = \int_0^{\bar{X}} \tilde{b} f_{(N:N)}\left(\tilde{b}\right)d\tilde{b}$$

ovvero, ordinando le offerte in modo decrescente:

$$b_{(N,N)} > b_{(N-1,N)} > \ldots > b_{(1,N)}$$

esso coincide col valore atteso *dell'order statistics* più elevato tra N.

Tuttavia, per calcolare il prezzo atteso di aggiudicazione dobbiamo preliminarmente calcolare la distribuzione di probabilità dei *bids* nell'asta in busta chiusa al primo prezzo. Infatti, già sappiamo che nell'asta *FPSB* il *bid* non coincide con la valutazione per $N \geq 2$. Nel testo precedente abbiamo ricavato la strategia di equilibrio dei partecipanti per $N \geq 2$ e successivamente utilizzato la distribuzione di probabilità dei *bids* per ricavare il prezzo atteso.

d) *Equilibrio simmetrico dell'asta in busta chiusa al primo prezzo*

Nel paragrafo in cui abbiamo ricavato il bis ottimo al primo prezzo abbiamo supposto che esista un equilibrio simmetrico $B(.)$, funzione monotona crescente e invertibile dallo spazio delle valutazioni allo spazio dei *bids*. Verifichiamo quali sono le caratteristiche di questa funzione di equilibrio per $N > 2$. Per evitare confusione tra i due paragrafi, in questo paragrafo la funzione inversa B^{-1} la chiameremo $\sigma(b_i)$.

Il *bidder* generico i osserva la sua sola valutazione x_i mentre considera le altre $N-1$ valutazioni come variabili casuali tratte in modo indipendente dalla distribuzione $F(.)$. Le valutazioni avversarie possono essere ordinate in una statistica ad $N-1$ componenti come segue:

$$Y_{(N-1:N-1)} > Y_{(N-2:N-1)} > ... > Y_{(N:N-1)}$$

Se tutti gli $N-1$ avversari seguono la strategia $\beta(.)$, quale sarà la risposta ottimale del *bidder i*?

Definiamo il surplus atteso del *bidder* i quando gli altri *bidders* seguono $\beta(.)$: esso è dato dalla differenza tra valutazione e prezzo/*bid*, ovvero $(x_i - b_i)$, se il *bidder i* vince l'asta, mentre è pari a 0 altrimenti. La probabilità di vincere l'asta coincide con la probabilità di presentare il *bid* più elevato ovvero:

$$b_i > b_{(N-1:N-1)} = \beta\left(Y_{(N-1:N-1)}\right)$$

dove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che β è assunta come funzione crescente delle valutazioni. Il profitto atteso del *bidder i* è definito allora come segue:

$$E[\Pi_i] = (x_i - b_i) F_{(N-1:N-1)}(\sigma(b_i)) \tag{3.22}$$

dove $\sigma(b_i)$, funzione inversa di *bid*, indica quel valore della valutazione che nell'equilibrio simmetrico genera un valore del *bid* pari a b_i. Massimizzando la (3.22) rispetto al *bid* b_i, otteniamo le seguenti *FOC*:

$$(x_i - b_i) f_{(N-1:N-1)}(\sigma(b_i)) \frac{\partial \sigma}{\partial b_i} - F_{(N-1:N-1)}(\sigma(b_i)) = 0$$

Se $\sigma(x_i)$ definisce un equilibrio simmetrico ed è funzione continua e crescente, allora:

$$\sigma(b_i) = x_i \text{ e } \tfrac{\partial \sigma}{\partial b_i} = \tfrac{1}{\beta'}.$$

Le *FOC* si riscrivono come segue:

$$\beta'(x_i) F_{(N-1:N-1)}(x_i) + \beta(x_i) f_{(N-1:N-1)}(x_i) = x_i f_{(N-1:N-1)}(x_i)$$

Esplicitando

$$F_{(N-1:N-1)}(x_i) \text{ e } f_{(N-1:N-1)}(x_i)$$

si ottiene:

$$\beta'(x_i) + \beta(x_i) \frac{(N-1) f(x_i)}{F(x_i)} = x_i \frac{(N-1) f(x_i)}{F(x_i)} \tag{3.23}$$

Notiamo che la (3.23) è simile alla (26) fatta eccezione per il termine costante $(N-1)$. Possiamo perciò già anticipare una soluzione del tipo:

$$b_i = x_i - \frac{\int_0^v F(\tilde{x})^{N-1} d\tilde{x}}{F(x_i)^{N-1}}$$

analoga alla (29). Mostriamo tuttavia che si può arrivare alla soluzione dell'equazione differenziale riscrivendo la (3.23) come:

$$\frac{d}{dx_i}\left[\beta(x_i)F_{(N-1:N-1)}(x_i)\right] = x_i f_{(N-1:N-1)}(x_i)$$

Utilizzando la condizione iniziale per la quale β(0) = 0, risolviamo l'equazione differenziale come segue:

$$\beta(x_i) = \int_0^{x_i} \tilde{x}\frac{f_{(N-1:N-1)}(\tilde{x})}{F_{(N-1:N-1)}(x_i)}d\tilde{x} \tag{3.24}$$

ovvero:

$$b_i = \frac{\int_0^{x_i} \tilde{x}(N-1)f(\tilde{x})d\tilde{x}}{F(x_i)^{N-1}}$$

È possibile dimostrare che la (3.24) costituisce un equilibrio simmetrico dell'asta al primo prezzo.
Il *bid* definito dalla (3.24) equivale a:

$$E\left[X_{(N-1:N-1)}\middle|X_{(N-1:N-1)} < x_i\right]$$

dato che:

$$\frac{f_{(N-1:N-1)}(\tilde{x})}{F_{(N-1:N-1)}(x_i)} = f_{(N-1:N-1)}(\tilde{x}|\tilde{x} < x_i) \tag{3.25}$$

Confrontando la soluzione ora ottenuta con il caso in cui $N = 2$, trattato nella applicazione 4 del Capitolo 2, osserviamo che il ruolo di N è quello di indurre offerte più elevate, a parità di altre condizioni. Ciò si verifica poiché il rapporto (3.25) è crescente in N e l'integrale della (3.24) è positivo. Allo stesso modo, ricaviamo che anche il prezzo atteso di aggiudicazione nell'asta *FPSB* è crescente in N.

d) Equivalenza del ricavo atteso

Sfruttando la **Proprietà 2** abbiamo che:

$$E\left[X_{(N-1:N-1)}\middle|X_{(N-1:N-1)} < x_i\right] = E\left[X_{(N-1:N)}\middle|X_{(N:N)} = x_i\right]$$

Il ricavo atteso dell'asta in busta chiusa al primo prezzo è dato da:

$$\begin{aligned} E[P] &= \int_0^{\bar{X}} E\left[X_{(N-1:N)}\middle|X_{(N:N)} = x\right]f_{(N:N)}(x)dx \\ &= \int_0^{\bar{X}}\int_0^{x_i} \tilde{x}f_{(N-1:N-1)}(\tilde{x})d\tilde{x}\frac{f_{(N:N)}(x_i)}{F_{(N-1:N-1)}(x_i)}dx_i \end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{f_{(N:N)}(x_i)}{F_{(N-1:N-1)}(x_i)} = \frac{NF(x_i)^{N-1}f(x_i)}{F(x_i)^{N-1}} = Nf(x_i)$$

segue che:

$$E[P] = \int_0^{\bar{X}}\left[\left(\int_0^{x_i} \tilde{x}f_{(N-1:N-1)}(\tilde{x})d\tilde{x}\right)Nf(x_i)\right]dx_i \tag{3.26}$$

Integrando per parti:

$$
\begin{aligned}
E[P] &= N\int_0^{\bar{X}} xf_{(N-1:N-1)}(x)dx - N\int_0^{\bar{X}} x(N-1)F(x)^{N-1}f(x)dx \\
&= N(N-1)\int_0^{\bar{X}} xF(x)^{N-2}(1-F(x))f(x)dx \\
&= E\left[X_{(N-1:N)}\right]
\end{aligned}
$$

Il prezzo uguaglia il valore atteso del *second-highest order statistics*, $X_{(N-1:N)}$ di un campione di dimensione N. Ma quest'ultimo è il ricavo atteso dell'asta in busta chiusa al secondo prezzo.

f) *Un esempio*

Nel caso di valutazioni tratte da una distribuzione originaria uniforme nell'intervallo $[0, \bar{X}]$, avremo:

$$
\beta(x_i) = \int_0^{x_i} x\frac{(N-1)x^{N-2}dx}{x_i^{N-1}} = \frac{(N-1)}{x_i^{N-1}}\int_0^{x_i} x^{N-1}dx
$$

ovvero

$$
b_i = \frac{N-1}{N}x_i
$$

Risaliamo ora alla distribuzione di probabilità dei *bids*. Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{N}{N-1}b \\
F(x) &= \frac{x}{\bar{X}} \\
F(b) &= \frac{N}{N-1}\frac{b}{\bar{X}} \\
F_{(N:N)}(b) &= \left[\frac{N}{N-1}\frac{b}{\bar{X}}\right]^N \\
f_{(N:N)}(b) &= N\left[\frac{N}{N-1}\frac{b}{\bar{X}}\right]^{N-1}\frac{N}{N-1}\frac{1}{\bar{X}}
\end{aligned}
$$

La distribuzione dei *bids* è uniforme nell'intervallo $[0, \frac{N-1}{N}\bar{X}]$. Il prezzo atteso dell'asta *FPSB*, ovvero il valore atteso del maggior *bid* è dato da:

$$
\begin{aligned}
E[P] &= E\left[b_{(N:N)}\right] \\
&= \int_0^{\frac{N-1}{N}\bar{X}} bf_{(N:N)}(b)db
\end{aligned}
$$

Integrando per parti si ottiene che il prezzo atteso nell'asta in busta chiusa al primo prezzo coincide con quello ottenuto nel caso di asta in busta chiusa al secondo prezzo.

g) *Varianza del prezzo nell'asta* FPSB

Applicando la formula della varianza:

$$
Var[P]_{FP} = \int_0^{\bar{X}} [\beta(x)]^2 f_{(N:N)}(x)dx - \left[\int_0^{\bar{X}} \beta(x)f_{(N:N)}(x)dx\right]^2
$$

al caso di distribuzione uniforme nell'intervallo unitario, abbiamo che:

$$\begin{aligned} Var[P]_{FP} &= \int_0^1 \frac{(N-1)^2}{N^2} x^2 N x^{N-1} dx - \frac{(N-1)^2}{(N+1)^2} \\ &= \frac{(N-1)^2}{N(N+2)} - \frac{(N-1)^2}{(N+1)^2} \end{aligned} \qquad (3.27)$$

h) *Confronto della varianza dei prezzi nelle due procedure,* FP *e* SP

È facile dimostrare che:

$$Var\left[P^{SP}\right] > Var\left[P^{FP}\right]$$

per il caso uniforme su [0,1] è sufficiente confrontare la (3.21) con la (3.27). È possibile osservare che il prezzo dell'asta *FP* segue una distribuzione uniforme su $\left[0, \frac{(N-1)}{N}\right]$, mentre il prezzo dell'asta *SP* segue una distribuzione uniforme sull'intervallo [0,1]. Poiché i due prezzi hanno il medesimo valore atteso, concludiamo che la distribuzione del prezzo dell'asta *SP* è un *mean preserving spread* della distribuzione del prezzo nella *FP*. Vedi paragrafo finale.

9. Aste per una pluralità di oggetti: meccanismi e applicazioni

9. 1 Aspetti generali

Una delle caratteristiche comuni di quasi tutti i formati di asta discussi sino a questo momento è che la procedura in questione riguarda un singolo oggetto. In questi paragrafi tratteremo brevemente la letteratura relativa alle **aste multi oggetto**, ovvero quelle in cui più oggetti sono venduti/comprati nell'asta. In genere, l'asta a più oggetti può essere suddivisa in due categorie. In primo luogo, ci sono aste a più oggetti in cui gli oggetti sono omogenei e le aste a più oggetti con oggetti eterogenee. In quest'ultimo caso, gli oggetti possono essere sostituti, più o meno stretti, l'uno dell'altro oppure possono essere tra loro complementari. Un altro aspetto importante delle aste multi-unità è che a differenza del singolo oggetto, più oggetti possono essere venduti in molti modi diversi. Ad esempio, il banditore può vendere tutti gli oggetti in un singolo round dell'asta, oppure può vendere l'oggetto in aste consistenti in round sequenziali, oppure può condurre aste simultanee. In caso di aste sequenziali o simultanee, il banditore scegli quanti oggetti saranno assegnati in ciascuno dei round. Ovviamente nelle aste sequenziali ci dobbiamo attendere che le offerte di un round possono influenzare le offerte dei round rimanenti e ciò può influenzare la strategia del bidder. Tuttavia, sembra che, se governate da una regola efficiente, le aste sequenziali possono essere efficienti mentre, al contrario, sembra improbabile che l'asta simultanea sia efficace anche se la regola di allocazione scelta è efficiente. Questo perché la presenza di più oggetti aggiunge una dimensione in più al problema del disegno del meccanismo efficiente dell'asta sequenziale: in presenza di informazioni asimmetriche, il banditore o elabora lui un criterio di raggruppamento degli oggetti oppure lo determina a caso o infine lo lascia alla discrezione degli offerenti, che scelgono in quale gruppo essere inclusi. Qualunque sia il modo in cui viene effettuato il raggruppamento, l'asta non garantisce mai che l'insieme dei vincitori di ciascun gruppo sia formato dagli offerenti con le più alte valutazioni presenti nell'intera popolazione di bidders. Infine, il banditore può scegliere diversi formati di aste da applicare in ogni round; ad esempio, un'asta sequenziale in due fasi può essere condotta come segue: nella prima fase, ci potrebbe essere un'asta FPSB e nella seconda fase un'asta SPSB.
In questi paragrafi supporremo prevalentemente che ci sia un venditore che voglia vendere tutti gli oggetti in un unico round e discuteremo di tre formati di aste: l'asta discriminatoria (o "*pay-your-bid*"), l'asta a prezzo uniforme (o asta competitiva) e l'asta alla Vickrey. I primi due sono i formati di aste più popolari nel mondo reale e l'ultimo, come abbiamo più volte sottolineato, è teoricamente molto importante. Durante la discussione assumeremo che il valore marginale di ciascun oggetto sia una funzione decrescente del numero di oggetti, vale a dire che la valutazione del primo oggetto è superiore al secondo e così via per tutti gli oggetti. L'asta Vickrey alloca gli oggetti in modo efficiente e induce a offrire come strategia di equilibrio un bid pari alla vera valutazione. Le aste a prezzi uniformi sono generalmente inefficienti; i bidders hanno la tendenza a *sfumar*e la loro vera valutazione dopo la vendita della prima unità, questo fenomeno è noto come "riduzione della domanda". In generale, gli equilibri di un'asta discriminatoria sono tutti inefficienti. Vedremo che tra i tre

formati di asta solo l'asta SPSB offre garanzie di efficienza. Dasgupta e Maskin (1998) e Perry e Reny (1998) hanno dimostrato che se tutti i segnali degli offerenti sono monodimensionali, allora l'asta Vickrey fornisce efficienza in molte aste a più oggetti. Tuttavia, in seguito Jehiel e Moldovanu (1998) mostrarono che in caso di segnali a più componenti l'efficienza di solito non è garantita. Asubel (1998) e Asubel e Cramton (1998) hanno studiato un'asta crescente a più oggetti omogenei e hanno scoperto che essa è generalmente inefficiente. Esistono formati aperti anche per aste di unità multiple. Queste sono aste olandesi, aste inglesi e aste alla Ausubel. Nell'asta multipla olandese, il banditore inizia annunciando un prezzo molto alto per il quale nessun offerente è disposto ad acquistare. Quindi questo prezzo viene gradualmente abbassato fino a quando un singolo offerente non esprime la volontà di rincorrere l'oggetto a quel prezzo. A tale offerente viene assegnata un'unità dell'oggetto in questione subordinata al pagamento del prezzo annunciato. Quindi il livello dei prezzi viene ulteriormente abbassato e la procedura ricomincia fino a quando tutti gli oggetti non vengono venduti. L'asta olandese a più unità equivale al risultato dell'asta discriminatoria. Nel caso dell'asta inglese, il banditore inizia annunciando un prezzo basso e aumentandolo gradualmente. Per i diversi livelli di prezzo, gli offerenti presentano i loro bid. La revisione al rialzo dei prezzi continua fino a quando il numero di offerenti rimanenti corrisponde al numero di oggetti. Il risultato dell'asta inglese a pluralità di oggetti equivale al risultato dell'asta a prezzo uniforme L'asta Ausubel è più di una costruzione teorica e sembra generare risultati equivalenti a quelli dell'asta alla Vickrey. Come nell'asta all'inglese, il banditore inizia annunciando un prezzo basso e successivamente lo aumenta. L'assegnazione degli oggetti avviene attraverso il calcolo dell'offerta residua ad ogni livello di prezzo.
Una sintesi delle forme d'asta applicabili a caso multi unit e dei problemi sollevati dalla letteratura è in Cumpston et. al (2020).

9.2 Classificazioni e semplificazioni

Un'asta a pluralità di oggetti è un'asta in cui vengono venduti (comprati) diversi oggetti a (da) più bidders. Queste aste furono studiate per la prima volta da Vickery nel celeberrimo lavoro del 1961 e successivamente in un lavoro del 1962 in cui veniva riconosciuto che i sistemi utilizzati per la vendita (o per l'acquisto) di più oggetti in un'asta, ovvero l'asta a prezzo uniforme o l'asta discriminativa (vedi sotto), erano entrambi inefficienti. Krishna (2010, 201) sostiene che fu proprio tale costatazione che portò Vickrey a proporre il sistema che da allora porta il suo nome. Sia come sia, Vickrey si rese per primo conto che **l'origine dell'inefficienza non stava nella molteplicità degli oggetti *in sé*** ma, come vedremo, nel fatto che **i bidders avevano domande (offerte) per l'intero insieme degli oggetti.**
La seguente tabella classifica le aste in base al meccanismo utilizzabile e al numero o tipologia degli oggetti.

Tab. 1 *Parziale classificazione delle aste per uno o più oggetti*

		Forma Scritta		**Forma Orale**	
Oggetto Singolo		**Primo Prezzo**	**Secondo Prezzo**	**Primo Prezzo**	**Secondo Prezzo**
	IPV	FPSB	SPSB	Olandese	Inglese
	CPV	FPSB	SPSB	Olandese	Inglese
	CV	FPSB	SPSB	Olandese	Inglese
Più oggetti (Sostituti)	IPV	Asta discriminativa Prima fase Coperta	Asta marginale Prima fase Coperta	Asta Multifase Sempre Aperta	Asta Multifase Sempre Aperta
	CV	Asta discriminativa Prima fase Coperta	Asta marginale Prima fase Coperta	Multifase Sempre Aperta	Multifase Sempre Aperta

Più oggetti (Complementi)	IPV	Asta discriminativa Asta Combinatoria	Asta simultanea

dove: Asta marginale = asta in cui il prezzo di "equilibrio" è identico per tutti i "vincitori" (detta anche sta competitiva); Asta discriminativa = asta in cui vale la regola del *pay-as-your-bid*

Governi e imprese private utilizzano sempre più spesso le aste a pluralità di oggetti per allocare beni o per acquistare servizi. A differenza delle aste singole, le aste *multi-unit*[11] consentono agli offerenti di fare offerte costruite come tante coppie ordinate (corrispondenze) di valori prezzo-quantità piuttosto che presentare offerte singole per singole quantità (come nel caso delle aste ad un solo oggetto). Pertanto, le aste multi-unità in cui vengono proposte corrispondenze prezzo-quantità aiutano ad evitare il problema della c.d. domanda/offerta a grappolo[12] (*lumpy bid*, Tenorio 1993, 304) presente nelle aste in cui **ogni** bid riguarda **ogni** singolo oggetto e, in teoria, migliorano l'efficienza allocativa del meccanismo di copra-vendita perché consentono agli offerenti di acquistare o vendere più unità attraverso un processo di offerta in cui le offerte presentate "simulano" in qualche modo funzioni (più correttamente, corrispondenze) di offerta o domanda. Purtroppo, l'apparente vantaggio appena ricordato è più che controbilanciato da problemi di natura teorica e pratica. Ad esempio, nel caso della asta a pluralità di oggetti, l'ipotesi IPV sulle valutazioni e l'assenza di collusione non bastano a garantire la realizzazione del Teorema del Ricavo (Spesa) atteso/a.
Per semplicità trattiamo il solo caso della vendita (quello dell'acquisto è analogo). Le singole unità vendute possono essere vendute ciascuna allo stesso prezzo (**asta di prezzo uniforme**) o a prezzi diversi (**asta a prezzi differenziati o asta discriminatoria**). Un'asta a prezzo uniforme è un'asta in cui un numero fisso di unità identiche di un bene omogeneo viene venduto allo stesso prezzo. Ogni offerente nell'asta può presentare (eventualmente più) offerte, designando sia la quantità di unità desiderata sia il prezzo che è disposto a pagare per ciascuna unità. In genere queste offerte sono FPSB, con bids non rivelati agli altri acquirenti fino alla chiusura dell'asta. Il banditore ordina i *bids* in modo decrescente e individua gli aggiudicatari tra coloro che hanno presentato offerte maggiori o uguali a quella corrispondente al lotto che esaurisce la quantità totale della merce in vendita. **Tutti questi bidders ricevono il quantitativo di merce richiesto e pagano tutti lo stesso prezzo "di equilibrio"**, che è pari all'offerta vincente più bassa accettata dal banditore (pari all'offerta più bassa tra gli acquirenti che hanno effettivamente ricevuto una o più unità della merce) indipendentemente dalla loro offerta effettiva (il loro *bid*). Il banditore serve prima il miglior offerente (il più alto bid), cedendogli il numero di unità richieste, quindi il secondo miglior offerente (il secondo più alto *bid*) e così via.
Un'asta di prezzo uniforme può essere utilizzata per aggregare unità di merce offerte da più di un venditore a più acquirenti. La presenza di una pluralità di offerenti sembrerebbe determinare i presupposti per l'assimilazione di questo meccanismo d'asta ad un "mercato" in cui tutti gli acquirenti e tutti i venditori interessati a scambiare un prodotto omogeneo possono partecipare simultaneamente. Questo meccanismo che sembrerebbe possedere le caratteristiche di un meccanismo di mercato viene denominato asta doppia (*double auction*). Esempi di aste a pluralità di oggetti identici includono aste dei titoli di stato, aste per la fornitura all'ingrosso dell'energia elettrica, aste per i permessi-certificati relativi alle emissioni nocive, ecc.
In teoria, l'asta a prezzo uniforme fornisce un incentivo per gli offerenti a fare un'offerta minore rispetto alla valutazione, a meno che ogni offerente non richieda una sola unità. Per la domanda su più unità, gli offerenti sono incentivati a compensare le offerte per unità diverse dalla prima, in quanto tali offerte possono influenzare il prezzo pagato dall'offerente. Questa riduzione della domanda si traduce in un equilibrio inefficiente.
Nei paragrafi seguenti esaminiamo le proprietà di queste forme d'asta nella prospettiva della loro utilizzazione nella regolamentazione di alcuni mercati o delle attività di compre-vendita della Pubblica Amministrazione.

[11] Per una dettagliata discussone vedi Weber (1983).

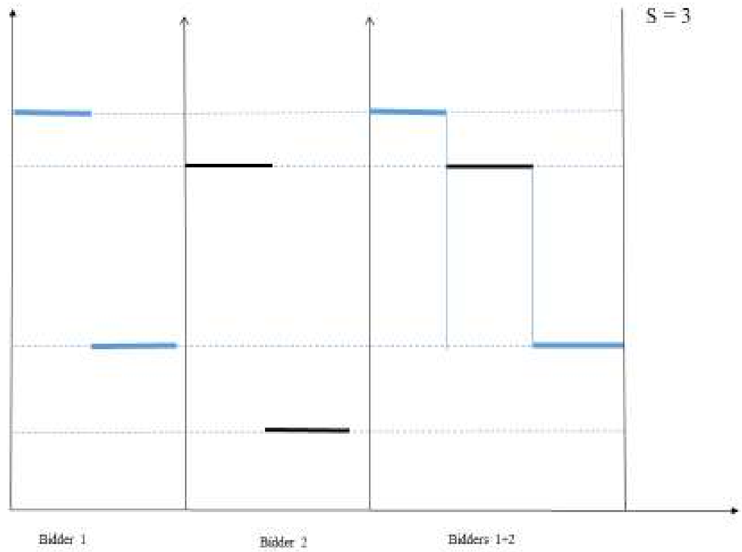
[12] Vuol dire che più unità possono essere domandate (offerte) ad uno stesso prezzo.

Di seguito illustriamo la pura meccanica della determinazione dell'equilibrio, prescindendo da considerazioni sulla strategia dei partecipanti.

9.3 Asta simultanea a prezzo uniforme per K oggetti identici

Descrizione. Deve essere venduto un numero determinato di oggetti identici e ogni potenziale compratore è interessato all'acquisto di **uno o più** di tali oggetti identici (esempio, frequenze radio, licenze industriali dello stesso valore, forniture o permessi dello stesso valore, ecc.). Ogni bidder presenta una proposta di pagamento per ogni unità cui è interessato. Il venditore ordina in modo decrescente gli elementi dell'insieme dei valori offerti e fissa un prezzo di chiusura in corrispondenza dell'ultima offerta accettata. La figura seguente illustra il caso della vendita di K = 3 oggetti identici con N = 2 bidders entrambi desiderosi di acquisire due dei tre oggetti.

Fig. 1 *Asta a prezzo uniforme con N = 2 bidders e K = 3 oggetti identici*



Il grafico più a sinistra riporta le due offerte del bidder 1 e quello centrale le due offerte del bidder 2. Il grafico a destra riporta la funzione totale dei bids ordinati in modo decrescente, ciascuno riferito ad una singola unità in vendita. Delle tre unità totali, due (la prima e la terza) le acquisirà il bidder 1 e una (la seconda) il bidder 2. In generale, possiamo dire che con questa procedura i partecipanti presentano (in senso molto lato) delle funzioni di domanda che vengono successivamente aggregate orizzontalmente dal venditore che in tal modo determina una "domanda di mercato". Le richieste più alte sono soddisfatte al prezzo che uguaglia tale domanda all'offerta (in questo caso fissa e pari a 3), che nell'esempio è il prezzo proposto dal bidder 1 per la seconda unità domandata.

Esercizio. Asta a prezzo uniforme (adattato da Krishna, 2010, pag. 175)

K = 6 oggetti identici sono venduti simultaneamente in un'asta la cui regola di prezzo è quella del prezzo uniforme. Tre bidders (1, 2 e 3) presentano le seguenti offerte per ciascun oggetto

b1 = (50,48, 40, 33, 15, 5)
b2 = (42, 41, 37, 29, 20, 16)
b3 = (45, 39, 28, 21, 19, 11)

a) Rappresentare graficamente le funzioni di bid individuali
b) Costruire graficamente la funzione aggregata delle offerte di pagamento
c) Con la regola del prezzo uniforme, valutare a che prezzo vengono vendute

le 6 unità
d) Quante unità compra ciascun bidder?
e) Calcolare il pagamento totale di ogni bidder e il surplus (visibile!) che ciascun bidder ottiene grazie all'asta.

Esercizio svolto (asta con razionamento)

Asta simultanea per *M* oggetti identici e *N* > *M* bidders neutrali al rischio e valutazioni IPV. L'asta si ipotizza "competitiva" con prezzo pari alla prima (ovvero la più alta) offerta respinta, ovvero il valore della (*N-M*)*esima* offerta. Ogni bidder **ha diritto** ad un solo oggetto. In ciò consiste il razionamento.
La strategia del bidder compratore di un solo oggetto è chiaramente quella di offrire un bid pari alla sua vera valutazione (come in un caso di SPSB). Per convincersi basta rifare lo stesso ragionamento fatto per il caso di asta al secondo prezzo ad oggetto unico.
Più interessante è la valutazione del ricavo atteso. In questo caso, ricordando che l'asta è a prezzo unico:

$$E\left[R^{PREZZO\ COMPETITIVO}\right]=M\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} v_i f_{(N-M:N)}(v)\,dv_i$$

Dove $f_{(N-M:N)}(v)=\dfrac{N!}{(N-M-1)!M!}[F(v)]^{N-M-1}[1-F(v)]^{M}f(v)$ è la pdf dell'(*N-M*)*esima* statistica d'ordine.

Esempio N = 5 e M = 3 con valutazioni uniformemente distribuite tra [0, 1]. Il prezzo che il venditore si attende di ottenere per la vendita di 3 oggetti in un'asta simultanea è

$$\begin{aligned}E\left[R^{PREZZO\ COMPETITIVO}_{ASTA\ SIMULTANEA}\right]&=3\int_0^1 v_i\frac{5!}{(5-3-1)!3!}[v_i]^{5-3-1}[1-F(v_i)]^3\,dv_i\\&=60\int_0^1 v_i[v_i][1-v_i]^3\,dv_i\\&=1\end{aligned}$$

Quindi il ricavo atteso per tutte e 3 le unità è pari a 1.
Confrontiamo con il caso di asta sequenziale FPSB per **un oggetto alla volta in ogni round** con uscita del bidder vincitore dal round successivo e conseguente riduzione dei partecipanti e degli oggetti in ogni round. La strategia di bid è quella che abbiamo più volte ricavato

$b(v_i)=\dfrac{N-1}{N}v_i$ in ogni round, dove *N* deve essere inteso come il numero dei partecipanti al round. Allora:

$$\begin{aligned}E\left[R^{FP}\right]&=E\left[R^{FP}\right]_{\text{Primo Round}}+E\left[R^{FP}\right]_{\text{Secondo Round}}+E\left[R^{FP}\right]_{\text{Terzo Round}}\\&=\frac{N-1}{N+1}+\frac{N-2}{N}+\frac{N-3}{N-1}\\&=1.77\end{aligned}$$

Con razionamento (ogni bidder vince un oggetto e abbandona la competizione appena lo ha vinto) e aste sequenziali al primo prezzo (pari al primi bid rifiutato) il ricavo atteso totale è maggiore che con l'asta simultanea competitiva in cui ognuno vince un oggetto.

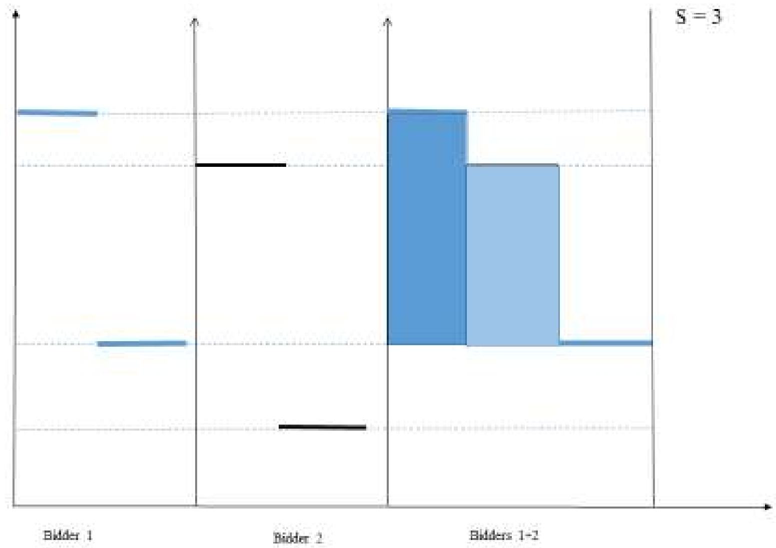
9.4 Asta simultanea a prezzo discriminativo (*pay-as-your-bid*) per K oggetti identici

L'esercizio 1 mostra che l'asta a prezzo uniforme lascia un consistente surplus agli aggiudicatari. Comprensibilmente, ciò parve intollerabile al Prof. **Milton Friedman (1912 – 2006;** premio Nobel per l'economa nel 1976) che in un articolo pubblicato sul *Wall Street Journal* il 28 agosto 1991, sostenne che il vantaggio principale dell'asta a prezzo uniforme rispetto al meccanismo discriminatorio alternativo (*pay-as-your-bid*) consisterebbe nel solo fatto che con l'asta discriminativa un bidder potrebbe temere di dover pagare prezzi troppo elevati. Tuttavia, secondo Friedman, tale timore sarebbe ingiustificato perché

"... *nessuno è scoraggiato dal presentare un bid dalla paura di rimanere incastrato con un prezzo troppo alto [da pagare]. Non c'è bisogno che uno sia uno specialista. È sufficiente conoscere l'importo massimo che uno è disposto a pagare per le diverse quantità*."

Pertanto l'intuizione di Vickrey relativa all'asta SPSB ad oggetto singolo si applicherebbe automaticamente anche al caso dell'asta a più oggetti e, di conseguenza (secondo Friedman), con un'asta *pay-as-your-bid*, i partecipanti sarebbero indotti a presentare bids corrispondenti alla loro "vera" valutazione (che genera una "vera" funzione di domanda). Ciò avrebbe eliminato il surplus (almeno la sua parte apparente) generato dall'asta a prezzo uniforme e il Tesoro USA avrebbe sopportato un minor costo di collocamento dei titoli. Niente di più falso, ma senza discutere le strategie dei bidders dei due casi ciò non può essere ancora legittimamente affermato.
Prima di esaminare le strategie dei bidders in queste aste (dette anche *Yankee auctions*) illustriamo graficamente la regola di aggiudicazione e di pagamento con l'asta *pay-as-your-bid* per una pluralità di oggetti.

Fig. 2 *Asta pay-as-you-bid con N = 2 bidders e K = 3 oggetti identici*



Il grafico di sinistra e quello centrale sono analoghi a quelli di cui alla Fig. 1. L'equilibrio è raggiunto anche in questo caso nel terzo grafico (*S* fissa e pari a 3) in corrispondenza del secondo bid del bidder 1. La differenza sta nel fatto che con l'asta *pay-as-your-bid* i bidder 1 e 2 non beneficiano più dell'area colorata che veniva loro garantita dallo scarto tra bid e pagamento tipico dell'asta a prezzo uniforme. Di conseguenza, i due bidders perderebbero tutta l'area esistente sotto le loro proposte di pagamento (diciamo: il surplus sottostante la domanda) come se essi fossero costretti a subire la politica di prezzo di un monopolista perfettamente discriminatore che non lascia alcun surplus ai consumatori.
Allora, nel caso dell'asta *pay-as-your-bid* per *K* oggetti identici il pagamento totale fatto da un bidder *i* qualsiasi che si è visto assegnare $k \leq K$ oggetti identici è pari alla somma dei suoi *k* bids accettati:

Pagamento Totale del bidder *i* che compra $k \leq K$ oggetti identici

Pagamento $= b_1^i + b_2^i + b_3^i + \cdots + b_{k \leq K}^i$

Esercizio Asta simultanea a prezzo uniforme per l'acquisto di $K = 6$ oggetti identici

$K = 6$ oggetti identici sono acquistati da un acquirente simultaneamente in un'asta la cui regola di prezzo è quella del prezzo uniforme. Tre bidders (1, 2 e 3) presentano le seguenti richieste di pagamento per vendere ciascun oggetto

b1 = (60,58, 40, 37, 15, 22)
b2 = (62, 44, 38, 29, 51, 16)
b3 = (43, 45, 28, 21, 19, 11)

a) Rappresentare graficamente le 3 funzioni di bid individuali
b) Costruire graficamente la funzione aggregata delle richieste di pagamento
c) Con la regola del prezzo uniforme, valutare a che prezzo vengono acquista te le 6 unità
d) Quante unità vende ciascun bidder?
e) Calcolare il pagamento totale fatto ad ogni bidder e il surplus (visibile!) che ciascun bidder ottiene grazie all'asta.

Ripetere lo stesso esercizio supponendo (ma senza prenderlo troppo sul serio) che quelli di cui sopra siano i bids presentati anche se l'asta fosse stata *pay-as-your-bid*.

Quanto alla valutazione che di queste differenti regole danno alcuni economisti, notiamo che Wolfram (1999) sostiene che il sistema del prezzo uniforme sia preferibile per le aste all'ingrosso per l'elettricità su cui torneremo, e Rassenti, Smith e Wilson (2003) citano prove sperimentali che suggeriscono che le aste discriminatorie possono ridurre la volatilità (vale a dire, diminuiscono le punte di prezzo), ma a scapito di prezzi medi più alti. Altri autori sono giunti a conclusioni opposte: Federico e Rahman (2003) offrono argomenti teorici a favore delle aste discriminatorie, almeno per i casi estremi di concorrenza perfetta e monopolio mentre Klemperer (2001, 2002) suggerisce che le aste discriminatorie potrebbero essere meno soggette a "*implicit collusion*". Kahn et al. (2001), d'altra parte, respingono completamente l'idea che il passaggio a un'asta discriminatoria comporti una maggiore concorrenza o prezzi più bassi.

9.5 Asta sequenziale al primo prezzo senza razionamento

Descrizione. Abbiamo già visto che più oggetti identici possono essere **venduti simultaneamente** in una stessa asta, oppure in una **successione di rounds di aste al primo prezzo** ciascuna riferita ad un solo oggetto. Adesso non ipotizziamo più che ogni bidder possa vincere un solo oggetto e che abbandoni le aste una volta ottenuto l'oggetto. Stiamo quindi generalizzando la procedura di cui all'esempio/esercizio precedente collegato alla regola del razionamento. Quest'ultima viene eliminata.
In questi casi è come se l'asta si sdoppiasse in tante aste al primo prezzo **apparentemente** indipendenti l'una dalle altre. Si osserva che i prezzi di aggiudicazione sembrano (empiricamente) diminuire col procedere del tempo e dei *rounds* quasi che i *bidders* con le valutazioni più alte si vogliano rapidamente "togliere il pensiero" dell'acquisto vincendo le prime aste per poi lasciare il campo a quelli meno disposti a pagare. Da ciò ipotesi che queste aste generino una riduzione sequenziale dei prezzi, anziché il loro aumento o la loro stabilità.
Strategia. Come si comporta un *bidder* neutrale al rischio in un'asta IPV sequenziale al primo prezzo per più oggetti identici venduti uno dopo l'altro? Weber (1983) aveva sostenuto che in una sequenza di aste di oggetti identici, in cui gli offerenti hanno valori privati indipendenti e sono neutrali al rischio e in cui le loro valutazioni non cambiano da un'asta all'altra, il prezzo atteso in ciascuna asta corrisponde al prezzo realizzato nell'asta precedente. In altre parole, in media, non dovrebbe esserci una tendenza al rialzo o al ribasso dei prezzi, o, in termini più tecnici, il prezzo atteso dovrebbe essere una martingala. L'intuizione di Weber era che l'offerente marginale in ogni asta facesse un'offerta in base a ciò che si aspettava essere il prezzo nell'asta successiva. Tuttavia, l'evidenza empirica suggerisce conclusioni diverse. Ashenfelter (1989) e Ashenfelter et al. (1992, 2002), ad esempio, hanno osservato che in aste sequenziali per la vendita di partite di vino, bestiame, oggetti d'arte, ecc. i prezzi tendono più frequentemente a diminuire con il procedere dei rounds. Queste ricerche

empiriche, che hanno evidenziato l'anomalia dei prezzi in calo nella successione delle aste persino con riferimento ai diversi momenti della giornata (sottolineando il c.d. effetto del pomeriggio; scusate volevo dire *the afternoon effect*), hanno dato origine a un altro filone della ricerca che analizza le condizioni in base alle quali i prezzi diminuiscono o aumentano nel corso della sequenza di aste. Di seguito vediamo qualche schema per una possibile interpretazione[13].

Supponiamo per semplicità di avere *N bidders* neutrali al rischio che desiderano acquistare ciascuno **un solo oggetto** tra i $K = 2$ messi in vendita. Di conseguenza dobbiamo pensare a due aste/rounds in successione (una per oggetto). Nell'asta 1 vi sono N partecipanti ed un oggetto. Nell'asta 2, vi sono $N - 1$ partecipanti ed un oggetto (manca chi ha vinto il primo round). Ciascuno dei bidders restanti ha appreso dal primo round che la propria valutazione non corrisponde alla più elevata tra le N valutazioni iniziali, ma è strettamente inferiore ad essa (altrimenti non avrebbe perso il primo round), e che adesso deve competere contro $N - 2$ avversari. La sua probabilità di vittoria nell'asta 2 corrisponde quindi alla probabilità di vincere contro $N - 2$ avversari, dato che la sua valutazione e quella degli altri era risultata inferiore a quella vincente nel round 1, indipendentemente dal prezzo di aggiudicazione dell'oggetto (identico) realizzatosi nella prima asta.

La strategia di equilibrio nell'asta 2 è quindi una mera generalizzazione della strategia di equilibrio dell'asta *FPSB* standard. Il risultato in un certo senso contro intuitivo è che il *bid* nella seconda asta è indipendente dal prezzo pagato per l'identico oggetto venduto nella prima asta. Questo risultato discende da una proprietà della strategia d'asta: il *bid* di equilibrio è indipendente rispetto all'estremo superiore dell'intervallo da cui le statistiche ordinate sono tratte. Nella procedura *FPSB* di asta sequenziale, il prezzo pagato nella prima asta fornisce al *bidder* le informazioni sul valore della maggiore valutazione tra le $N - 1$ avversarie. Se i *rounds* fossero più di due (con un numero di oggetti maggiore di due), le valutazioni degli avversari rimasti in gioco sarebbero ($N - 1 - R$) dove R è il numero dei *rounds* precedenti, che a sua volta è pari al numero di oggetti già assegnati. Tuttavia, in ogni fase successiva questa informazione è irrilevante perché l'evento condizionante la vittoria in ogni round diviene, per ogni round, quello di avere una valutazione superiore a quella degli avversari rimasti in gioco. Manteniamo per semplicità l'ipotesi di due rounds e analizzando a ritroso l'asta 1, osserviamo che ogni *bidder* razionalmente anticipa che, in caso di perdita, avrà sempre l'opportunità di vincere allo stadio 2. In particolare, per lei/lui non sarà efficiente presentare alla prima asta un bid superiore rispetto a quello che presenterebbe nella seconda. Alla luce del fatto che per uno stesso oggetto venduto al secondo round i presenterà un bid che dovrà battere $N - 2$ avversari, egli capirà non sarebbe efficiente presentare al primo round un $b^{PRIMO\ \mathrm{ROUND}}$ superiore rispetto a $b^{\mathrm{SECONDO\ ROUND}}$. Quindi, in termini attesi, il *bid* presentato all'asta Primo Round sarà:

$$b^{\text{PRIMO ROUND}}\left(v_i\right) = E\left[b^{\text{SECONDO ROUND}}\Big(\underbrace{v_{(N-1:N-1)}}_{\substack{\text{Valutazione più alta} \\ \text{tra le N-1 rimaste}}} \Big) \middle| v_{(N-1:N-1)} = v_i \right]$$

che è condizionato dall'evento che se l'agente i vince ciò dipende dal fatto che la sua valutazione v_i è maggiore della maggiore valutazione posseduta da uno qualsiasi dei suoi $N - 1$ avversari. In altre parole, vince il secondo round perché possiede la ($N - 1$).esima valutazione più alta tra le $N - 1$ rimaste.

La teoria delle proprietà delle distribuzioni delle statistiche ordinate (Arnold e altri, 2008, 23 e seguenti) ci dice che la pdf del **secondo** valore più alto v_j condizionatamente all'evento che v_i sia il valore più alto in assoluto è:

$$\underbrace{f_{(N-1:N)}\left(v_j \middle| v_{(N:N)} = v_i\right)}_{\substack{\text{Probabilità che } v_j \text{ sia la seconda più} \\ \text{alta valutazione su } N \text{ possibili} \\ \text{condizionatamente} \\ \text{al fatto che } v_i \text{ è la più alta}}} =$$

[13] In quanto segue nel testo mantengo l'ipotesi che la valutazione dei bidders non cambi da un'asta all'altra. Salant (2010) tratta invece il caso in cui le valutazioni possono cambiare e offre buoni motivi per accogliere tale ipotesi, ma anche per respingerla.

$$= \frac{(N-1)!}{(N-2)!(N-N+1-1)!}\left[\left(\frac{F(v_j)}{F(v_i)}\right)\right]^{N-2}\left[\left(\frac{F(v_i)-F(v_j)}{F(v_i)}\right)\right]^{N-N+1-1}\frac{f(v_j)}{F(v_i)}$$

$$= (N-1)\left[\left(\frac{F(v_j)}{F(v_i)}\right)\right]^{N-2}\frac{f(v_j)}{F(v_i)} = (N-1)\frac{\left[F(v_j)\right]^{N-2}f(v_j)}{\left[F(v_i)\right]^{N-1}}$$

dove $f(v) = dF(v)/dv$ è la pdf della distribuzione originaria della v.c. V di cui le v sono le realizzazioni.

Supponendo, ad esempio, che $v \sim U(0,1)$, il *bid* nella seconda asta (o nel secondo round) tiene conto del fatto che un avversario non partecipa al secondo round (avendo vinto il primo) e che quindi i concorrenti da battere sono $N-2$. Nel caso in esame di distribuzione uniforme su [0,1]:

$$f_{(N-1:N)}\left(v_j \middle| v_{(N:N)} = v_i\right) = \underbrace{\frac{(N-1)(v_i)^{N-2}}{(v_i)^{N-1}} = (N-1)v_i^{-1}}_{\substack{\text{Probabilità che } v_j \text{ sia la seconda più} \\ \text{alta valutazione su } N \text{ possibili} \\ \text{condizionatamente} \\ \text{al fatto che } v_i \text{ è la più alta con U(0,1)}}}$$

Allora il *bidder i*, cui interessa solo vincere un oggetto indipendentemente dal round in cui lo vince, considerando l'esistenza del secondo round, ai fini della determinazione della strategia ottima per il primo round (indicato con apice [1]), massimizzerà

$$E[\Pi^{[1]}) = (v_i - b(v_i))(N-1)\left[v_i^{-1}\right]^{N-2} = (v_i - b(v_i))(N-1)\left[B(b_i)\right]^{N-2}$$
$$= (v_i - b(v_i))(N-1)\left[b(v_i)\right]^{N-2}$$

dove $v_i^{-1} = (B^{-1}(b_i))^{-1} = b(v_i)$. Facendo nuovamente le ipotesi di cui al modello di asta IPV al primo prezzo, il bidder i presenterà un *bid* di equilibrio nell'asta 1 (da cui l'apice che indica come sopra il round e non il bidder) dato da:

$$b^{[1]}(v_i) = \left(\frac{N-2}{N-1}\right)v_i$$

che è strettamente minore rispetto al *bid* che farebbe se non tenesse conto dell'esistenza di un secondo round nel quale il gioco ricomincia sempre per un oggetto **ma con un avversario (e quindi una valutazione) in meno**. Infatti il *bid* del primo round formulato a prescindere dall'esistenza del secondo round (niente apice) lo ricaviamo da

$$Max_{b_i} E[\Pi] = (v_i - b(v_i)) \times \underbrace{\left[N(F(v_i))^{N-1}f(v_i)\right]}_{\substack{\text{Prob che } v_i \text{ sia la più alta statistica ordinata} \\ \text{su } N \text{ realizzazioni possibil con una} \\ \text{distribuzione } F(v)}} \quad \text{in generale}$$

$$= (v_i - b(v_i)) \times \underbrace{N\left[v_i\right]^{N-1}}_{\substack{\text{Prob che } v_i \text{ sia la più alta statistica ordinata} \\ \text{su } N \text{ realizzazioni possibili con} \\ \text{distribuzione uniforme U(0, 1)}}} \quad \text{con } v \sim U[0,1]$$

che dà, come ci si attendeva,

$$b(v_i) = \left(\frac{N-1}{N}\right)v_i$$

In conclusione, i partecipanti, alla luce dell'esistenza dei rounds successivi, seguono nella prima asta una strategia *opportunistica* e anziché biddare in modo analogo a come farebbero nel caso dell'asta con un solo

round per un solo oggetto **biddano di meno** e riducano piano piano il bid con l'avanzare dei rounds. I risultati esposti indurrebbero a pensare che i prezzi di aggiudicazione nelle aste sequenziali non siano delle martingale e che diminuiscano con il procedere dei rounds.
Il risultato appena esposto generalizza quello di cui all'esercizio relativo al razionamento. In quel caso i bidders erano "costretti" a desiderare un solo oggetto mentre in questo essi desiderano per propria volontà acquisire un solo oggetto. Ma la strategia di comportamento non cambia, così come non cambia il valore del ricavo atteso.

Esercizio

Calcolare la differenza tra i due *bids* e mostrare che essa è decrescente in *N*. Commentare.

9.6 Asta sequenziale al secondo prezzo

Supponiamo ora che l'asta sequenziale per due oggetti si tenga con la regola di secondo prezzo; per distinguere il bid presentato nel caso di secondo prezzo usiamo l'apice [2]. Dallo studio dell'asta *SPSB* sappiamo che nell'asta 2 il *bidder i* ha una strategia (debolmente) dominante che consiste nel fare un'offerta pari alla sua valutazione, ovvero:

$$b^{[2]}(v_i) = v_i$$

Il prezzo atteso dal banditore all'asta 2 cui partecipano $N-1$ bidders, indicata con l'apice 2 senza parentesi, sarà allora:

$$E\left[P_{SPSB}^2\right] = E\left[v_{(N-2:N-1)}\right]$$

dove il termine tra parentesi a destra indica la seconda più alta valutazione tra le $N-1$ rimaste dopo la prima asta e che coincide con il secondo bid. Il prezzo atteso nell'asta 2 dal *bidder i*, condizionatamente all'evento che egli vinca l'asta 2 (ovvero che abbia la più alta valutazione tra le $N-1$ rimaste, è dato da:

$$E\left[P_{SPSB}^2 \middle| v_i = v_{(N-1:N-1)}\right] = E\left[v_{(N-2:N-1)} \middle| v_{(N-2:N-1)} < v_i\right] \tag{3.29}$$

Inoltre, se egli non ha vinto alla prima asta significa che la sua valutazione non è la più elevata tra le *N* iniziali. Ripercorrendo la medesima linea di ragionamento seguita sopra, osserviamo che, nella prima asta il *bidder* presenterà un bid pari al valore atteso del prezzo che pagherebbe nell'asta 2, ovvero:

$$b^{[1]}(v_i) = E\left[v_{(N-2:N-1)} \middle| v_{(N-2:N-1)} < v_{(N-1:N-1)} = v_i\right] < v_i$$

In questo caso avremo che la strategia ottima nella prima asta non prevede una corretta rivelazione delle proprie preferenze e di conseguenza il *bid* nell'asta 1 è strettamente inferiore al *bid* dell'asta 2.

9.7 *Equivalenza dei ricavi nel caso di aste simultanee e sequenziali*

È possibile dimostrare che le aste sequenziali di primo e di secondo prezzo sono equivalenti dal punto di vista del ricavo atteso per il venditore. Notiamo a questo proposito che:

$$\Pr\left(v_{(N-2:N-1)} < v_i \middle| v_{(N-1:N-1)} = v_i\right) = \Pr\left(v_{(N-2:N-2)} < v_i \middle| v_{(N-1:N-1)} < v_i\right)$$

ovvero,

$$f_{(N-2:N-1)}\left(z \middle| v_{(N-1:N-1)} = v_i\right) = \frac{(N-1)(N-2)f(v_i)f(z)F(z)^{N-3}}{(N-1)f(v_i)F(v_i)^{N-2}}$$

$$= \frac{(N-2)f(z)F(z)^{N-3}}{F(v_i)^{N-2}}$$

Poiché

$$f_{(N-2:N-2)}\left(z \middle| v_{(N-2:N-2)} < v_i\right) = \frac{(N-2)f(z)F(z)^{N-3}}{F(v_i)^{N-2}}$$

discende allora che:

$$E\left(v_{(N-2:N-2)} \middle| v_{(N-2:N-2)} < v_i \right) = E\left(v_{(N-2:N-1)} \middle| v_{(N-1:N-1)} = v_i \right) \qquad (3.30)$$

Riassumendo, otteniamo il seguente schema:

FPSB

ASTA 1: $\beta^{[1]}(v_i) = E\left[\beta^{[2]}\left(v_{(N-1:N-1)}\right) \middle| v_{(N-1:N-1)} < v_i\right]$

ASTA 2 $\beta^{[2]}(v_i) = E\left[v_{(N-2:N-1)} \middle| v_{(N-2:N-1)} < v_i\right]$

SPSB

ASTA 1: $b^{[1]}(v_i) = E\left[v_{(N-2:N-1)} \middle| v_{(N-2:N-1)} < v_{(N-1:N-1)} = v_i\right] < v_i$

ASTA 2: $b^{[2]}(v_i) = v_i$

Ed utilizzando la (3.28) otteniamo $\beta^{[2]}(v_i) = b^{[1]}(v_i)$, ovvero che il *bid* dell'asta 2 *FPSB* è uguale al *bid* presentato nell'asta 1 della procedura *SPSB*.

Consideriamo ora la regola di prezzo che è diversa nei due meccanismi; nell'asta *SPSB* il prezzo è pari alla seconda maggiore offerta mentre nell'asta *FPSB* è pari all'offerta vincente. Tenuto conto di ciò, otteniamo l'uguaglianza dei prezzi attesi:

$$E\left[P^2_{SPSB}\right] = E\left[v_{(N-2:N-1)}\right]$$
$$E\left[P^2_{FPSB}\right] = E\left[E\left[v_{(N-2:N-1)} \middle| v_{(N-2:N-1)} < v_i\right]\right] = E\left[v_{(N-2:N-1)}\right]$$

Al fine di ottenere l'ultima uguaglianza, abbiamo applicato la regola della doppia aspettativa di variabili condizionate.

Consideriamo ora l'asta 1 ed i relativi prezzi attesi. Nell'asta *SPSB* il prezzo atteso del primo stadio è pari al valore atteso della terza maggiore valutazione tra N (ovvero alla più elevata tra $N-2$ distribuite tra $[0, v_{(N-1\ N)}]$). Nell'asta al primo prezzo, il prezzo equivale al valore atteso del maggior *bid* (dato che il vincitore è colui che ha la maggiore valutazione.

$$E\left[P^1_{SPSB}\right] = E\left[E\left[v_{(N-2:N-2)} \middle| v_{(N-2:N-2)} < v_i\right]\right]$$
$$= E\left[E\, v_{(N-2:N-1)} \middle| v_{(N-1:N-1)} = v_i\right] = E\left[v_{(N-2:N-1)}\right]$$
$$E\left[P^1_{FPSB}\right] = E\left[E\left[v_{(N-2:N-1)} \middle| v_{(N-2:N-1)} < v_i\right] \middle| v_{(N-1:N-1)} > v_i\right]$$
$$= E\left[v_{(N-2:N-1)}\right]$$

Il risultato della *Revenue Equivalence* si estende perciò anche al caso di aste sequenziali nella forma trattata.

10. Aste all-pay [NO]

Le aste *all-pay* sono procedure in cui sia il vincitore che i perdenti sono chiamati a pagare un prezzo al banditore. Un bene viene messo in vendita tra N partecipanti aventi valutazioni i.i.d. tratte da una *CDF F* (v) con $v \in [0, \bar{V}]$. Il bene viene aggiudicato al maggior offerente. Tuttavia, nell'asta *all-pay* di primo prezzo, tutti i partecipanti pagano una somma pari alla propria offerta. Per questa ragione, le aste *all-pay* vengono sovente utilizzate nelle vendite a scopo di beneficenza[14]. Procediamo nella ricerca della strategia assumendo che tutti i *bidders* diversi da *i* seguano una strategia $b(v_i)$, continua e crescente e dunque avente inversa σ(b) Le altre variabili hanno il medesimo significato di quelle considerate nel modello d'asta *FPSB* e seguenti.

Il problema del *bidder i* può scriversi come segue:

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) F_{(N-1:N-1)}(\sigma(b_i)) - b_i\left[1 - F_{(N-1:N-1)}(\sigma(b_i))\right]$$

Le condizioni del primo ordine del problema sono le seguenti:

$$\begin{aligned}&(v_i - b) f_{(N-1:N-1)}(\sigma(b))\frac{\partial\sigma}{\partial b} - F_{(N-1:N-1)}(\sigma(b)) + \\ &-\left(1 - F_{(N-1:N-1)}(\sigma(b_i))^{N-1}\right) + b_i f_{(N-1:N-1)}(\sigma(b))\frac{\partial\sigma}{\partial b} \\ &= 0\end{aligned}$$

Procedendo come nel caso dell'asta *FPSB*, otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$-\frac{db}{dv_i} + v_i f_{(N-1:N-1)}(v_i) = 0$$

che risolviamo imponendo la condizione iniziale per cui σ(0) = 0.

$$\begin{aligned}\beta^{AP}(v_i) &= \int_0^{v_i} \tilde{v} f_{(N-1:N-1)}(\tilde{v})\, d\tilde{v} \qquad (3.31)\\ &= v_i F_{(N-1:N-1)}(v_i) - \int_0^{v_i} F_{(N-1:N-1)}(\tilde{v})\, d\tilde{v}\end{aligned}$$

La (3.31) equivale a:

$$\beta^{AP}(v_i) = \beta^{FPSB}(v_i) F_{(N-1:N-1)}(v_i)$$

e quindi i *bidders* presentano un *bid* inferiore nell'asta all-pay rispetto all'asta *FPSB*. Nel caso di valutazioni che seguono una distribuzione uniforme nell'intervallo unitario, avremo:

$$\beta^{AP}(v_i) = \frac{(N-1)}{N} v^N$$

Consideriamo il ricavo totale atteso del banditore nel caso generale. Egli riceve una somma da ciascuno degli *N bidders*, e quindi:

$$\begin{aligned}E\left[R^{AP}\right] &= NE_{v_i}\left[\beta^{AP}(v_i)\right]\\ &= N\int_0^{\bar{V}}\int_0^{v} s f_{(N-1:N-1)}(s)\, ds f(v)\, dv\end{aligned}$$

che è identica all'espressione (3.26). Nonostante i *bidders* presentino offerte sensibilmente inferiori rispetto all'asta *FPSB*, il ricavo atteso dal banditore è identico.

---

[14] Una forma di asta *all-pay* è quella detta **alla Cinese**, in cui ogni offerente paga la sua o un'altra offerta al banditore e il vincitore viene selezionato casualmente con *probabilità proporzionale alla propria offerta*. Questa procedura equivale a una lotteria ed è spesso applicata facendo in modo che gli offerenti acquistino i biglietti della lotteria a un prezzo fisso per biglietto. Il vincitore viene poi selezionato casualmente tra tutti i possessori di biglietti acquistati. Le aste cinesi sono spesso utilizzate per modellare l'esito di elezioni politiche o di competizioni per il deposito di brevetti, in cui la probabilità di vittoria (deposito iniziale del brevetto che impedisce agli altri concorrenti di depositare il proprio) è vista come proporzionale all'importo speso per conseguire i voti o il brevetto.

11. *La* war of attrition [NO]

La *war of attrition* viene ricondotta al modello d'asta all-pay nella variante di secondo prezzo: tutti i *bidders* perdenti pagano una somma pari al loro *bid*, mentre il vincitore riceve l'oggetto e paga il secondo maggior *bid*. Il modello di *war of attrition* è stato per primo introdotto per descrivere la lotta tra animali per il territorio ed è stato successivamente applicato alla descrizione di situazioni tipiche in cui le parti si confrontano in una "guerra di nervi". Tra queste applicazioni ricordiamo quelle fatte per gli scioperi: le due parti sindacali tengono duro nelle loro richieste sopportando un costo (per gli operai è lo stipendio perduto, mentre per i datori di lavoro è il mancato profitto) che assumiamo ignoto alla controparte. Ciascuna parte deve decidere quanto fare durare lo sciopero e la prima parte che rinuncia alle sue rivendicazioni mette fine alla guerra di nervi.

In questo caso, assumendo l'esistenza di un equilibrio simmetrico per tutti i *bidders* $j \neq i$, funzione non-decrescente della valutazione, $\varphi^{WA}(vj)$, il *bidder i* ha il seguente problema:

$$\max_{b} \int_0^{\sigma(b)} \left[v_i - \varphi^{WA}\left(v_j\right)\right] f_{N-1:N-1}\left(v_j\right) dv_j - b\left[1 - F_{(N-1:N-1)}\left(\sigma(b)\right)\right]$$

Il problema può essere letto in termini di quanta perdita (di salario o di profitto) è efficiente sopportare prima di abbandonare la lotta. Le condizioni del primo ordine del problema sono:

$$\frac{d\sigma}{db}\left(v_i - \varphi^{WA}\left(\sigma(b)\right)\right) f_{N-1:N-1}\left(\sigma(b)\right) - \left[1 - F_{(N-1:N-1)}\left(\sigma(b)\right)\right] + \qquad (3.32)$$

$$+ b f_{N-1:N-1}\left(\sigma(b)\right)\frac{d\sigma}{db} = 0$$

Osserviamo che in equilibrio $\sigma(b) = v$ ed applichiamo inoltre la regola della funzione inversa, ottenendo:

$$\frac{d\varphi}{dv}\left[1 - F_{(N-1:N-1)}\left(\sigma(b)\right)\right] = v f_{(N-1:N-1)}(v)$$

ovvero,

$$\frac{d\varphi}{dv} = v \frac{f_{(N-1:N-1)}(v)}{1 - F_{(N-1:N-1)}(v)}$$

Ricordando che:

$$h_{N-1}(v) = \frac{f_{(N-1:N-1)}(v)}{1 - F_{(N-1:N-1)}(v)}$$

indica l'*hazard rate* della distribuzione $F_{(N-1:N-1)}(v)$ dell'order statistics più elevato tra $N-1$ e imponendo ancora la condizione iniziale per cui $\varphi^{WA}(0) = 0$, risolviamo l'equazione differenziale come segue:

$$b_i = \varphi^{WA}(v_i) = \int_0^{v_i} \tilde{v} h_{N-1}(\tilde{v}) d\tilde{v} \qquad (3.33)$$

È possibile dimostrare che il *bid* ottimo della *war of attrition* è equivalente al prezzo atteso dell'asta *SPSB*. A questo fine, riprendo la (3.32) e riscrivo il termine a sinistra integrandolo per parti:

$$\int_0^{v_i} \tilde{v} f_{N-1:N-1}(\tilde{v}) d\tilde{v} = \int_0^{v_i} \varphi^{WA}(\tilde{v}) f_{N-1:N-1}(\tilde{v}) d\tilde{v} + \varphi^{WA}(v_i)\left[1 - F_{(N-1:N-1)}(v_i)\right]$$

Osservo che il termine a sinistra indica il prezzo atteso dal *bidder i* che vince l'asta *SPSB*, mentre il termine a destra indica il pagamento atteso del *bidder i* nella *war of attrition* (o asta all-pay di secondo prezzo): egli pagherà il valore atteso della seconda maggior valutazione, se vincente, mentre nel caso in cui non sarà vincente, verserà una somma pari al suo *bid*.

Per verificare che, data la strategia ottima $\varphi^{WA}(v_i)$ i due lati sono in effetti uguali sostituisco dalla (3.33) ed ottengo:

$$\int_0^{v_i} \tilde{v} f_{N-1:N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} = \int_0^{v_i} \int_0^{s} \tilde{s} h_{N-1}(\tilde{s})\, d\tilde{s} f_{N-1:N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} + \int_0^{v_i} \tilde{v} h_{N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} \left[1 - F_{(N-1:N-1)}(v_i)\right]$$

$$\int_0^{v_i} \tilde{v} f_{N-1:N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} = \int_0^{v_i} \int_v^{s} f_{N-1:N-1}(s)\, ds \tilde{v} h_{N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} + \int_0^{v_i} \tilde{v} h_{N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} \left[1 - F_{(N-1:N-1)}(v_i)\right]$$

$$\int_0^{v_i} \tilde{v} f_{N-1:N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} = \int_0^{v_i} [F_{N-1}(v_i) - F_{N-1}(\tilde{v})] \tilde{v} h_{N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} + \int_0^{v_i} \tilde{v} h_{N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} \left[1 - F_{(N-1:N-1)}(v_i)\right]$$

Semplificando, otteniamo:

$$\int_0^{v_i} \tilde{v} f_{N-1:N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} = -\int_0^{v_i} F_{N-1}(\tilde{v}) \tilde{v} h_{N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v} + \int_0^{v_i} \tilde{v} h_{N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v}$$

$$= \int_0^{v_i} \tilde{v} f_{N-1:N-1}(\tilde{v})\, d\tilde{v}$$

Abbiamo così verificato che nella *war of attrition* il *bidder* si comporta fissando un pagamento che in termini attesi uguaglia il prezzo che egli pagherebbe in un'asta *SPSB*. È questo un modo per verificare che l'equivalenza tra aste si estende anche alle forme particolari come appunto la *war of attrition* e l'asta *all-pay*.

12 Aste con partecipanti avversi al rischio

La metodologia seguita per ottenere l'ottimo *bid* con neutralità al rischio può essere estesa al caso *bidders* avversi al rischio. Consideriamo il caso di *N bidders* che competono in un'asta **PFSB per vendere al banditore (ad esempio la pubblica amministrazione) un oggetto per il quale valgano le ipotesi IPV** (ad esempio una partita di materiale da ufficio standard). Siano i costi di produzione-fornitura dell'oggetto *c* distribuiti secondo una cdf $F(c)$ con pdf $f(c)$ definite sopra un supporto $[\underline{c}, \overline{c}]$. L'avversione al rischio la introdurremo nella forma CRRA come segue:

$U_i = (b_i - c_i)^{1-\gamma}$ con $\gamma < 1$

Come di può vedere

$$\frac{dU_i}{db_i} = (1-\gamma)(b_i - c_i)^{-\gamma} \text{ e } \frac{d^2U_i}{db_i^2} = -\gamma(1-\gamma)(b_i - c_i)^{-(1+\gamma)}$$

Da cui

a) $A_{(b_i - c_i)} = -\dfrac{-\gamma(1-\gamma)(b_i - c_i)^{-(1+\gamma)}}{(1-\gamma)(b_i - c_i)^{-\gamma}} = \dfrac{\gamma}{(b_i - c_i)}$ che indica il coefficiente di Arrow-Pratt di avversione assoluta al rischio

b) $R_{(b_i - c\ )} = A_{(b_i - c_i)} \times (b_i - c_i) = \dfrac{\gamma(b_i - c_i)}{(b_i - c_i)} = \gamma$ che indica il coefficiente di avversione relativa al rischio costante.

L'utilità attesa del potenziale fornitore dell'oggetto sarà

$$E[U_i] = (b_i - c_i)^{1-\gamma} [1 - F(c_i)]^{N-1}$$

Supponendo come sempre che $\exists\ B : R^C \to R$ dove C è lo spazio dei costi tale che

$b = B(c_i)$

sia monotona crescente, continua e derivabile e che quindi esista anche

$c_i = B^{-1}(b_i)$

le condizioni per un massimo sono

$$-b(c_i)(N-1)[1-F(c_i)]^{N-2} f(c_i)+(1-\gamma)\frac{db}{dc_i}[1-F(c_i)]^{N-1}+c_i(N-1)[1-F(c_i)]^{N-2} f(c_i)=0$$

Moltiplicando tutti termini per $\dfrac{[1-F(c_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}}}{(1-\gamma)[1-F(c_i)]^{N-1}}$ riscriviamo le condizioni per un massimo come segue

$$\frac{db}{dc_i}[1-F(c_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}}-b(c_i)\left(\frac{N-1}{1-\gamma}\right)[1-F(c_i)]^{\left(\frac{N-1}{1-\gamma}\right)} f(c_i)+c_i\left(\frac{N-1}{1-\gamma}\right)[1-F(c_i)]^{\left(\frac{N-1}{1-\gamma}-1\right)} f(c_i)=0$$

Integrando tra c_i e $\overline{c}$ otteniamo

$$b(c_i)=c_i+\frac{\int_{c_i}^{\overline{c}}[1-F(s)]^{\left(\frac{N-1}{1-\gamma}\right)} ds}{[1-F(c_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}}}$$

Chiaramente questa funzione di bid coincide con quella ottenuta ipotizzando neutralità al rischio ponendo $\gamma = 0$. Al contrario con $0 < \gamma < 1$ il *mark-up* è minore rispetto al caso di neutralità al rischio (gli esponenti dei termini tra parentesi quadre sono minori rispetto al caso di neutralità al rischio in cui $\gamma = 0$) e con $\gamma \rightarrow 1$ gli esponenti sono pari a infinito e pertanto poiché $F(s) > F(c_i)$ abbiamo

$$\lim_{\gamma\to 1}\int_{c_i}^{\overline{c}}\frac{[1-F(s)]^{\left(\frac{N-1}{1-\gamma}\right)} ds}{[1-F(c_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}}}=0$$

Il *mark-up* si annulla e il *bid* tende al vero valore del costo.

Il bid vincente con un'asta al primo prezzo non è più uguale, *ceteris paribus*, per bidders neutrali o avversi al rischio. E non sarà più uguale neppure il loro valore atteso, ovvero nel caso trattato la speranza matematica della spesa/esborso del banditore/compratore.
Diamo per scontato che risultato appena illustrato vale anche nel caso di bidders che comprano in un'asta FPSB e non solo per quelli che vendono (bidders avversi al rischio offrono di più). Ci limitiamo solo a riscrivere la funzione di surplus di ogni bidder per il caso CRRA e ad impostare il problema della ricerca dell'ottimo bid come segue:

$$U_i=(v_i-b(v_i))^{1-\gamma} \quad \text{con } \gamma<1$$

Come di può vedere, dato $W_i=(v_i-b(v_i))$, valore della ricchezza netta,

$$\frac{dU_i}{dW_i}=(1-\gamma)(W_i)^{-\gamma} \quad \text{e} \quad \frac{d^2U_i}{dW_i^2}=-\gamma(1-\gamma)(W_i)^{-(1+\gamma)}$$

Da cui

c) $A(W_i)=-\dfrac{-\gamma(1-\gamma)(W_i)^{-(1+\gamma)}}{(1-\gamma)(W_i)^{-\gamma}}=\dfrac{\gamma}{W_i}$ che indica il coefficiente di Arrow-Pratt di avversione assoluta al rischio

d) $R(W_i)=A(W_i)\times W_i=\gamma$ che indica il coefficiente di avversione relativa al rischio costante.

Supponendo come sempre che $\exists\ B: R^V \rightarrow R$, l'utilità attesa del potenziale acquirente avverso al rischio dell'oggetto sarà

$$E[U_i] = (v_i - b(v_i))^{1-\gamma}[F(v_i)]^{N-1} = (v_i - b(v_i))^{1-\gamma}\left[F(B^{-1}(b(v_i))\right]^{N-1}$$

È ormai routine dimostrare che

$$b(v_i) = v_i - \underbrace{\frac{\int_{\underline{v}}^{v_i}[F(w)]^{\left(\frac{N-1}{1-\gamma}\right)}dw}{[F(v_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}}}}_{\substack{\text{Rendita Informativa} \\ \text{Minore rispetto al caso} \\ \text{di Neutralità al Rischio}}}$$

Dimostrazione (facoltativa)

$$Max_{b(v_i)}E[U_i] = (v_i - b(v_i))^{1-\gamma}[F(v_i)]^{N-1} = (v_i - b(v_i))^{1-\gamma}\left[F(B^{-1}(b(v_i))\right]^{N-1}$$

$$\frac{\partial E[U_i]}{\partial b(v_i)} = (v_i - b(v_i))^{1-\gamma}(N-1)[F(v_i)]^{N-2}\underbrace{\frac{dF}{dB^{-1}}}_{f(v_i)}\underbrace{\frac{dB^{-1}}{db(v_i)}}_{1/\frac{db}{dv_i}} - (1-\gamma)(v_i - b(v_i))^{-\gamma}\left[F(B^{-1}(b(v_i))\right]^{N-1} = 0$$

Ovvero

$$(v_i - b(v_i))(N-1)[F(v_i)]^{N-2}f(v_i) - (1-\gamma)\frac{db}{dv_i}[F(v_i)]^{N-1} = 0$$

Moltiplicando tutti i termini per $\dfrac{[F(v_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}}}{(1-\gamma)[F(v_i)]^{N-1}}$ otteniamo

$$v_i(N-1)[F(v_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}-1}f(v_i) - b(v_i)(N-1)[F(v_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}-1}f(v_i) - (1-\gamma)\frac{db}{dv_i}[F(v_i)]^{\frac{N-1}{1-\lambda}} = 0$$

Integrando per tutti i valori di v rilevanti ai fini della costruzione della strategia di *bid* del bidder *i*.mo:

$$\int_{\underline{v}}^{v_i} w(N-1)[F(w)]^{\frac{N-1}{1-\lambda}-1}f(w)dw - \int_{\underline{v}}^{v_i} b(w)(N-1)[F(w)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}-1}f(w)dw - \int_{\underline{v}}^{v_i}(1-\gamma)\frac{db}{dv_i}[F(v_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}} = 0$$

L'integrazione per parti genera

$$v_i[F(v_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}} - b(v_i)[F(v_i)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}} - \int_{\underline{v}}^{v_i}[F(w)]^{\frac{N-1}{1-\gamma}}dw = 0$$

Da cui il risultato del testo.

Poiché nell'asta al primo prezzo la rendita informativa che il bidder sottrae dalla valutazione è minore, *ceteris paribus*, rispetto al caso della neutralità, mentre nel caso dell'asta al secondo prezzo la strategia di bid non cambia, si pone la domanda: che succede al Teorema dell'Equivalenza del Ricavo Atteso se i bidders sono avversi al rischio?

12.1 Il (non)teorema dell'equivalenza del ricavo con avversione al rischio

La discussione fatta a proposito del *mark-up* dei venditori nell'asta discussa nel paragrafo precedente dovrebbe aver sollevato dubbi circa l'estensione della validità del Teorema dell'equivalenza del ricavo al caso di avversione al rischio dei *bidders* (venditori o compratori che siano). **In effetti le cose stanno proprio così: con aversione al rischio non vale più il teorema dell'equivalenza del ricavo, e il ricavo atteso in un'asta al primo prezzo è maggiore di quello generato nell'sta al secondo prezzo**. Di questo risultato tradizionale della teoria delle aste diamo la dimostrazione per il caso di un'asta per la vendita di un oggetto singolo, in modo da illustrare la strategia di *bid* anche nel caso di *bidders* che comprano nell'asta.

Supponiamo di avere N ≥ 2 potenziali compratori interessati ad un oggetto che essi valutano v e che procura loro un'utilità $u(.)$ con $u(0) = 0$, $u' > 0$ e $u'' < 0$. Come nel caso della neutralità al rischio supponiamo che la vera valutazione di ogni i sia v_i (valore che solo egli conosce); che $F(v_i) = \int_0^{v_i} f(v)dv$ indichi, come prima, la probabilità che almeno una valutazione (diciamo v_j) sia inferiore a v_i (ponendo nuovamente per semplicità $\underline{v} = 0$); che $1 - F(v_i) = 1 - \int_0^{v_i} f(v_i)dv$ indica la probabilità che almeno una v sia superiore a v_j. Quindi, ricordando che $F(\underline{0}) = 0$, abbiamo

$$F(v_i) = \int_0^{v_i} f(v)dv = \Pr[0 \leq v_j \leq v_i] = \underbrace{\Pr[v_j \leq v_i]}_{\substack{\text{Probalità che } \textbf{\textit{un}} \text{ avversario abbia} \\ \text{una valutazione più bassa di } v_i}}$$

e

$$[F(v_i)]^{N-1} \equiv \Pr\left(v_j \leq v_i \text{ per ogni } j \neq i \ \in N\right)$$

che indica la probabilità che i abbia "pescato" la più alta valutazione tra le N possibili. Allora, il problema di massimo per il *bidder i* si scrive:

$$\begin{aligned} \underset{b(v_i)}{Max} \ E[S_i] &= u(v_i - z(v_i)) \times \text{Probabilità di vittoria} \\ &= \mathrm{u}(v_i - z(v_i))[F(v_i)]^{N-1} \\ &= u(v_i - z(v_i))\left[F(B^{-1}(z_i))\right]^{N-1} \end{aligned}$$

In cui, per differenziare la simbologia del *bid* rispetto al caso della neutralità al rischio ho posto $z = B(v_i)$ assegnando a B le stesse proprietà del caso della neutralità e quindi $v_i = B^{-1}(z_i)$. Allora, derivando per cercare la condizione di massimo rispetto al bid del surplus atteso, otteniamo

$$-u_z'\left[F(B^{-1}(z_i))\right]^{N-1} + (N-1)u(v_i - z(v_i))\left[F(B^{-1}(z_i))\right]^{N-2} \frac{dF}{dB^{-1}(z_i)} = 0$$

Dove:

$$\frac{dF}{dB^{-1}(v_i)} = \frac{dF}{dB^{-1}(z_i)} \frac{dB^{-1}}{dz(v_i)} = \frac{dF}{dv_i} \frac{dB^{-1}}{dz(v_i)}$$

e

$$\frac{dB^{-1}}{dz(v_i)} = \frac{1}{dz/dv_i}.$$

Sostituendo

$$-u_z^{'}\frac{dz}{dv_i}\left[F(v_i)\right]^{N-1} + (N-1)u(v_i - z(v_i))\left[F(v_i)\right]^{N-2}\frac{dF}{dv_i} = 0\,.$$

Ovvero

$$\frac{dz}{dv_i} = (N-1)\frac{u(v_i - z(v_i))}{-u_z^{'}}\frac{f(v_i)}{\left[F(v_i)\right]}$$

Se fossimo in presenza di neutralità al rischio avremmo $u_z^{'} = 1$ e $u(v_i - z(v_i)) = v_i - z(v_i)$ da cui

$$-\frac{dz}{dv_i}\left[F(v_i)\right]^{N-1} + (N-1)(v_i - z(v_i))\left[F(v_i)\right]^{N-2}\frac{dF}{dv_i} = 0$$

Che corrisponde alla condizione ricavata a pag. 10 per il caso di neutralità al rischio. Però poiché la funzione di utilità è concava (con avversione al rischio) e vale zero per $v_i = 0$ vale che per ogni v positivo $\frac{u(v_i - b(v_i))}{u_{v_i}^{'}} > v_i - b(v_i)$. Quindi (chiamando b il bid con neutralità al rischio ed f la densità di F)

$$\frac{dz}{dv_i} = (N-1)\frac{u(v_i - z(v_i))}{u_z^{'}}\frac{f(v_i)}{F(v_i)} > \frac{db}{dv_i} = (N-1)(v_i - b(v_i))\frac{f(v_i)}{F(v_i)}$$

Pertanto, $\frac{dz}{dv_i} > \frac{db}{dv_i}$ e $z(v_i) > b(v_i)$ per ogni $0 < v_i < \overline{v}$. A parità di valutazione, il bid del partecipante avverso al rischio è maggiore del bid del partecipante neutrale al rischio per ogni possibile valutazione dell'oggetto. Poiché invece nel caso di asta al secondo prezzo nulla cambierebbe tra caso di neutralità e caso di avversione al rischio possiamo concludere che, in presenza di avversione al rischio, **il valore atteso del ricavo con l'asta al primo prezzo è superiore al valore atteso del ricavo con l'asta al secondo prezzo: non vale più il c.d. Teorema dell'Equivalenza del Ricavo.**

L'elasticità di sostituzione tra probabilità e surplus nel bid ottimo

Un'ulteriore interpretazione possiamo darla in termini di elasticità di sostituzione. Riscriviamo per il caso di avversione al rischio

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dv_i} &= (N-1)\frac{u(v_i - z(v_i))}{u_z^{'}}\frac{f(v_i)}{F(v_i)} \\ &= \frac{d\ln[F(v_i)]^{N-1}}{d\ln\left[u(v_i - z(v_i))\right]} \\ &= \sigma_{F,v}^{Avversione}\end{aligned}$$

Dove $\sigma_{F,S}$ indica l'elasticità di sostituzione tra la probabilità di vincere e il surplus per il bidder avverso al rischio. In equilibrio la pendenza della funzione di bid deve essere uguale all'elasticità di sostituzione tra la probabilità di "vincere" e il "pay-off" (utilità del surplus inteso come differenza tra valutazione e pagamento). Se avessimo linearità della funzione di utilità (neutralità al rischio) lo stesso risultato si scriverebbe come segue

$$\begin{aligned}\frac{db}{dv_i} &= (v_i - b(v_i))(N-1)\frac{f(v_i)}{F(v_i)} \\ &= \left(1-\frac{db}{dv_i}\right)\frac{d\ln[F(v_i)]^{N-1}}{d\ln[(v_i - b(v_i))]} \\ &= \sigma_{F,v_i}^{Neutralità}\end{aligned}$$

L'elasticità di sostituzione è maggiore nel caso di avversione al rischio e il bidder **aumenta** il suo bid rispetto al caso di neutralità al rischio.

Esercizio 2

Sia $u=(v_i - b(v_i))^r$ con $r \neq 1$ una funzione di utilità del bidder avverso al rischio che compete contro N – 1 bidders avversi al rischio in un'asta IPV al primo prezzo in cui si vende un singolo oggetto.

a) Cosa indica *r*?

b) Dimostrare che $z^{\text{Avversione}}(v_i) = v_i - \dfrac{\int_0^{v_i}[F(s)]^{\left(\frac{N-1}{r}\right)}ds}{[F(v_i)]^{\frac{N-1}{r}}}$

c) Dimostrare che con *r* = 1 (neutralità al rischio) [rifare vuol dire non limitarsi ad adattare il caso b]

$$z^{\text{Neutralità}}(v_i) = v_i - \frac{\int_0^{v_i}[F(s)]^{(N-1)}ds}{[F(v_i)]^{N-1}} < z^{\text{Avversione}}(v_i)$$

d) Ricavare che con $v \sim U[0,1]$ ed *r* < 1

$$z^{\text{Neutralità}}(v_i) = v_i\left(\frac{N-1}{N}\right) \leq z^{\text{Avversione}}(v_i) = v_i\left(\frac{N-1}{N-1+r}\right)$$

L'esercizio mostra che nel caso di aste al primo prezzo l'avversione al rischio dei potenziali compratori spinge gli stessi a praticare una autoriduzione (*bid shading*, per quelli che hanno bisogno di leggerlo scritto così …) rispetto alla valutazione vera, ma allo stesso tempo essi praticano una specie di "auto-incremento" ottimale rispetto al bid che farebbero se fossero neutrali al rischio inferiore. Pertanto l'autoriduzione rispetto al valore è minore di quella praticata (ovviamente sempre ottimamente) da bidders neutrali al rischio.

Esercizio 3

Nelle ipotesi di cui all'Esercizio 1 e assumendo che $v \sim U(0,1)$ dimostrare la non validità del Teorema dell'equivalenza del ricavo atteso tra asta al primo e al secondo prezzo con *bidders* avversi al rischio. (Aiutino: quanto bidda un bidder avverso al rischio in un'asta al secondo prezzo?)
In conclusione (con riferimento alla vendita; l'opposto vale con riferimento all'acquisto):

Se *U* è una funzione di utilità strettamente concava e derivabile due volte, allora in un'asta al **secondo prezzo** (anche con un prezzo di riserva), gli offerenti **offrono bids pari a quelli che offrirebbero se essi fossero**

neutrali al rischio: gli offerenti con valutazioni inferiori al prezzo di riserva non presentano offerte (serie) e gli offerenti con valutazioni superiori al prezzo di riserva offrono un *bid* pari alla loro valutazione.
In un'asta al **primo prezzo** (anche con un prezzo di riserva), ogni offerente avverso al rischio (con valutazioni più alte del prezzo di riserva) presenta un **bid più alto** di quello che in equilibrio presenterebbe se ella/egli fosse neutrale al rischio.
Con offerenti neutrali al rischio, le due aste (primo e secondo prezzo) sono equivalenti in termini di pagamento atteso (Teorema dell'Equivalenza del Ricavo). **Con offerenti avversi al rischio, l'asta per la vendita al primo prezzo produce entrate attese strettamente maggiori** di quelle generate in un'asta al secondo prezzo **e l'asta per l'acquisto** al prezzo più basso (esempio, asta al "primo prezzo" per un c.d. *procurement* della pubblica amministrazione) **produce spese di acquisto strettamente minori** di quelle generate in un'asta al secondo (meno alto) prezzo.
Negli schemi di regolamentazione del monopolio naturale, chi suggerisce l'asta alla Demsetz quale rimedio per risolvere il problema di L-M dovrebbe valutare l'implicazione in termini di ricavo atteso delle ipotesi sulla struttura di preferenze dei bidders. Se le imprese sono neutrali al rischio la forma dell'asta è indifferente (e pertanto valgono le considerazioni fatte nel corso dell'Esercizio 1) ma se le imprese sono avverse al rischio l'asta al primo prezzo potrebbe generare bids vincenti che non consentono al vincitore di ottenere un profitto atteso positivo al netto dei costi fissi.
Gli esercizi che seguono mostrano il venir meno del Teorema dell'Equivalenza del ricavo atteso ed esaminano anche **la relazione tra le varianze del ricavo nelle due forme d'asta**.

12.2 Valore Atteso del ricavo e sua varianza in aste a primo e secondo prezzo con neutralità e avversione al rischio

CASO NEUTRALITA' AL RISCHIO

Asta per la vendita di un oggetto a Bidders con valutazioni IPV che sono neutrali al rischio. Supponendo che *v* segua una distribuzione uniforme tra 0 e 1 e ponendo N = 5 il bid ottimo è

$$b(v_i) = \frac{4}{5}v_i$$

$$b(v_i) = v_i$$

rispettivamente nell'asta al primo e al secondo prezzo. Nelle dispense trovate grafico e considerazioni varie.

Supponiamo adesso che l'asta possa essere alternativamente condotta o al primo prezzo o alla Vickrey.

Mostraiamo che

a) il ricavo atteso dal banditore è identico nelle due forme d'asta (c.d. Equivalenza del Ricavo Atteso);

b) che la varianza del ricavo è maggiore nel caso di asta al secondo prezzo (a questo fine usare la funzione generatrice dei momenti e sfruttare le sue proprietà).

<u>Asta al primo prezzo</u>

Funzione generatrice dei momenti relativa alla v.c. rappresentata dal generico bid $b(v_i)$

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 e^{tb(v_i)}\, 5v_i^4 dv_i$$

Dove $5v_i^4$è la pdf dell'*highest* Order Statistics di *v* originariamente distribuita secondo la Uniforme tra 0 e 1 e dato N = 5 (5 bidders equivalgono a supporre che *v* abbia 5 realizzazioni ordinabili). Allora, per l'asta al primo prezzo abbiamo

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 e^{t(\frac{4v_i}{5})}\, 5v_i^4 dv_i$$

$$= e^{\left(\frac{4t}{5}\right)}\left[\frac{46875}{128t^5} - \frac{9375}{32t^4} + \frac{1875}{16t^3} + \frac{25}{4t}\right] - \frac{46875}{128t^5}$$

La sua derivata prima, valutata con $t = 0$, dà il primo momento semplice (media); ovvero il valore atteso del ricavo del banditore. Quindi

$$G' = \frac{\partial G(b(v_i))}{\partial t} = \frac{234375}{128t^6} - \frac{234375e^{4t/5}}{128t^6} + \frac{46875e^{4t/5}}{32t^5} - \frac{9375e^{4t/5}}{16t^4} + \frac{625e^{4t/5}}{4t^3} - \frac{125e^{4t/5}}{4t^2} + \frac{5e^{4t/5}}{t}$$

Per cui

$$\lim_{t \to 0} G' = \frac{2}{3} = 0.66667$$

Al contempo la derivata seconda, valutata con $t = 0$, dà il momento secondo semplice del ricavo del banditore nell'asta al primo prezzo. Quindi

$$G'' = \frac{\partial^2 G(b(v_i))}{\partial t^2} = \frac{703125}{64t^7} + \frac{703125e^{4t/5}}{64t^7} - \frac{140625e^{4t/5}}{16t^6} + \frac{28125e^{4t/5}}{8t^5} - \frac{1875e^{4t/5}}{2t^4} + \frac{375e^{4t/5}}{2t^3} - \frac{30e^{4t/5}}{t^2} + \frac{4e^{4t/5}}{t}$$

Per cui

$$\lim_{t \to 0} G'' = \frac{16}{15} = 0.457142$$

Usando la formula della varianza ovvero, chiamando R il bid incassabile (ricavo), otteniamo

$$VAR[R] = E[R^2] - (E]R])^2$$

Nel caso di asta al primo prezzo la varianza è

$$VAR[R^{FP}] = 0.457142 - (0.66667)^2 = 0.012693111$$

<u>Asta al secondo prezzo</u>

Funzione generatrice dei momenti

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 e^{tv_i}\, 20 * v_i^3(1 - v_i)dv_i$$

Dove $20 * v_i^3(1 - v_i)$ è la pdf del *second highest* Order Statitics (la penultima in ordine crescente) di v con 5 bidders (ovvero 5 realizzazioni ordinabili). Allora

$$G(b(v_i)) = \frac{20(6(4 + t) + e^t(-24 + 18t - 6t^2 + t^3))}{t^5}$$

La sua derivata prima, con $t = 0$, dà il primo momento semplice (media); ovvero il valore atteso del ricavo del banditore. Quindi

$$G' = \frac{\partial G(b(v_i))}{\partial t} = -\frac{100(6(4+t)+e^t(-24+18t-6t^2+t^3))}{t^6} + \frac{20(6+e^t(18-12t+3t^2)+e^t(-24+18t-6t^2+t^3))}{t^5}$$

Per cui

$$\lim_{t\to 0} G' = \frac{2}{3} = 0.66667$$

Al contempo la derivata seconda, sempre valutata con $t = 0$, dà il momento secondo semplice del ricavo del banditore nell'asta al secondo prezzo. Quindi

$$G'' = \frac{\partial^2 G(b(v_i))}{\partial t^2} = \frac{600(6(4+t)+e^t(-24+18t-6t^2+t^3))}{t^7} - \frac{200(6+e^t(18-12t+3t^2)+e^t(-24+18t-6t^2+t^3))}{t^6} + \frac{20(e^t(-12+6t)+2e^t(18-12t+3t^2)+e^t(-24+18t-6t^2+t^3))}{t^5}$$

Per cui

$$\lim_{t\to 0} G'' = \frac{10}{21} = 0.47619$$

Usando di nuovo il risultato di G'' troviamo la varianza come segue

$$VAR[R^{SP}] = 0.47619 - (0.66667)^2 = 0.0317$$

In sintesi, date le ipotesi:

$$\mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}] = \mathbb{E}[R^{Secondo\ \ Prezzo}] = 0.66667$$

mentre

$$VAR[R^{Primo\ Prezzo}] = 0.0127 < VAR[R^{Secondo\ \ Prezzo}] = 0.0317$$

Il valor atteso dell'introito è uguale nelle due forme d'asta ma un banditore avverso al rischio dovrebbe preferire l'asta al primo prezzo in cui la varianza del suo introito è minore rispetto a quella generata dall'asta a secondo prezzo.

Esercizi vari

ES1

Asta per la vendita di un oggetto con valutazioni IPV. Bidders neutrali al rischio. Supponendo che *v* segua una distribuzione esponenziale non negativa tra 0 e 1 avente per $s \geq 0$

$$f(v) = sv^{s-1}$$

$$F(v) = \int_0^v s\tilde{v}^{s-1} d\tilde{v} = v^s$$

Domande:

a) Ricavare il ricavo atteso del banditore con N = 5 ed *s* = 0.5.

Dato il risultato precedente non è necessario ricavare la funzione ottima di bid dell'asta al primo prezzo. Possiamo usare il Teorema dell'Equivalenza del Ricavo Atteso. La funzione generatrice dei momenti è

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 e^{tv_i}[N(N-1)(v^s)^{N-2}(1-v^s)sv^{s-1}]dv_i$$

dove $[N(N-1)(v^s)^{N-2}(1-v^s)sv^{s-1}]$ è la pdf del *second highest* OS di *v* data la nuova funzione di Ripartizione originaria. Allora, usando i dati

$$G(b(v_i)) = 10\int_0^1 e^{tv_i}\left[v_i - v_i^{\frac{3}{2}}\right]dv_i$$

Ripetendo la procedura precedente otteniamo

$$\mathbb{E}[R^{Secondo\ \ Prezzo}] = 0.47619 = \mathbb{E}[R^{Primo\ \ Prezzo}]$$

b) Ricavare la varianza del ricavo del banditore

$$VAR[R^{Secondo\ \ Prezzo}\} = 0.278 - 0.476^2 = 0.0514$$

Dove 0.278 è ricavato dalla derivata seconda di $G(b(v_i))$ valutata con *t* = 0. Per la varianza dell'asta al primo prezzo occorre definire la funzione generatrice dei momenti per il bid dell'asta al primo prezzo (bid primo prezzo e pdf della più altra statistica ordinata). Farlo per esercizio (vedi punto c).

c) Utilizzando l'espressione generale del bid ottimo al primo prezzo,

$$b(v_i) = v_i - \frac{\int_0^{v_i}[F(w)]^{N-1}dw}{F(v_i)^{N-1}}$$

dimostrare che con le nostre ipotesi esso è

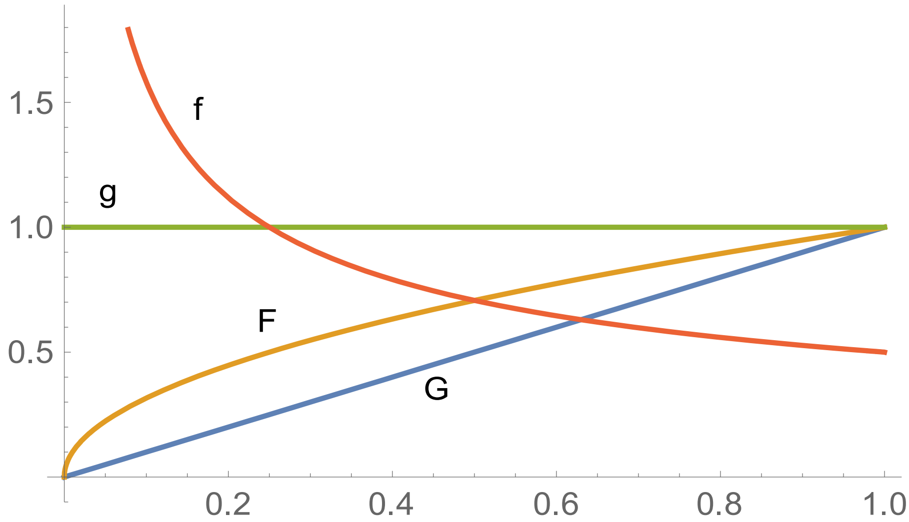
$$b(v_i) = \frac{2}{3}v_i$$

e che la sua varianza è minore di quella ricavata per l'asta al secondo prezzo (vedi punto b) mentre il suo valore atteso è uguale nelle due aste.

La differenza rispetto al bid con distribuzione uniforme tra 0 e 1 che è pari a

$$b(v_i) = \frac{N-1}{N} v_i$$

può essere interpretata attraverso la differenza delle CDF e pdf (G e g per la Uniforme tra 0 e 1; f ed F ed f per l'esponenziale non negativa) di cui al grafico?



ES2

Mostrare che con distribuzione uniforme delle valutazioni il *bid* ottimo è sempre

$$b(v_i) = \frac{N-1}{N} v_i$$

indipendentemente dal supporto della distribuzione se questa parte da 0. Mostrare che con distribuzioni uniformi tra $a > 0$ e $b > a$, il *bid* è dato da $\frac{N-1}{N} v_i$ più una componente positiva che varia inversamente rispetto al numero dei partecipanti dato a.

Supponendo che la uniforme di cui sopra sia tra 0 e 10 ricavare che nell'asta al primo e al secondo prezzo

$$\mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}] = \mathbb{E}[R^{Secondo\ \ Prezzo}] = \ 8.18182$$

Calcolare il valore delle due varianze del ricavo e commentare.

ES3

Mostrare che in presenza di distribuzione esponenziale negativa della valutazione in un'asta al primo prezzo per un oggetto IPV il bid di un individuo avverso al rischio è sempre superiore al bid di un individuo avverso al rischio.

Sia $F(v) = 1 - e^{-\lambda v}$su $[0, \infty)$ e parametro di scala piccolo = 1/100

Allora, con N = 5, il bid di tizio avverso al rischio (CRRA) e utilità data da $U = (v_i - b(v_i))^{1-\gamma}$ è, ponendo γ = ½,

$$b_i = v_i - \frac{\int_0^{v_i} \left(1 - \exp\left[-\frac{\tilde{v}}{100}\right]\right)^8 d\tilde{v}}{\left(1 - \exp\left[-\frac{v_i}{100}\right]\right)^8}$$

$$= v_i -$$

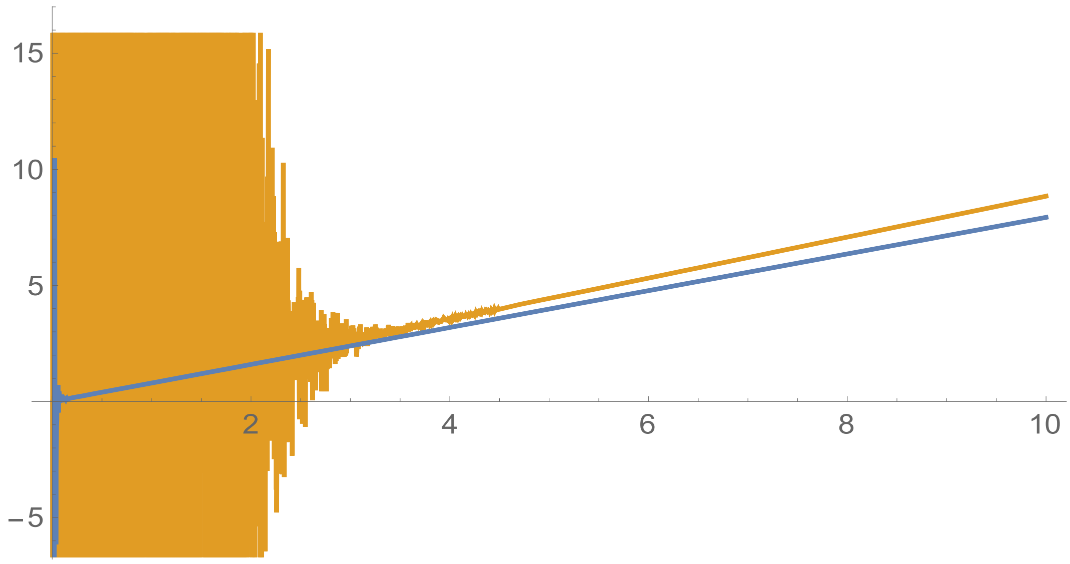
$$\frac{1}{\left(-1+e^{-v_i/100}\right)^8}\left(-\frac{3805}{14}+\frac{5}{42}e^{-2v_i/25}\left(-105+960e^{v_i/100}+28e^{v_i/50}\left(-140+336e^{v_i/100}-525e^{v_i/50}+560e^{3v_i/100}-420e^{v_i/25}+240e^{v_i/20}\right)\right)+v_i\right)$$

Mentre quello di un bidder neutrale al rischio (come sopra con γ = 0), è

$$b_i = v_i - \frac{\int_0^{v_i} \left(1 - \exp\left[-\frac{\tilde{v}}{100}\right]\right)^4 d\tilde{v}}{\left(1 - \exp\left[-\frac{v_i}{100}\right]\right)^4}$$

$$= v_i - \frac{-\frac{625}{3} - 25e^{-v_i/25} + \frac{400}{3}e^{-3v_i/100} - 300e^{-v_i/50} + 400e^{-v_i/100} + v_i}{\left(1 - e^{-v/100}\right)^4}$$

Il plot dei 2 bids (azzurro per l'individuo neutrale al rischio) è



Per valori bassi di v il bid nei 2 casi non è sempre positivo. La componente oscillatoria iniziale dei bid dipende dalle caratteristiche della distribuzione scelta?

Quando il bid è positivo, quello dell'individuo avverso al rischio è sempre strettamente superiore a quello dell'individuo neutrale al rischio

ES4

Ripetere **ES3** cambiando i valori di λ (es. λ = 1.5) e di N (es. N = 100) dato γ e ripetere l'esercizio per γ = 1/2 a parità di λ e di N.

Ci aspettiamo maggiore o minore componente oscillatoria nel bid dell'individuo avverso al rischio se γ diventa sempre più piccolo?

CASO AVVERSIONE AL RISCHIO

Asta per la vendita di un oggetto a Bidders con valutazioni IPV che sono avversi al rischio in forma CRRA. Supponiamo che la funzione di utilità sia come in ES3

$$U = [v_i - b(v_i)]^{1-\gamma}$$

Supponendo che v segua una distribuzione uniforme tra 0 e 1 e ponendo N = 5 e γ = 0.5 il bid ottimo è

$$b(v_i) = \frac{8}{9} v_i$$
$$b(v_i) = v_i$$

rispettivamente nell'asta al primo e al secondo prezzo. Nel caso di asta al primo prezzo, il bid è come ci si attendeva, più alto rispetto al caso della neutralità al rischio.

a) Confrontare il $\mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}]$ del caso di avversione al rischio con il $\mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}]$ ricavato per il caso di neutralità al rischio.

Nel caso di avversione al rischio dell'esercizio proposto abbiamo che la funzione generatrice dei momenti è

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 e^{t\left(\frac{8v_i}{9}\right)} 5v_i^4 dv_i = \frac{45(-19683 + e^{8t/9}(19683 - 17496t + 7776t^2 - 2304t^3 + 512t^4))}{4096t^5}$$

Derivando una prima volta rispetto a t e valutando la derivata per $t = 0$ otteniamo

$$\mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}] = 0.740741 > 0.66667$$

A parità di altre condizioni l'asta IPV ad oggetto singolo con bidders CRRA genera un più alto ricavo atteso risetto al caso di neutralità al rischio.

b) Confrontare $VAR[R^{Primo\ Prezzo}]$ del caso di avversione al rischio con $VAR[R^{Primo\ Prezzo}]]$ ricavato per il caso di neutralità al rischio.

Derivando G una seconda volta rispetto a t e valutando la derivata in $t = 0$ otteniamo 0.564374. Allora

$$VAR[R^{Primo\ Prezzo}] = 0.564374 - (0.740741)^2 = 0.01567278 > 0.012693111$$

La varianza del ricavo è maggiore nel caso di bidders avversi al rischio.

c) Ripetere i 2 confronti precedenti per l'asta alla Vickrey. [da svolgere]

Passiamo adesso ai confronti "interni" al caso di avversione al rischio.

d) Confrontare il $\mathbb{E}[R^{Primo\ Prezzo}]$ con il $\mathbb{E}[R^{Secondo\ Prezzo}]$ per il caso di avversione al rischio

Il valore del ricavo atteso con il Primo Prezzo lo abbiamo già ricavato. Calcoliamo quello relativo al secondo prezzo. La funzione generatrice dei momenti è

$$G(b(v_i)) = \int_0^1 e^{tv_i}\, 20 * v_i^3(1 - v_i)dv_i$$

Che ovviamente corrisponde al caso di asta al secondo prezzo con neutralità al rischio. Allora seguendo la stessa sequenza di passaggi abbiamo che derivando una prima volta rispetto a t e valutando la derivata per $t = 0$ otteniamo

$$\mathbb{E}[R^{Secondo\ Prezzo}] = 0.66667 < 0.740741$$

Allora: Con avversione al rischio il ricavo atteso è inferiore nell'asta al secondo prezzo rispetto all'asta al primo prezzo e corrisponde al ricavo atteso dell'asta tanto al primo quanto al secondo prezzo in ipotesi di neutralità al rischio. **Il Teorema dell'Equivalenza del Ricavo Atteso non è più valido**.
Quindi, a parità di condizioni sulla distribuzione di v e sul numero N di partecipanti, nel caso IPV ad oggetto singolo:

Ricavo atteso di un'asta al *primo* prezzo con avversione al rischio dei bidders compratori

$>$

Ricavo atteso di un'asta al *secondo* prezzo con avversione al rischio dei bidders compratori

$=$

Ricavo atteso di un'asta al *primo* prezzo con neutralità al rischio dei bidders compratori

$=$

Ricavo atteso di un'asta al *secondo* prezzo con neutralità al rischio dei bidders compratori

e) Confrontare VAR$[R^{Primo\ Prezzo}]$ con VAR$[R^{Secondo\ Prezzo}]$ per il caso di avversione al rischio

La varianza di R nel caso di asta al primo prezzo e avversione al rischio l'avevamo già calcolata

$$VAR[R^{Primo\ Prezzo}] = 0.564374 - (0.740741)^2 = 0.01567278$$

Calcoliamo la varianza di R al secondo prezzo seguendo la procedura consueta

$$VAR[R^{Secondo\ Prezzo}] = 0.47619 - (0.66667)^2 = 0.0317411$$

che a sua volta è uguale alla varianza di R al secondo prezzo con neutralità al rischio. Quindi

$$VAR[R^{Primo\ Prezzo}] < VAR[R^{Secondo\ Prezzo}]$$

Con avversione al rischio la varianza dell'asta al secondo prezzo è maggiore della varianza del ricavo nell'asta al primo prezzo. Il risultato sulle varianze corrisponde a quello della neutralità al rischio.

Sintesi: con partecipanti avversi al rischio, un'asta al primo prezzo ad oggetto singolo e ipotesi IPV genera un valore atteso dell'introito maggiore rispetto al caso dell'asta al secondo prezzo ed una varianza minore di quella generata nell'asta al secondo prezzo. Tuttavia, questa non è la minima varianza **teorica possibile**. Nell'esercizio la minima varianza è 0.012693111 e corrisponde al caso di asta al **primo prezzo** ma con **neutralità** al rischio. Ovviamente i confronti devono essere sempre fatti a parità di ipotesi sull'attitudine verso il rischio dei bidders. Per cui l'ultimo commento è fatto solo per completezza.

Bibliografia di Base

Testi di riferimento

Klemperer P. (2004), Auctions: Theory and Practice, Princeton University Press

Krishna V. (2010), Auction Theory, Academic Press (seconda edizione)

Menezes F. M., P. Monteiro (2005), An Introduction to Auction Theory, Oxford University Press

Milgrom P. (2004), Putting Auction Theory to Work, Cambridge University Press

Naegelen F. (1988), Les Mécanismes d'Enchères, Edition ECONOMICA, Parigi

Parisio L. (1999), Meccanismi d'asta, Carocci, Roma

Articoli citati nel testo

Affuso 2003
Binmore e Klemperer (2002)
Cumpston, A. and Khezr, Peyman (2020), Multi-Unit Auctions: A Survey of Theoretical Literature, Munich Personal RePEc Archive
Newbery e McDaniel (2004)
Rassenti, Smith e Wilson (2003)
Salant (2000)
Sentence (2003)
Vickrey W. (1961), Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders, Journal of Finance, March. Pp. 8-37